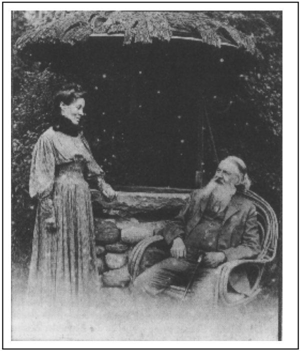
L'archetipo della logica algebrica

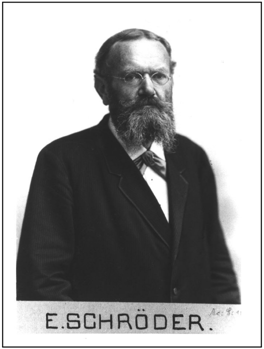
Eugenio G. Omodeo



Trieste, 08/03/2022–...

L'archetipo della logica algebrica

Eugenio G. Omodeo



Trieste, 08/03/2022–. . .

L'archetipo della logica algebrica

Eugenio G. Omodeo

(BI)	$A + B = B + A,$
(BII)	$A + (B + C) = (A + B) + C,$
(BIII)	$(A^{-} + B)^{-} + (A^{-} + B^{-})^{-} = A,$
(BIV)	$A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C,$
(BV)	$(A + B) \odot C = A \odot C + B \odot C,$
(BVI)	$A \odot \dot{\mathbf{1}} = A,$
(BVII)	$A^{\smile\smile} = A,$
(BVIII)	$(A + B)^{\smile} = A^{\smile} + B^{\smile},$
(BIX)	$(A \odot B)^{\smile} = B^{\smile} \odot A^{\smile},$
(BX)	$A^{\smile} \odot (A \odot B)^{-} + B^{-} = B^{-}.$

Trieste, 08/03/2022–. . .

THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC
Volume 6, Number 3, September 1941

ON THE CALCULUS OF RELATIONS

ALFRED TARSKI

The logical theory which is called the *calculus of (binary) relations*, and which will constitute the subject of this paper, has had a strange and rather capricious line of historical development.[1] Although some scattered remarks regarding the concept of relations are to be found already in the writings of medieval logicians, it is only within the last hundred years that this topic has become the subject of systematic investigation. The first beginnings of the contemporary theory of relations are to be found in the writings of A. De Morgan, who carried out extensive investigations in this domain in the fifties of the Nineteenth Century. De Morgan clearly realized the inadequacy of traditional logic for the expression and justification, not merely of the more intricate arguments of mathematics and the sciences, but even of simple arguments occurring in every-day life;

$$\forall z \qquad z \sim z$$

$$\forall y \forall z \qquad (y \sim z \rightarrow z \sim y)$$

$$\forall x \forall y \forall z \qquad [(y \sim x \ \& \ x \sim z) \rightarrow y \sim z]$$

Possiamo esprimere questi tre enunciati senza utilizzare $\boxed{\text{variabili individuali}}$?

Postulati su una relazione '$\sim$' di equivalenza

$$\begin{array}{ll} \forall z & z \sim z \\ \forall y\,\forall z & (y \sim z \rightarrow z \sim y) \\ \forall y\,\forall z & [\exists x\,(y \sim x \;\&\; x \sim z) \rightarrow y \sim z] \end{array}$$

Possiamo esprimere questi tre enunciati senza utilizzare $\boxed{\text{variabili individuali}}$? Ecco un modo:

$$\begin{array}{lll} \iota \sqsubseteq \sim & & \\ \sim^{\smile} \sqsubseteq \sim & & \text{'}\smile\text{' scambia i ruoli} \\ \sim \circ \sim \;\sqsubseteq\; \sim & & \text{'}\circ\text{' compone relazioni} \end{array}$$

Ecco un altro modo:

$$\iota \cup \sim \;=\; \sim$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\forall z & z & \sim & z \\
\forall y \, \forall z & (\, y \sim z & \leftrightarrow & z \sim y \,) \\
\forall y \, \forall z & \big[\, \exists x \, (\, y \sim x \;\; \& \;\; x \sim z \,) & \leftrightarrow & y \sim z \,\big]
\end{array}
$$

Possiamo esprimere questi tre enunciati senza utilizzare $\boxed{\text{variabili individuali}}$?

Ecco un altro modo:

$$
\begin{array}{rcl}
\iota \cup \sim & = & \sim \\
\sim^{\smile} & = & \sim \\
\sim \circ \sim & = & \sim
\end{array}
$$

Postulati su una relazione '$\sim$' di equivalenza

Che bastino a caratterizzare un'equivalenza?

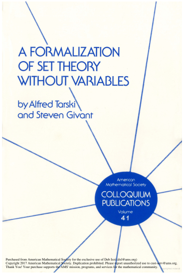
$$\begin{aligned} \iota \cup \sim \;&=\; \sim \\ \sim \circ \sim \;&=\; \sim^{\smile} \end{aligned}$$

Un postulato sulla relaz. '∈' di appartenenza

$$\forall y \,\forall z \,[\;\; \forall x\,(\,x \in y \;\leftrightarrow\; x \in z\,) \;\;\rightarrow\;\; y = z \;\;]$$

Possiamo esprimere questo enunciato—o, piú in generale, un qualsiasi assioma della teoria degli insiemi—senza utilizzare $\boxed{\text{variabili individuali}}$?

ove $\ni$, $\notin$, $\not\ni$ stanno per $\in^{\smile}$, $\overline{\in}$, $\overline{\in}^{\smile}$.

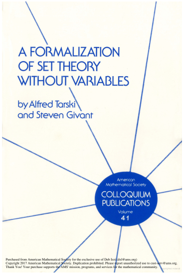


$$\forall y\,\forall z\,[\;\; y \neq z \;\rightarrow\; \exists x\,(\,x \in y \;\;\leftrightarrow\;\; x \notin z\,)\;\;]$$

Possiamo esprimere questo enunciato—o, piú in generale, un qualsiasi assioma della teoria degli insiemi—senza utilizzare $\boxed{\text{variabili individuali}}$? Ecco un modo:

$$\bar{\iota} \;\;\sqsubseteq\;\; (\ni \circ \notin) \cup (\not\ni \circ \in)\,,$$

ove $\ni$, $\notin$, $\not\ni$ stanno per $\in^{\smile}$, $\overline{\in}$, $\overline{\in}^{\smile}$.



Un postulato sulla relaz. '$\in$' di appartenenza

$$\forall y\,\forall z\,[\;\; y \neq z \;\rightarrow\; \exists x\,(\,x \in y \;\;\leftrightarrow\;\; x \notin z\,) \;\;]$$

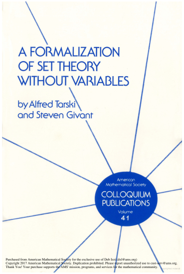
Possiamo esprimere questo enunciato—o, piú in generale, un qualsiasi assioma della teoria degli insiemi—senza utilizzare $\boxed{\text{variabili individuali}}$? Ecco un modo:

$$\bar{\iota} \;\; \sqsubseteq \;\; (\ni \circ \notin) \cup (\not\ni \circ \in)\,,$$

ove $\ni$, $\notin$, $\not\ni$ stanno per $\in^{\smile}$, $\overline{\in}$, $\overline{\in}^{\smile}$.

Ed ecco come esprimerlo tramite un'equazione:

$$\bar{\iota} \cap \big(\,(\ni \circ \notin) \cup (\not\ni \circ \in)\,\big) \;\; = \;\; \bar{\iota}\,.$$



SIMBOLI LOGICI: Vi sono

0. due ***costanti***: $\overbrace{\emptyset\,,\ 1\!\!1}^{\text{booleane}}$,

SIMBOLI LOGICI: Vi sono

0. due ***costanti***: $\overbrace{\emptyset\,,\,\mathbb{1}}^{\text{booleane}}$,
1. *due* (?) segni d'***identità***: ι ed $=$;

Simboli logici: Vi sono

0. $\overset{\text{tre}}{\cancel{\text{due}}}$ ***costanti***: $\overbrace{\emptyset\,,\,\mathbb{1}}^{\text{booleane}}$ e ι ;
1. *due* segni d'***identità***: ι ed $=$;

SIMBOLI LOGICI: Vi sono

0. tre ~~due~~ ***costanti***: $\overbrace{\emptyset\,,\,\mathbb{1}}^{\text{booleane}}$ e ι ;
1. *due* segni d'***identità***: ι ed $=$;
2. due ***operatori***:

   INTERSEZIONE, SOMMA: $\overbrace{\cap_{/2}\,,\,\triangle_{/2}}^{\text{booleani}}$;

SIMBOLI LOGICI: Vi sono

0. tre ~~due~~ ***costanti***: $\overbrace{\emptyset\,,\ \mathbb{1}}^{\text{booleane}}$ e ι ;
1. *due* segni d'***identità***: ι ed $=$;
2. quattro ~~due~~ ***operatori***:

$$\overbrace{\begin{array}{ll} \text{INTERSEZIONE, SOMMA:} & \cap_{/2}\,,\ \triangle_{/2}\ ; \end{array}}^{\text{booleani}}$$

$$\underbrace{\begin{array}{ll} \text{COMPOSIZIONE, INVERSIONE:} & \circ_{/2}\,,\ \smile_{/1}\ . \end{array}}_{\text{peirceani}}$$

SIMBOLI LOGICI: Vi sono

0. tre ~~due~~ ***costanti***: $\overbrace{\emptyset\,,\ \mathbb{1}}^{\text{booleane}}$ e ι ;
1. *due* segni d'***identità***: ι ed $=$;
2. quattro ~~due~~ ***operatori***:

INTERSEZIONE, SOMMA: $\overbrace{\cap\,/2\,,\ \triangle\,/2}^{\text{booleani}}$;

COMPOSIZIONE, INVERSIONE: $\underbrace{\circ\,/2\,,\ \smile\,/1}_{\text{peirceani}}$.

LETTERE MAPPALI: $r_1\,, r_2\,, r_3\,, \ldots$ (almeno una, e di forma tipografica molto varia: $\leqslant, \in, \lambda, \rho, \ldots$).

SIMBOLI LOGICI: Vi sono

0. tre ~~due~~ ***costanti***: $\overbrace{\emptyset\,,\,\mathbb{1}}^{\text{booleane}}$ e ι ;
1. *due* segni d'***identità***: ι ed $=$;
2. quattro ~~due~~ ***operatori***:

$$\begin{array}{ll} \text{INTERSEZIONE, SOMMA:} & \overbrace{\cap_{/2}\,,\ \triangle_{/2}}^{\text{booleani}}\ ; \\ \text{COMPOSIZIONE, INVERSIONE:} & \underbrace{\circ_{/2}\,,\ \smile_{/1}}_{\text{peirceani}}\ . \end{array}$$

LETTERE MAPPALI: $r_1\,,\ r_2\,,\ r_3\,,\ldots$ (almeno una, e di forma tipografica molto varia: $\leqslant$, $\in$, λ, ρ, ...).

PARENTESI: (,) .

Predicati:

0. Le costanti $\emptyset$, $\mathbb{1}$, ι ;
1. le lettere mappali r_i ;

Predicati:

0. Le costanti $\emptyset$, $\mathbb{1}$, ι ;
1. le lettere mappali r_i ;
2. le espressioni di una delle forme

$$(P \cap Q), \quad (P \triangle Q), \quad (P \circ Q), \quad P^{\smile} ,$$

con P e Q predicati.

Predicati:

0. Le costanti $\emptyset$, $1\!\!1$, ι ;
1. le lettere mappali r_i ;
2. le espressioni di una delle forme

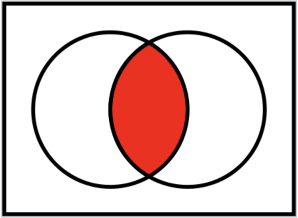
$$(\,P \cap Q\,), \quad (\,P \triangle Q\,), \quad (\,P \circ Q\,), \quad P^{\smile},$$

con P e Q predicati.

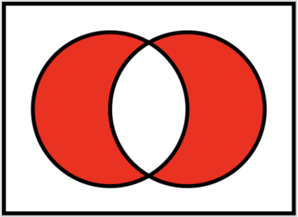
Enunciati: le uguaglianze di forma

$$P \;=\; Q\,,$$

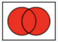
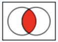
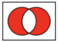
con P e Q predicati.



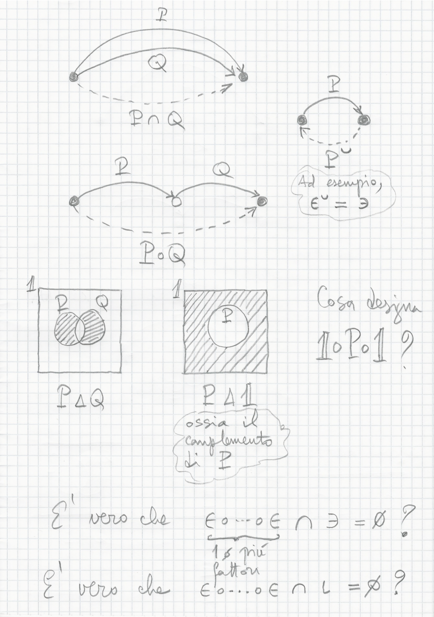
The intersection of two sets A and B, represented by circles. $A \cap B$ is in red.



Venn diagram of $A \triangle B$. The symmetric difference is the union without the intersection:

 $\setminus$  $=$ 

…Questo per quanto riguarda il retaggio booleano…


P
Q
P∩Q
P
P˘
Ad esempio, ∈˘ = ∋
P
Q
P∘Q
𝟙
P
Q
𝟙
P
P△Q
P△𝟙
ossia il complemento di P
Cosa designa 𝟙∘P∘𝟙 ?
E' vero che ∈∘⋯∘∈ ∩ ∋ = ∅ ?
1 o più fattori
E' vero che ∈∘⋯∘∈ ∩ ι = ∅ ?

Per ***interpretare*** il linguaggio mappale dalla ***firma*** $\mathcal{R}$, ove

$$\mathcal{R} \;=\; \left\{ \text{le lettere mappali } \mathsf{r}_i \right\},$$

occorre una ***struttura***

$$\mathfrak{I} \;=\; \left(\mathfrak{D},\, \mathfrak{R} \right),$$

con

Per ***interpretare*** il linguaggio mappale dalla ***firma*** $\mathcal{R}$, ove

$$\mathcal{R} \;=\; \Big\{ \text{le lettere mappali } \mathsf{r}_i \Big\},$$

occorre una ***struttura***

$$\mathfrak{I} \;=\; \Big(\mathfrak{D}, \mathfrak{R} \Big),$$

con

$\mathfrak{D}$ $\boxed{\text{universo del discorso}}$, non vuoto ,

$\mathfrak{R}$ appartenente a $\Big(\mathcal{P}(\mathfrak{D} \times \mathfrak{D})\Big)^{\mathcal{R}}$ o a $\prod_{r \in \mathcal{R}} \mathcal{P}\Big(\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}\Big)$.

Per ***interpretare*** il linguaggio mappale dalla ***firma*** $\mathcal{R}$, ove

$$\mathcal{R} \;=\; \Big\{ \text{le lettere mappali } \mathsf{r}_i \Big\},$$

occorre una ***struttura***

$$\mathfrak{I} \;=\; \Big(\mathfrak{D}, \mathfrak{R} \Big),$$

con

$\mathfrak{D}$ $\boxed{\text{universo del discorso}}$, non vuoto ,

$\mathfrak{R}$ appartenente a $\Big(\mathcal{P}(\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}) \Big)^{\mathcal{R}}$ o a $\prod_{r \in \mathcal{R}} \mathcal{P}\Big(\mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \Big)$.

Vale a dire che: $\mathfrak{R}$ associa a ogni lettera mappale una relazione *diadica* su $\mathfrak{D}$, cioè, un insieme di coppie ordinate di elem. di $\mathfrak{D}$.

Estendiamo la funzione

$$\mathfrak{R}: \quad \mathsf{r_i} \quad \longmapsto \quad \mathsf{r_i}^{\mathfrak{I}}$$

a $\boxed{\text{tutti}}$ i predicati ponendo, ricorsivam.,

$$\emptyset^{\mathfrak{I}} =_{\mathsf{Def}} \emptyset\,, \qquad \mathbb{1}^{\mathfrak{I}} =_{\mathsf{Def}} \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}\,, \qquad \iota^{\mathfrak{I}} =_{\mathsf{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle \ : \ \boldsymbol{a} \text{ in } \mathfrak{D}\};$$

Estendiamo la funzione

$$\mathfrak{R} : \quad \mathsf{r_i} \quad \mapsto \quad \mathsf{r_i}^{\mathfrak{I}}$$

a $\boxed{\text{tutti}}$ i predicati ponendo, ricorsivam.,

$$\emptyset^{\mathfrak{I}} =_{\mathrm{Def}} \emptyset, \quad \mathbb{1}^{\mathfrak{I}} =_{\mathrm{Def}} \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}, \quad \iota^{\mathfrak{I}} =_{\mathrm{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle : \boldsymbol{a} \text{ in } \mathfrak{D}\};$$

$$(P \cap Q)^{\mathfrak{I}} =_{\mathrm{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in P^{\mathfrak{I}} : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in Q^{\mathfrak{I}}\};$$

$$(P \triangle Q)^{\mathfrak{I}} =_{\mathrm{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in P^{\mathfrak{I}} \text{ \underline{s}se } \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \notin Q^{\mathfrak{I}}\};$$

Estendiamo la funzione

$$\mathfrak{R}: \quad \mathsf{r_i} \quad \mapsto \quad \mathsf{r_i}^{\mathfrak{I}}$$

a $\boxed{\text{tutti}}$ i predicati ponendo, ricorsivam.,

$$\emptyset^{\mathfrak{I}} =_{\mathrm{Def}} \emptyset, \quad \mathbb{1}^{\mathfrak{I}} =_{\mathrm{Def}} \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}, \quad \iota^{\mathfrak{I}} =_{\mathrm{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle : \boldsymbol{a} \text{ in } \mathfrak{D}\};$$

$$(P \cap Q)^{\mathfrak{I}} =_{\mathrm{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in P^{\mathfrak{I}} : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in Q^{\mathfrak{I}}\};$$

$$(P \triangle Q)^{\mathfrak{I}} =_{\mathrm{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in P^{\mathfrak{I}} \text{ \underline{s}se } \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \notin Q^{\mathfrak{I}}\};$$

$$(P^{\smile})^{\mathfrak{I}} =_{\mathrm{Def}} \{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle : \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in P^{\mathfrak{I}}\};$$

$$(P \circ Q)^{\mathfrak{I}} =_{\mathrm{Def}} \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} : \text{vi sono } \boldsymbol{c} \text{ in } \mathfrak{D} \text{ per i quali } \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle \in P^{\mathfrak{I}} \text{ e } \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \rangle \in Q^{\mathfrak{I}}\}.$$

A qs. punto, qualsiasi enunciato $P = Q$ risulta vero / falso in ogni struttura interpretativa $\mathfrak{I}$. Scrivendo che

$$\boxed{\mathcal{A} \models^{\times} P{=}Q}$$

intenderemo che $P^{\mathfrak{I}} = Q^{\mathfrak{I}}$ vale quando $\mathfrak{I}$ è tale che $R^{\mathfrak{I}} = S^{\mathfrak{I}}$ valga per tutte le uguaglianze $R{=}S$ in $\mathcal{A}$.

A qs. punto, qualsiasi enunciato $P = Q$ risulta vero / falso in ogni struttura interpretativa $\mathfrak{I}$. Scrivendo che

$$\boxed{\mathcal{A} \models^{\times} P{=}Q}$$

intenderemo che $P^{\mathfrak{I}} = Q^{\mathfrak{I}}$ vale quando $\mathfrak{I}$ è tale che $R^{\mathfrak{I}} = S^{\mathfrak{I}}$ valga per tutte le uguaglianze $R{=}S$ in $\mathcal{A}$.

Spesso vorremo specificare la collezione $\mathfrak{K}$ delle strutture *che hanno interesse per un'applicazione* tramite un insieme $\mathcal{A}$ di uguaglianze che devono risultare vere in ogni $\mathfrak{I}$ di $\mathfrak{K}$.

A qs. punto, qualsiasi enunciato $P = Q$ risulta vero / falso in ogni struttura interpretativa $\mathfrak{I}$. Scrivendo che

$$\boxed{\mathcal{A} \models^{\times} P{=}Q}$$

intenderemo che $P^{\mathfrak{I}} = Q^{\mathfrak{I}}$ vale quando $\mathfrak{I}$ è tale che $R^{\mathfrak{I}} = S^{\mathfrak{I}}$ valga per tutte le uguaglianze $R{=}S$ in $\mathcal{A}$.

Spesso vorremo specificare la collezione $\mathfrak{K}$ delle strutture *che hanno interesse per un'applicazione* tramite un insieme $\mathcal{A}$ di uguaglianze che devono risultare vere in ogni $\mathfrak{I}$ di $\mathfrak{K}$.

Ad es., con $\mathcal{A} = \{\, \iota = 1\!\!1 \,\}$, imporremo che $\mathfrak{D}$ sia singoletto. Cosí, $\emptyset$ ed $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ diverranno i soli valori possibili per qualsiasi predicato.

A qs. punto, qualsiasi enunciato $P = Q$ risulta vero / falso in ogni struttura interpretativa $\mathfrak{I}$. Scrivendo che

$$\boxed{\mathcal{A} \models^{\times} P{=}Q}$$

intenderemo che $P^{\mathfrak{I}} = Q^{\mathfrak{I}}$ vale quando $\mathfrak{I}$ è tale che $R^{\mathfrak{I}} = S^{\mathfrak{I}}$ valga per tutte le uguaglianze $R{=}S$ in $\mathcal{A}$.

Spesso vorremo specificare la collezione $\mathfrak{K}$ delle strutture *che hanno interesse per un'applicazione* tramite un insieme $\mathcal{A}$ di uguaglianze che devono risultare vere in ogni $\mathfrak{I}$ di $\mathfrak{K}$.

Ad es., con $\mathcal{A} = \{\, \iota = 1\!\!1 \,\}$, imporremo che $\mathfrak{D}$ sia singoletto. Cosí, $\emptyset$ ed $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ diverranno i soli valori possibili per qualsiasi predicato.

Ma abbiamo già visto esempi piú sofisticati. . .

QUALCHE PROPRIETÀ DI UN ... ...

Scegliamo per r_1 questa forma tipografica: $\leqslant$.

Indicare quali sono le strutture interpretative $\mathfrak{I}$ in cui risultano vere

$$\begin{aligned} \iota \cap (\leqslant \triangle \mathbb{1}) &= \emptyset\,, \\ (\leqslant \circ \leqslant) \cap (\leqslant \triangle \mathbb{1}) &= \emptyset\,. \end{aligned}$$

È vero che

$$\{\, \iota \cap (\leqslant \triangle \mathbb{1}) = \emptyset\,,\ (\leqslant \circ \leqslant) \cap (\leqslant \triangle \mathbb{1}) = \emptyset \,\} \models^{\times} \leqslant^{\smile} = \leqslant\,?$$

Esercizio*:

Stabilire se la coppia

$$\Big(\ \mathtt{uguaglianze\ di}\ \mathcal{L}^{\times},\ \models^{\times}\ \Big)$$

sia o no una logica.

Dove risiede la difficoltà:

Stabilire se

$$\Big(\ \mathtt{uguaglianze\ di}\ \mathcal{L}^{\times},\ \models^{\times}\ \Big)$$

goda o meno della compattezza, eventualmente individuando una relazione $\vdash^{\times}$ piú '*operativa*' di $\models^{\times}$ ma che a conti fatti risulti tale che:

$$\vdash^{\times}\ =\ \models^{\times}$$

(sempre che ciò sia possibile!!)

$$\begin{aligned} \overline{P} &=_{\mathsf{Def}} P \triangle \mathbb{1} \\ P \cup Q &=_{\mathsf{Def}} (P \triangle Q) \triangle (P \cap Q) \\ P \setminus Q &=_{\mathsf{Def}} P \cap (Q \triangle P) \end{aligned}$$

Sintassi di $\mathcal{L}^{\times}$ — Costrutti abbreviativi

$\overline{P} =_{\text{Def}} P \triangle \mathbb{1}$	$P \dagger Q =_{\text{Def}} \overline{\overline{P} \circ \overline{Q}}$
$P \cup Q =_{\text{Def}} (P \triangle Q) \triangle (P \cap Q)$	$\diamond P =_{\text{Def}} \mathbb{1} \circ P \circ \mathbb{1}$
$P \setminus Q =_{\text{Def}} P \cap (Q \triangle P)$	$\text{fncPart}(P) =_{\text{Def}} P \cap \overline{P \circ \overline{\iota}}$

$$
\begin{aligned}
\overline{P} &=_{\mathrm{Def}} P \triangle \mathbb{1} \\
P \cup Q &=_{\mathrm{Def}} (P \triangle Q) \triangle (P \cap Q) \\
P \setminus Q &=_{\mathrm{Def}} P \cap (Q \triangle P)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
P \dagger Q &=_{\mathrm{Def}} \overline{\overline{P} \circ \overline{Q}} \\
\diamond P &=_{\mathrm{Def}} \mathbb{1} \circ P \circ \mathbb{1} \\
\mathsf{fncPart}(P) &=_{\mathrm{Def}} P \cap \overline{P \circ \bar{\iota}}
\end{aligned}
$$

$$P \sqsubseteq Q \quad \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \quad P \setminus Q = \emptyset$$

$\overline{P} =_{\mathrm{Def}} P \triangle \mathbb{1}$ $P \cup Q =_{\mathrm{Def}} (P \triangle Q) \triangle (P \cap Q)$ $P \setminus Q =_{\mathrm{Def}} P \cap (Q \triangle P)$	$P \dagger Q =_{\mathrm{Def}} \overline{\overline{P} \circ \overline{Q}}$ $\Diamond P =_{\mathrm{Def}} \mathbb{1} \circ P \circ \mathbb{1}$ $\mathsf{fncPart}(P) =_{\mathrm{Def}} P \cap \overline{P \circ \overline{\iota}}$

$$P \sqsubseteq Q \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} P \setminus Q = \emptyset$$

$$\mathsf{f} \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathbb{1} = \emptyset$$

$$P{=}Q \Rightarrow R{=}S \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \overline{\Diamond(P \triangle Q)} \cap (R \triangle S) = \emptyset$$

$$\neg P{=}Q \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} P{\neq}Q \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \Diamond(P \triangle Q) = \mathbb{1}$$

$\overline{P} =_{\mathrm{Def}} P \triangle 1\!\!1$	$P \dagger Q =_{\mathrm{Def}} \overline{\overline{P} \circ \overline{Q}}$
$P \cup Q =_{\mathrm{Def}} (P \triangle Q) \triangle (P \cap Q)$	$\Diamond P =_{\mathrm{Def}} 1\!\!1 \circ P \circ 1\!\!1$
$P \setminus Q =_{\mathrm{Def}} P \cap (Q \triangle P)$	$\mathsf{fncPart}(P) =_{\mathrm{Def}} P \cap \overline{P \circ \overline{\iota}}$

$$P \sqsubseteq Q \;\leftrightarrow_{\mathrm{Def}}\; P \setminus Q = \emptyset$$

$$\mathsf{f} \;\leftrightarrow_{\mathrm{Def}}\; 1\!\!1 = \emptyset$$

$$P{=}Q \;\Rightarrow\; R{=}S \;\leftrightarrow_{\mathrm{Def}}\; \overline{\Diamond(P \triangle Q)} \cap (R \triangle S) = \emptyset$$

$$\neg P{=}Q \;\leftrightarrow_{\mathrm{Def}}\; P{\neq}Q \;\leftrightarrow_{\mathrm{Def}}\; \Diamond(P \triangle Q) = 1\!\!1$$

costrutto	$\Rightarrow$	$\neg$	$=$	$\neq$	$\sqsubseteq$	$\setminus$	$\cup$	$\triangle$	$\dagger$	$\cap$	$\circ$	$\smile$	$\overline{}$
priorità	-2	-1	0	0	0	1	1	2	3	4	5	6	6

$$
\begin{array}{|c|l}
\hline
P \cap Q = Q \cap P & \\
(P \cap (Q \triangle R)) \triangle (P \cap Q) = P \cap R & \\
\mathbb{1} \cap P = P & \\
(P \star Q) \star R = P \star (Q \star R) & \star \in \{ \triangle, \cap \} \\
\hline
(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R) & \\
\iota \circ P = P & \\
(P \cup Q) \circ R = (Q \circ R) \cup (P \circ R) & \\
P^{\smile\smile} = P & \\
(P \star Q)^{\smile} = Q^{\smile} \star P^{\smile} & \star \in \{ \cap, \circ \} \\
(P^{\smile} \circ (R \setminus (P \circ Q))) \cap Q = \emptyset & \\
\hline
\end{array}
$$

Qui sopra (richiamo):

$$
\begin{aligned}
P \cup Q &=_{\text{Def}} (P \triangle Q) \triangle (P \cap Q), \\
P \setminus Q &=_{\text{Def}} P \cap (Q \triangle P).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
P \cap Q &=& Q \cap P & \\
(P \cap (Q \triangle R)) \triangle (P \cap Q) &=& P \cap R & \\
\mathbb{1} \cap P &=& P & \\
(P \star Q) \star R &=& P \star (Q \star R) & \star \in \{\triangle, \cap, \circ\} \\
\iota \circ P &=& P & \\
(P \cup Q) \circ R &=& (Q \circ R) \cup (P \circ R) & \\
P^{\smile\smile} &=& P & \\
(P \star Q)^{\smile} &=& Q^{\smile} \star P^{\smile} & \star \in \{\cap, \circ\} \\
(P^{\smile} \circ (R \setminus (P \circ Q))) \cap Q &=& \emptyset &
\end{array}
$$

Esercizio ‘soundness’ (?)

Accertare la ***validità*** degli schemi qui adottati come assiomi logici,

□

$$P \cap Q = Q \cap P$$
$$(P \cap (Q \triangle R)) \triangle (P \cap Q) = P \cap R$$
$$\mathbb{1} \cap P = P$$
$$(P \star Q) \star R = P \star (Q \star R) \qquad \star \in \{\triangle, \cap, \circ\}$$
$$\iota \circ P = P$$
$$(P \cup Q) \circ R = (Q \circ R) \cup (P \circ R)$$
$$P^{\smile\smile} = P$$
$$(P \star Q)^{\smile} = Q^{\smile} \star P^{\smile} \qquad \star \in \{\cap, \circ\}$$
$$(P^{\smile} \circ (R \setminus (P \circ Q))) \cap Q = \emptyset$$

Esercizio ‘soundness’ (?)

Accertare la ***validità*** degli schemi qui adottati come assiomi logici, intesa nel senso che qualsiasi uguaglianza fra predicati ricada sotto ciascuno di essi è vera in ogni struttura interpretativa $\mathfrak{I}$. □

$$P \cap Q = Q \cap P$$
$$(P \cap (Q \triangle R)) \triangle (P \cap Q) = P \cap R$$
$$\mathbb{1} \cap P = P$$
$$(P \star Q) \star R = P \star (Q \star R) \qquad \star \in \{ \triangle, \cap, \circ \}$$
$$\iota \circ P = P$$
$$(P \cup Q) \circ R = (Q \circ R) \cup (P \circ R)$$
$$P^{\smile\smile} = P$$
$$(P \star Q)^{\smile} = Q^{\smile} \star P^{\smile} \qquad \star \in \{ \cap, \circ \}$$
$$(P^{\smile} \circ (R \setminus (P \circ Q))) \cap Q = \emptyset$$

Esercizio ‘soundness’ (?)

Accertare la ***validità*** degli schemi qui adottati come assiomi logici, intesa nel senso che qualsiasi uguaglianza fra predicati ricada sotto ciascuno di essi è vera in ogni struttura interpretativa $\mathfrak{I}$. □

$$\boxed{\vdash^{\times}}$$

Regola d'inferenza del calcolo delle mappe

$$\boxed{\boxed{\vdash^{\times}}}$$

Da $P = Q$ ed $R = S$, quando R figura in P e/o in Q ,

s'inferisce qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla $P = Q$

per

Regola d'inferenza del calcolo delle mappe

$$\boxed{\vdash^{\times}}$$

Da $P = Q$ ed $R = S$, quando R figura in P e/o in Q ,

s'inferisce qualsiasi uguaglianza ottenibile dalla $P = Q$

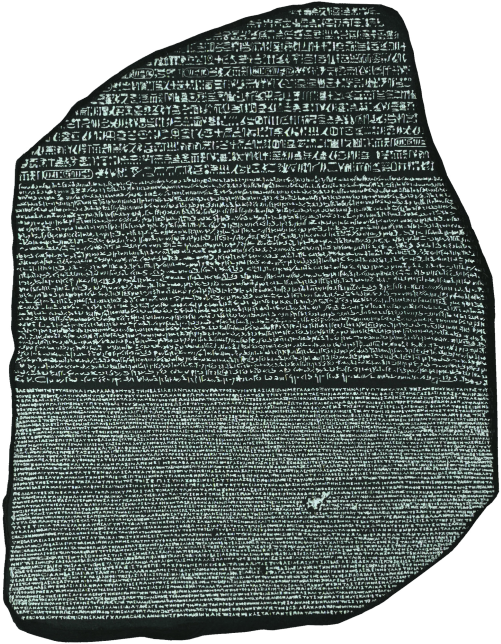
per sostituzione di S a qualche occorrenza di R .

Sia $\mathcal{Q}$ l'insieme delle uguaglianze fra predicati. Diremo che la sequenza

$$\delta \quad = \quad \langle \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_h \rangle$$

è una dimostrazione di ϑ da $\mathcal{A}$, dove $\vartheta \in \mathcal{Q}$ ed $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}$, quando:

i. $\delta_h = \vartheta$;
ii. per ogni $i = 0, \ldots, h$, accade che δ_i sia un elemento di $\mathcal{Q}$ che
    - ⋆ appartiene ad $\mathcal{A}$, *oppure*
    - ⋆ ricade in uno degli schemi proposti come assiomi logici, oppure ha la forma $P{=}P$, *oppure*
    - ⋆ vi sono uguaglianze $\delta_{j_0} = (P{=}Q)$ e $\delta_{j_1} = (R{=}S)$ che lo *precedono* (nel senso che $j_0 < i$ e $j_1 < i$), tali che R figuri come parte di P e/o di Q e che δ_i risulti dall'uguaglianza $P{=}Q$ per rimpiazzamento di qualche R in essa presente con il predicato S.



Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\text{Def}} \forall v\,(\,v \in X \rightarrow v \in Y\,)$	$\subseteq \;=_{\text{Def}}\; \overline{\in^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y\,\rho\,X \rightarrow X\,\rho\,Y$	$\rho^{\smile} = \rho$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(\,v \in X \rightarrow v \in Y\,)$	$\subseteq \;=_{\mathrm{Def}}\; \overline{\in^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y\,\rho\,X \rightarrow X\,\rho\,Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X\,\rho\,Y\,\rho\,Z \rightarrow X\,\rho\,Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(\, v \in X \rightarrow v \in Y\,)$	$\subseteq\ =_{\mathrm{Def}}\ \overline{\in^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y\,\rho\,X \rightarrow X\,\rho\,Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X\,\rho\,Y\,\rho\,Z \rightarrow X\,\rho\,Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$

Density: $X \leqslant Y\ \&\ X \neq Y \rightarrow (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y\ \&\ X \neq v \neq Y)$

$$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(\,v \in X \rightarrow v \in Y\,)$	$\subseteq\ =_{\mathrm{Def}}\ \overline{\in^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y\,\rho\,X \rightarrow X\,\rho\,Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X\,\rho\,Y\,\rho\,Z \rightarrow X\,\rho\,Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists\, v\Big(\,X\,\rho\,v \vee v\,\rho\,X\,\Big)$	$(\,\rho \cup \rho^{\smile}\,) \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$

Density: $X \leqslant Y \,\&\, X \neq Y \rightarrow (\exists\, v)(\,X \leqslant v \leqslant Y \,\&\, X \neq v \neq Y\,)$

$$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(v \in X \rightarrow v \in Y)$	$\sqsubseteq \;=_{\mathrm{Def}}\; \overline{\overline{\in}^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y\,\rho\,X \rightarrow X\,\rho\,Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X\,\rho\,Y\,\rho\,Z \rightarrow X\,\rho\,Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists v\big(X\,\rho\,v \vee v\,\rho\,X\big)$	$(\rho \cup \rho^{\smile}) \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$
Reflexivity:	$X\,\rho\,Y \rightarrow X\,\rho\,X \;\&\; Y\,\rho\,Y$	$\rho \cup \rho^{\smile} \sqsubseteq (\iota \cap \rho) \circ \mathbb{1}$

Density: $X \leqslant Y \;\&\; X \neq Y \rightarrow (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y \;\&\; X \neq v \neq Y)$

$$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(v \in X \to v \in Y)$	$\subseteq\ =_{\mathrm{Def}} \overline{\in^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y \rho X \to X \rho Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X \rho Y \rho Z \to X \rho Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists v \big(X \rho v \vee v \rho X \big)$	$(\rho \cup \rho^{\smile}) \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$
Reflexivity:	$X \rho Y \to X \rho X \ \&\ Y \rho Y$	$\rho \cup \rho^{\smile} \sqsubseteq (\iota \cap \rho) \circ \mathbb{1}$
Strictness:	$\neg X < X$	$< \cap\ \iota = \emptyset$

Density: $X \leqslant Y \ \&\ X \neq Y \to (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y \ \&\ X \neq v \neq Y)$

$$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(v \in X \rightarrow v \in Y)$	$\subseteq\; =_{\mathrm{Def}}\; \overline{\overline{\in}^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y\,\rho\,X \rightarrow X\,\rho\,Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X\,\rho\,Y\,\rho\,Z \rightarrow X\,\rho\,Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists v \big(X\,\rho\,v \vee v\,\rho\,X \big)$	$(\rho \cup \rho^{\smile}) \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$
Reflexivity:	$X\,\rho\,Y \rightarrow X\,\rho\,X \;\&\; Y\,\rho\,Y$	$\rho \cup \rho^{\smile} \sqsubseteq (\iota \cap \rho) \circ \mathbb{1}$
Strictness:	$\neg X < X$	$< \cap\, \iota = \emptyset$
Antisym.:	$X \leqslant Y \leqslant X \rightarrow X = Y$	$\leqslant \cap \leqslant^{\smile} \sqsubseteq \iota$

Density: $X \leqslant Y \;\&\; X \neq Y \rightarrow (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y \;\&\; X \neq v \neq Y)$

$$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(v \in X \rightarrow v \in Y)$	$\subseteq \;=_{\mathrm{Def}} \overline{\overline{\in}^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y \,\rho\, X \rightarrow X \,\rho\, Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X \,\rho\, Y \,\rho\, Z \rightarrow X \,\rho\, Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists v \big(X \,\rho\, v \vee v \,\rho\, X \big)$	$(\rho \cup \rho^{\smile}) \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$
Reflexivity:	$X \,\rho\, Y \rightarrow X \,\rho\, X \;\&\; Y \,\rho\, Y$	$\rho \cup \rho^{\smile} \sqsubseteq (\iota \cap \rho) \circ \mathbb{1}$
Strictness:	$\neg X < X$	$< \cap\, \iota = \emptyset$
Antisym.:	$X \leqslant Y \leqslant X \rightarrow X = Y$	$\leqslant \cap \leqslant^{\smile} \sqsubseteq \iota$
Trich'my:	$X < Y \vee X = Y \vee Y < X$	$< \cup\, \iota \cup <^{\smile} = \mathbb{1}$

Density: $X \leqslant Y \;\&\; X \neq Y \rightarrow (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y \;\&\; X \neq v \neq Y)$

$$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \forall v\,(v \in X \to v \in Y)$	$\subseteq \;=_{\mathrm{Def}}\; \overline{\in^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y \rho X \to X \rho Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X \rho Y \rho Z \to X \rho Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists v \big(X \rho v \vee v \rho X \big)$	$(\rho \cup \rho^{\smile}) \circ \mathbb{1} = \mathbb{1}$
Reflexivity:	$X \rho Y \to X \rho X \;\&\; Y \rho Y$	$\rho \cup \rho^{\smile} \sqsubseteq (\iota \cap \rho) \circ \mathbb{1}$
Strictness:	$\neg X < X$	$< \cap\, \iota = \emptyset$
Antisym.:	$X \leqslant Y \leqslant X \to X = Y$	$\leqslant \cap \leqslant^{\smile} \sqsubseteq \iota$
Trich'my:	$X < Y \vee X = Y \vee Y < X$	$< \cup\, \iota \cup <^{\smile} = \mathbb{1}$
Acyc'ty:	$\neg X_0 \in X_1 \in \cdots \in X_n \in X_0$	$\in \circ \cdots \circ \in \cap\, \iota = \emptyset$
Density:	$X \leqslant Y \;\&\; X \neq Y \to (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y \;\&\; X \neq v \neq Y)$	$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$

Incl'n:	$X \subseteq Y \leftrightarrow_{\text{Def}} \forall v\,(v \in X \rightarrow v \in Y)$	$\subseteq \;=_{\text{Def}}\; \overline{\in^{\smile} \circ \overline{\in}}$
Symmetry:	$Y \rho X \rightarrow X \rho Y$	$\rho^{\smile} = \rho$
Trans'vity:	$X \rho Y \rho Z \rightarrow X \rho Z$	$\rho \circ \rho \sqsubseteq \rho$
Pervas'ss:	$\exists v \big(X \rho v \vee v \rho X \big)$	$(\rho \cup \rho^{\smile}) \circ 1\!\!1 = 1\!\!1$
Reflexivity:	$X \rho Y \rightarrow X \rho X \;\&\; Y \rho Y$	$\rho \cup \rho^{\smile} \sqsubseteq (\iota \cap \rho) \circ 1\!\!1$
Strictness:	$\neg X < X$	$< \cap\, \iota = \emptyset$
Antisym.:	$X \leqslant Y \leqslant X \rightarrow X = Y$	$\leqslant \cap \leqslant^{\smile} \sqsubseteq \iota$
Trich'my:	$X < Y \vee X = Y \vee Y < X$	$< \cup\, \iota \cup <^{\smile} = 1\!\!1$
Acyc'ty:	$\neg X_0 \in X_1 \in \cdots \in X_n \in X_0$	$\in \circ \cdots \circ \in \cap\, \iota = \emptyset$
Density:	$X \leqslant Y \;\&\; X \neq Y \rightarrow (\exists v)(X \leqslant v \leqslant Y \;\&\; X \neq v \neq Y)$	
		$\leqslant \setminus \iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ (\leqslant \setminus \iota)$
No ends:	$\exists v \exists w (v \leqslant X \leqslant w \;\&\; v \neq X \neq w)$	
		$\iota \sqsubseteq (\leqslant \setminus \iota) \circ 1\!\!1 \circ (\leqslant \setminus \iota)^{\smile}$

Galois': $\big(\exists z(X \, \mathrm{g} \, z \, \mathrm{g} \, Y \,) \rightarrow X{=}Y\big) \;\&\; (\, X \mathrm{g} Y \rightarrow X \neq Y \,) \;\&\; (\, Y \mathrm{g} X \rightarrow \exists v \, X \mathrm{g} v \,)$

$$\mathrm{g} \circ \mathrm{g} \sqsubseteq \iota \;\&\; \mathrm{g} \cap \iota = \emptyset \;\&\; \mathrm{g}^{\smile} \sqsubseteq \mathrm{g} \circ \mathbb{1}$$

Galois': $\big(\exists z(\,X \mathrel{g} z \mathrel{g} Y\,) \rightarrow X{=}Y\big) \;\&\; (\,X \mathrel{g} Y \rightarrow X \neq Y\,) \;\&\; (\,Y \mathrel{g} X \rightarrow \exists v\; X \mathrel{g} v\,)$

$$g \circ g \sqsubseteq \iota \;\&\; g \cap \iota = \emptyset \;\&\; g^{\smile} \sqsubseteq g \circ 1\!\!1$$

Monot.: $X \leqslant Y \mathrel{g} Z \;\&\; X \mathrel{g} V \;\rightarrow\; V \leqslant Z \qquad \leqslant \circ\, g \cap g \circ \not\leqslant\, = \emptyset$

Galois': $\big(\exists z(X \,\mathrm{g}\, z \,\mathrm{g}\, Y\,) \rightarrow X{=}Y\big)$ & $(\, X \mathrm{g} Y \rightarrow X \neq Y\,)$ & $(\, Y \mathrm{g} X \rightarrow \exists v\, X \mathrm{g} v\,)$

$\mathrm{g} \circ \mathrm{g} \sqsubseteq \iota$ & $\mathrm{g} \cap \iota = \emptyset$ & $\mathrm{g}^{\smile} \sqsubseteq \mathrm{g} \circ \mathbb{1}$

Monot.: $X \leqslant Y \,\mathrm{g}\, Z$ & $X \,\mathrm{g}\, V \;\rightarrow\; V \leqslant Z$ $\quad \leqslant \circ \mathrm{g} \cap \mathrm{g} \circ \nleqslant = \emptyset$

Bisim'n: $\big(Y\, \beta\, X \;\rightarrow\; X\, \beta\, Y\big)$ & $\big(V\, \gamma\, X\, \beta\, Y \;\rightarrow\; (\,\exists\, w\,)(\, w\, \gamma\, Y$ & $V\, \beta\, w\,)\big)$

$\mathbb{1} \circ (\, \beta \setminus \beta^{\smile}\,) \cup (\, \gamma \circ \beta \setminus \beta \circ \gamma\,) = \emptyset$

Galois': $(\exists z(X\,\mathrm{g}\,z\,\mathrm{g}\,Y) \to X{=}Y)\ \&\ (X\mathrm{g}Y \to X{\neq}Y)\ \&\ (Y\mathrm{g}X \to \exists v\, X\mathrm{g}v)$

$$\mathrm{g}\circ\mathrm{g} \sqsubseteq \iota\ \&\ \mathrm{g}\cap\iota = \emptyset\ \&\ \mathrm{g}^{\smile} \sqsubseteq \mathrm{g}\circ \mathbb{1}$$

Monot.: $X \leqslant Y\,\mathrm{g}\,Z\ \&\ X\,\mathrm{g}\,V \to V \leqslant Z$ $\qquad \leqslant \circ\, \mathrm{g} \cap \mathrm{g} \circ \nleqslant\, = \emptyset$

Bisim'n: $(Y\,\beta\,X \to X\,\beta\,Y)\ \&\ (V\,\gamma\,X\,\beta\,Y \to (\exists w)(w\,\gamma\,Y\ \&\ V\,\beta\,w))$

$$\mathbb{1}\circ(\beta\setminus\beta^{\smile}) \cup (\gamma\circ\beta\setminus\beta\circ\gamma) = \emptyset$$

Graph iso'sm: $((X\,\mathrm{g}\,Y\ \&\ X\,\mathrm{g}\,Z) \vee (Y\,\mathrm{g}\,X\ \&\ Z\,\mathrm{g}\,X) \to Y = Z)\ \&$

$$((\exists v)X\,\mathrm{f}\,v \leftrightarrow (\exists w)(X\,\mathrm{r}\,w \vee w\,\mathrm{r}\,X))\ \&$$
$$((\exists v)v\,\mathrm{f}\,Y \leftrightarrow (\exists w)(Y\,\mathrm{s}\,w \vee w\,\mathrm{s}\,Y))\ \&$$
$$(X\,\mathrm{r}\,Z \leftrightarrow (\exists v,w)(X\,\mathrm{g}\,v\,\mathrm{s}\,w\ \&\ Z\,\mathrm{g}\,w))$$

$$\mathrm{g}^{\smile}\circ\mathrm{g} \cup \mathrm{g}\circ\mathrm{f}^{\smile} \sqsubseteq \iota\ \&\ \mathrm{g}\circ\mathbb{1} = (\mathrm{r}\cup\mathrm{r}^{\smile})\circ\mathbb{1}\ \&$$
$$\mathbb{1}\circ\mathrm{g} = \mathbb{1}\circ(\mathrm{s}\cup\mathrm{s}^{\smile})\ \&\ \mathrm{r} = \mathrm{g}\circ\mathrm{s}\circ\mathrm{g}^{\smile}$$

A. Tarski and S. Givant.
A formalization of Set Theory without variables, volume 41 of *Colloquium Publications*.
American Mathematical Society, 1987.

Come stabilire una corrispondenza biunivoca fra i predicati (scritti senza costrutti derivati) e i numeri naturali:

- Richiamare la bijezione $c(\cdot,\cdot)$ di Cantor fra $\mathbb{N}^2$ ed $\mathbb{N}$:

$$2 \cdot c(i,j) \quad = \quad (i+j)^2 + 3 \cdot i + j \ .$$

- Numerare i predicati P_0 , P_1 , P_2 , ... in modo che:

$$\begin{cases} P_1 = \mathbb{1} , & P_{4\,\kappa+3} = P_i \cap P_j , \\ & P_{4\,(\kappa+1)+1} = P_i \triangle P_j , \\ P_2 = \iota , & P_{4\,(\kappa+1)+2} = P_i \circ P_j , \\ P_0 = \in , & P_{4\,(\kappa+1)} = P_\kappa{}^{\smile} , \end{cases}$$

dove: $\kappa = c(i,j)$.

- Codificare l'enunciato mappale $P_i{=}P_j$ tramite il numero $c(i,j)$.
- (Per semplicità ci siamo limitati a una sola lettera mappale: $\in$)

A proposito dell'ultimo assioma logico di $\mathcal{L}^{\times}$

Indichiamo con xSy , dove S è un qualsiasi predicato, il fatto che $\langle x, y\rangle \in S^{\Im}$ in un'interpretazione $\Im$.

Consideriamo una coppia $\langle x, y\rangle$ tale che $xP^{\smile}(R \setminus (P \circ Q))y$ e mostriamo che non può valere xQy.

In effetti, $xP^{\smile} \circ (R \setminus (P \circ Q))y$ vale se e solo se

- c'è uno z tale che zPx e $z(R \setminus (P \circ Q))y$, ossia
- c'è uno z tale che valgano zPx, zRy , mentre $z\overline{P \circ Q}y$.

Ma se questo è il caso, allora è insostenibile che xQy : perché allora $z(P \circ Q)y$ seguirebbe da zPx ed xQy .