

TEOREMA ESISTENZA & UNICITA'

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

eq. diff. del 2° ordine

può essere portata nella forma di un sistema di eq. diff. del 1° ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases}$$

$$\downarrow$$
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ f(x, v, t) \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad \bar{f}(\bar{x}, t) = \begin{pmatrix} v \\ f(x, v, t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t)$$

(*)

Eq. diff. del 1° ord
nell'incognita $\bar{x}(t)$

\downarrow
Vali il

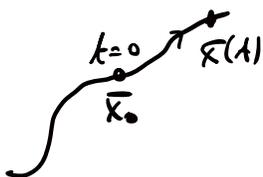
TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITA'

Prop. Se $\bar{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è localm. Lipschitziana \otimes

in un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, allora $\forall \bar{x}_0 \in U$

\exists intervallo $(-\tau, \tau)$ e un'UNICA SOLUZIONE $\bar{x}(t)$
dell'eq. (*) definita $\forall t \in (-\tau, \tau)$ t.c.

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (\text{condizione iniziale})$$

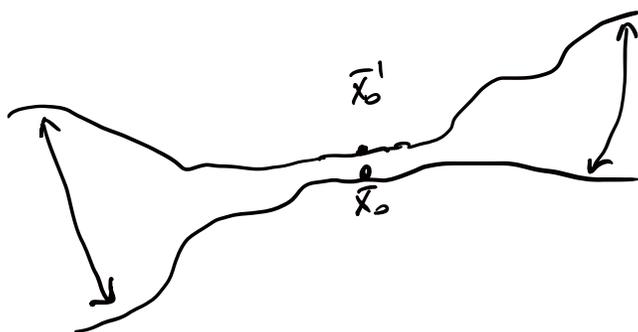


Se cambiamo \bar{x}_0 , cambia la soluzione

$$\bar{x}(t; \bar{x}_0)$$

↑
parametro della funzione $\bar{x}(t)$ che risolve
l'eq. (*) con condiz. iniz. \bar{x}_0 .

↓
La soluzione dipende con regolarità del dato iniziale
(e da eventuali parametri presenti in \bar{f})



In effetti vale la relazione

$$\|\bar{x}(t, \bar{x}'_0) - \bar{x}(t, \bar{x}_0)\| < C \|\bar{x}'_0 - \bar{x}_0\| e^{\lambda|t|}$$

$\lambda > 0$

Esempio: repulsore armonico



⊕ \bar{f} è localm. Lipschitziana se $\exists \lambda > 0$ t.c. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in U$
con $\|\bar{x} - \bar{y}\|$ suff. piccolo, si ha $\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})\| \leq \lambda \|\bar{x} - \bar{y}\|$.

Condiz. suff: \bar{f} di classe C^1 .

Es. \bar{f} non-lip.: \sqrt{x} attorno all'origine. Per $x_0 = 0$ si

ha due unicite: $x(t) = 0$ e $x(t) = \frac{t^2}{4}$ sono soluz. di $\dot{x} = \sqrt{x}$ con $x(0) = 0$.

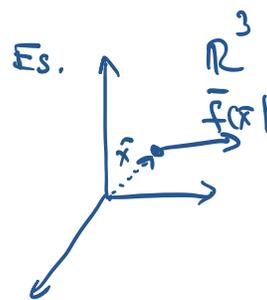
SISTEMA AUTONOMO

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t), \cancel{t})$$

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

↑
campo VETTORIALE



$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) (*) \leftarrow \text{ sistema autonomo}$$

→ per sistemi autonomi, abbiamo INVARIANZA PER TRASLAZIONI TEMPORALI, cioè

se $\bar{x}(t)$ è soluzione di $(*)$, anche

$$\bar{x}'(t) \equiv \bar{x}(t - t_0) \text{ è soluz. di } (*)$$

↓
Es. $\dot{x} = x \rightarrow$ una soluz. è $x(t) = e^t$, ma anche e^{t-t_0} è soluzione $\forall t_0$

Dim. Prendiamo $\bar{x}(t)$ soluz. di $(*)$, cioè $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t))$;
allora $\dot{\bar{x}}'(t) = \frac{d}{dt} \bar{x}'(t) = \frac{d}{dt} \bar{x}(t - t_0) = \dot{\bar{x}}(t - t_0) = \bar{f}(\bar{x}(t - t_0)) = \bar{f}(\bar{x}'(t))$ // $\bar{x}(\tilde{t})$ è soluz.

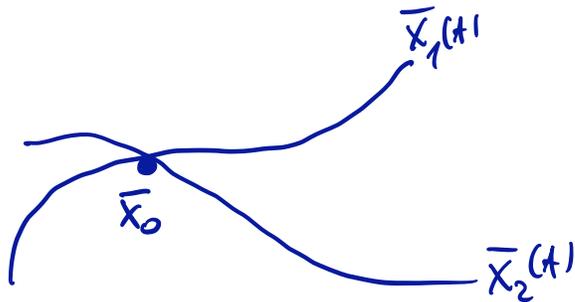
⇒ Traiettorie (*) delle soluzioni di $(*)$ non si intersecano mai!

(*) Traiettorie è l'immagine dello fucrt. $\bar{x}(t)$ in \mathbb{R}^n



Dim. Assumiamo per assurdo che ci siano due soluzioni

$\bar{x}_1(t)$ e $\bar{x}_2(t)$ le cui traiettorie si intersecano



$$\bar{x}_1(0) = \bar{x}_0$$

$$\bar{x}_2(t_0) = \bar{x}_0$$

Ma \downarrow se questo fosse possibile, allora esisterebbe una terza solut.

$$\bar{x}_3(t) \equiv \bar{x}_2(t+t_0) \text{ t.c. } \bar{x}_3(0) = \bar{x}_0$$

cioè esisterebbero due solut., $\bar{x}_1(t)$ e $\bar{x}_3(t)$ con lo stesso dato iniziale a $t=0$, violando il teorema di esistenza e UNICITA'. //

CASO MECCANICO (autonomo)

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \cancel{t}) \rightsquigarrow \ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (*)$$

Passiamo al "piano di fase", cioè lo spazio con coordinate $\bar{x} = (x, v)$

$$(*) \text{ equiv. a } \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad \text{dove} \quad \bar{f}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ f(x, v) \end{pmatrix}$$

Dato il dato iniziale $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, c'è un'unica soluzione che passa per \bar{x}_0 al tempo $t=0$. Le soluzioni dipendono dai parametri x_0 e v_0 .

ES. osc. armonico

$$\text{solut. e } x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$v(t) = -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_0 &= x(0) = a \\ v_0 &= v(0) = b\omega \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= x_0 \\ b &= \frac{v_0}{\omega} \end{aligned}$$

$$\bar{x}(t; \bar{x}_0) = \begin{pmatrix} x(t; x_0, v_0) \\ v(t; x_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega x_0 \sin \omega t + v_0 \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Scelti x_0 e v_0 , la soluzione è determinata.

FLUSSO DEL CAMPO VETTORIALE

Dato l'eq. diff. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (*)$ $\bar{x}(t)$ a valori in \mathbb{R}^n

$\forall \bar{x}_0, \exists!$ solut. $\bar{x}(t; \bar{x}_0) \quad (o)$

- Fissato \bar{x}_0 , la solut. (o) descrive una curva in \mathbb{R}^n

- Fissato t , $\bar{x}(t; \bar{x}_0)$ è una funzione in \bar{x}_0 ,
cioè descrive una mappa

$$\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\bar{x}_0 \mapsto \varphi^t(\bar{x}_0) = \bar{x}(t; \bar{x}_0) \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{solut. di } (*) \\ \end{array}$$

t è un parametro della mappa

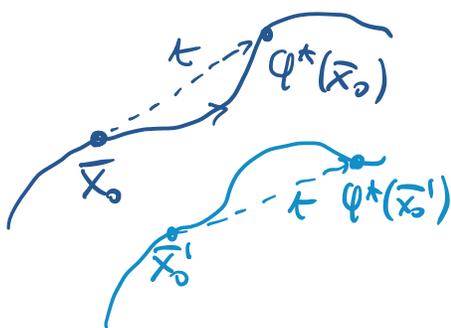
$$\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$



Al variare di t si ha

una FAMIGLIA a un parametro

di AUTOMORFISMI $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$



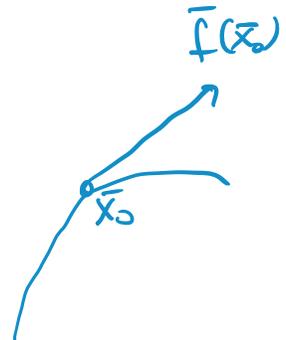
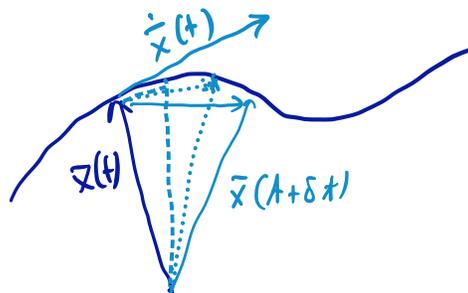
la famiglia $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ si dice il **FLUSSO**

relativo al campo vettoriale \bar{f} .

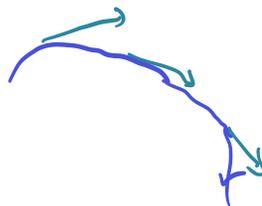
[$\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un GRUPPO
Id : φ^0 Inverso : φ^{-t} Comp. : $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$]

$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ \Rightarrow curva $\bar{x}(t)$ che passa per \bar{x}_0
deve essere tangente al vettore $\bar{f}(\bar{x}_0)$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{x}(t+\delta t) - \bar{x}(t)}{\delta t}$$



"Linee di forza"



SOLUZIONI DI EQUILIBRIO

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (*) \quad \leftarrow \quad \dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t)) \quad \text{vero } \forall t$$

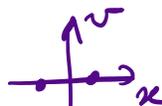
Delle soluzioni particolari sono FUNZIONI COSTANTI

$$\bar{x}(t) = \bar{c} \quad \bar{c} \in \mathbb{R}^n \quad \text{con } \bar{c} \text{ t.c. } \bar{f}(\bar{c}) = 0$$

\uparrow
 cost. indep. da t

Tali solut. particolari sono dette "punti di EQUILIBRIO"
 le cui traiettorie sono pti.

Prop. I PUNTI DI EQUIL. dell'eq. (*) sono tutti e soli
 i pti dove $\bar{f}(\bar{x})$ si azzerava. ("pti singolari" del
 camp. vettoriale)

Corollario. Nel sistema meccanico $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, $\bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x, v) \end{pmatrix}$
 i pti singolari o di equilibrio sono del tipo 
 $\bar{c} = (c, 0)$ con $f(c, 0) = 0$ \leftarrow Nel piano di fase i pti
 di equil. giacciono sull'asse
 delle x

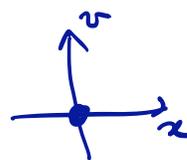
Dim. Pti equil. sono gli zeri di $\bar{f}(x, v)$, cioè solut.
 di equaz. $\begin{cases} f_1(x, v) = 0 \\ f_2(x, v) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v = 0 \\ f(x, 0) = 0 \end{cases}$

(Nei pti di equil. $(c, 0)$ la risultante delle forze si annulla.)

ES. PARTICELLA LIBERA $\ddot{x} = 0$ f è identicam. nulla
 e quindi i pti di equil. sono $(c, 0) \forall c \in \mathbb{R}$ 

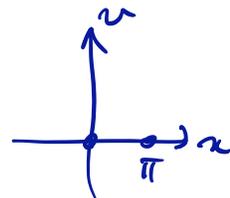
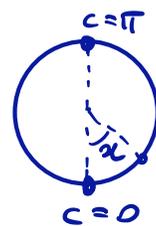
ES. OSCILL. ARN. $f(x,v) = -\omega^2 x$

→ pt' equil. $c=0$



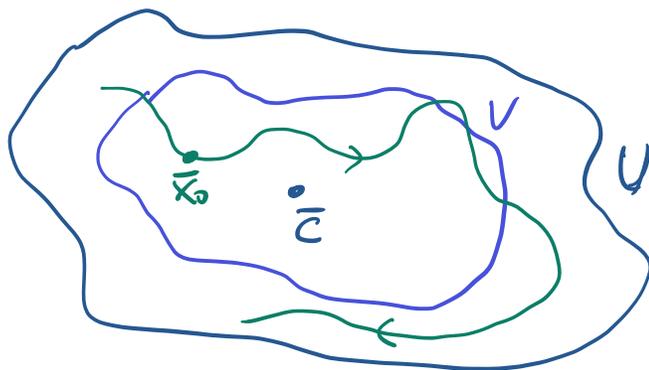
ES. PENDOLO $f(x,v) = -\sin x$ ($\omega=1$)

→ pt' equil. $c=0, \pi$



Attorno ai pt' di equilibrio possiamo avere informazioni APPROSSIMATE sulle solut., anche in sistemi complicati.

Def. Un pto di equil. \bar{c} di $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ ($\bar{f}(\bar{c}) = 0$) si dice STABILE (o stab. nel futuro, o stab. nel passato) se \forall intorno U di \bar{c} , \exists intorno V di \bar{c} , t.c. ogni movimento $\bar{x}(t; \bar{x}_0)$ con $\bar{x}_0 \in V$ resta in U $\forall t$ ($t > 0$, $t < 0$)



($c=0$ è stab. nel futuro;
 $c=\pi$ non è stab.)

Def. \bar{c} è INSTABILE se non è stabile.

Def. \bar{c} è ASINTOTICAM. STAB.

in tempi positivi (negativi)

quando

a) \bar{c} è stab. per $t \geq 0$ ($t \leq 0$) e

b) $\exists B$ intorno di \bar{c} (BACINO DI ATTRAZIONE) t.c.

$\forall \bar{x}_0 \in B$ $\bar{x}(t; \bar{x}_0) \rightarrow \bar{c}$ in $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$)

