SISTEMI DINAMICI

Varietà differenziabili

"Varietà = spazio che localmente assomiglia ad $\mathbb{R}^n$"

Spazio Topologico X

X dotato di $\mathcal{U}$ famiglia di aperti

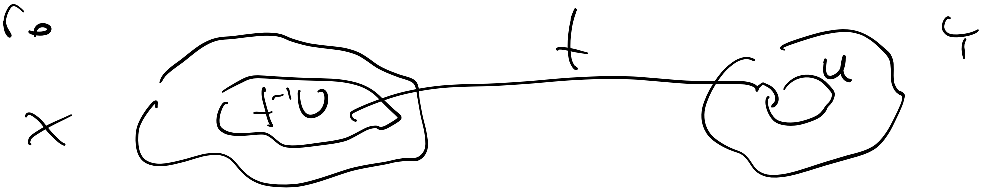
(X, $\emptyset$ sono aperti, $U \cap V$ è aperto

$U_\alpha \subseteq X \longrightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha$ aperto)

Cosa serve? definiamo funzioni continue

$f : X \longrightarrow Y$

se $\forall\ U \subseteq Y$ aperto, anche $f^{-1}U \subseteq X$ è aperto



$X = \bigsqcup_{\alpha} U_\alpha$ $\longrightarrow$ ricoprimento

Una carta è una funzione continua

$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con inversa continua

Nella carta U il nostro spazio "sembra" $\mathbb{R}^n$

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Def: varietà differenziabile n-dim è uno spazio topologico M con carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tali che

$(M = \bigsqcup_\alpha U_\alpha)$

le funzioni di transizione $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ è C^∞ ove definita.

Se ho due osservatori su due

carte diverse

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

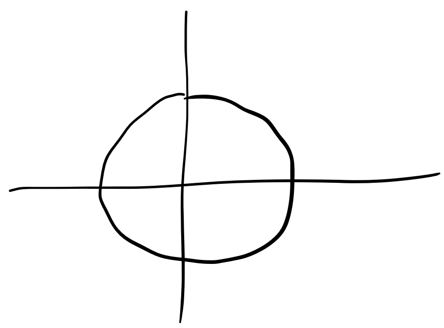
$$\varphi_\beta : U_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

possiamo comparare i loro risultati in

$$V = U_\alpha \cap U_\beta$$

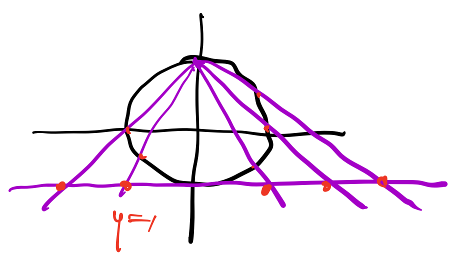
$$f \circ \varphi_\beta^{-1} = (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$$

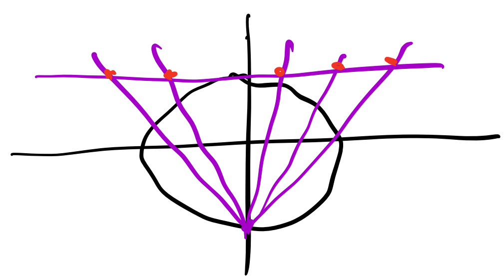
Es) S^1 $\quad x^2 + y^2 = 1$



$$U_1 = S^1 \setminus \{(0,1)\}$$

$$\varphi_1(x,y) = \frac{x}{1-y}$$





$$U_2 = S^1 \setminus \{(0,-1)\}$$

$$\varphi_2(x,y) = \frac{x}{1+y}$$

si può verificare $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(u) = \frac{1}{u}$

Campi vettoriali

$\mathbb{R}^n$: ad ogni punto associo un vettore.

Modo più astratto: un campo vettoriale lo definiamo attraverso la derivata direzionale di una funzione in direzione di v

$$v(f) = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} f = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} f =$$

$$= v^i \partial_i f$$

$$= v^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \dots + v^n \frac{\partial f}{\partial x^n}$$

Prendiamo una varietà M. Consideriamo $C^\infty(M)$: algebra delle funzioni C^∞

su M.

Un campo vettoriale è $v : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

Tale che

$$\left.\begin{aligned} v(f+g) &= v(f) + v(g) \\ v(\alpha g) &= \alpha\, v(g) \qquad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \text{linearità}$$

$$v(fg) = v(f)\,g + f\,v(g) \qquad \text{Leibnitz}$$

L'insieme dei campi vettoriali lo

chiamiamo $\mathrm{Vect}(M)$

Definiamo: $\begin{cases} (v+w)(f) = v(f) + w(f) \\ (gv)(f) = g\,v(f) \end{cases}$

$f, g \in C^\infty(M)$

Osservazione Si può dimostrare

$f, g \in C^\infty(M)$

$v, w \in \mathrm{Vect}(M)$

$$f(v+w) = fv + fw$$

$$(f+g)\,v = fv + gv$$

$$(fg)\,v = f(g(v))$$

$1 \cdot v = v$ $\longrightarrow$ $Vect(M)$ è un modulo su $C^\infty(M)$.

<u>Esempio</u>: $Vect(\mathbb{R}^n)$ è generato da $\{\partial_i\}$, cioè ogni campo vettoriale è una combinazione lineare

$$v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = v^1 \frac{\partial_1}{\partial x^1} + \cdots v^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

~~Adesso~~ possiamo definire <u>vettori tangenti</u>

Un vettore tangente a un punto $p \in M$ dovrebbe darci la derivata direzionale al punto p.

Definiamo: $v_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$

data da $v_p(f) = v(f)(p)$

Le proprietà di cui sopra seguono:

$$v_p(f+g) = v_p(f) + v_p(g)$$
$$v_p(\alpha g) = \alpha\, v_p(g)$$
$$v_p(fg) = v_p(f)\, g(p) + f(p)\, v_p(g)$$

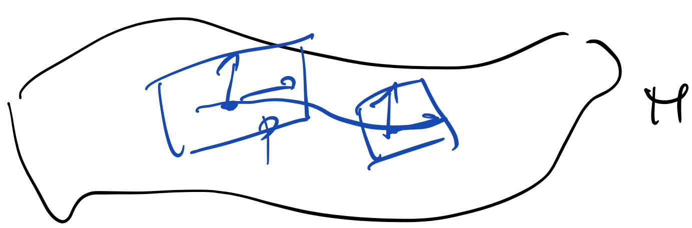
Un vettore tangente a $p \in M$ è una funzione $C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa queste proprietà.

L'insieme di tutti i vettori tangenti a $p \in M$ è detto lo spazio tangente

$T_p M$

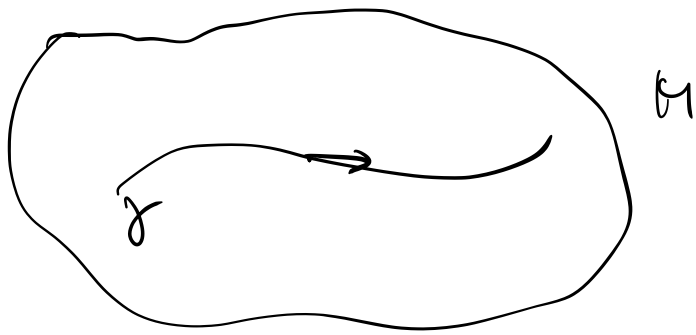
Quindi $\forall\, p \in M$, un campo vettoriale determina un vettore tangente $v_p \in T_p M$

Si può dimostrare che $T_p M$ è uno spazio vettoriale.



Guardiamo le curve:

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$$



il vettore tangente $\gamma'(\tau)$ (o $\frac{df}{d\tau}$)

è un vettore in $T_{\gamma(\tau)}M$

ed $f \in C^\infty(M)$ associa

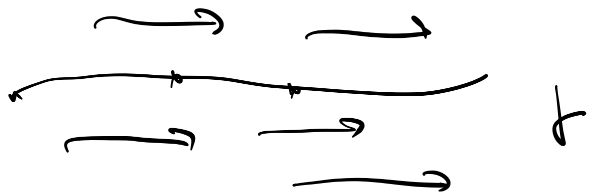
$$\frac{d}{d\tau} f(\gamma(\tau))$$

← è quel vettore che deriva le funzioni nella direzione in cui $\gamma(\tau)$ si muove nel tempo t

$$\gamma : \underset{t}{\mathbb{R}} \longrightarrow M \qquad f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{d\tau} f(\gamma(t)) = \frac{d}{d\tau} f\left(x^1(\tau), \dots, x^n(\tau)\right)$$

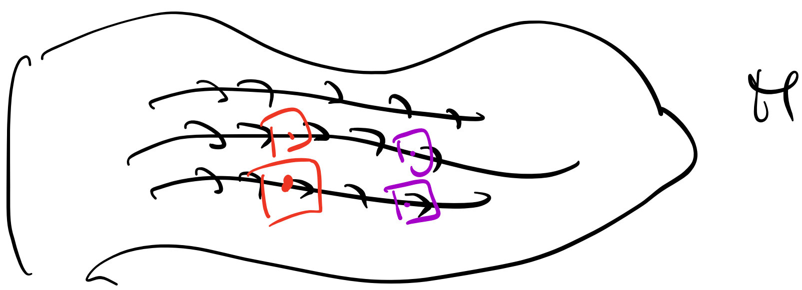
$$= \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{d x^i(\tau)}{d\tau} = \underbrace{\frac{d x^i(\tau)}{d\tau}}_{v^i} \frac{\partial}{\partial x^i} f$$



$$\boxed{\frac{d\gamma}{d\tau} = v_{\gamma(\tau)}}$$

Se la curva "inizia" a $p \in M$ (cioè $\gamma(0) = p$) la chiamiamo curva integrale di v attraverso p

Se pensiamo di seguire tutte le particelle insieme $\to$ abbiamo un flusso



Flusso vs. campo vettoriale

$U \subset \mathbb{R}^n$

Def: un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi è la mappa differenziabile

$$\varphi : \mathbb{R} \times U \longrightarrow U$$
$$(t, x) \longrightarrow \varphi_t(x)$$

t.c. con t fissato, φ_t è diff.

tale che

$$\varphi_0(x) = x$$
$$\varphi_{s+t}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_t(\varphi_s(x))$$

Un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi definisce un campo vettoriale:

se fissiamo x, allora

$$t \longmapsto \varphi_t(x)$$

è una curva in U

Il vettore tangente a questa curva a $\tau = 0$ è $v(x)$, la velocità:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$v^i(x) = \frac{d}{d\tau} \varphi^i_\tau(x) \Big|_{\tau=0}$$

Viceversa, ogni campo vettoriale v genera φ (gruppo ad un parametro di diffeomorfismi), come la soluzione dell'ODE

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} \varphi^i_\tau(x) = v^i(\varphi_\tau(x))}$$

$$\updownarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} x(\tau) = f(x(\tau))}$$

$\varphi_\tau(x)$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau} x^1 = \underline{f_1}(x(\tau)) \\ \dfrac{d}{d\tau} x^2 = \underline{f_2}(x(\tau)) \end{cases}$$