COSTANTE DEL MOTO (INTEGRALE PRIMO, INVARIANTE DEL MOTO)

Def. Una funzione $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice COSTANTE DEL MOTO per l'equazione $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$

se $I(\bar{x}(t;\bar{x}_0)) = I(\bar{x}_0)$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{dI(\bar{x}(t;\bar{x}_0))}{dt} = 0$

$\forall t$ e $\forall$ soluzione $\bar{x}(t;\bar{x}_0)$ dell'eq. $(*)$

è la funz. composta $I \circ \bar{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto I(\bar{x}(t))$$

ES. OSC. ARM.

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$
$$v(t) = -x_0\omega\sin\omega t + v_0\cos\omega t$$

$\leftarrow$ soluz. di $(*)$

$$I(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

$\leftarrow$ funz. $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,v) \mapsto I(x,v)$

Verifichiamo che I soddisfi la def. per essere una cost. del moto:

$$I(x(t),v(t)) = \frac{1}{2}\left(x_0^2\omega^2\sin^2\omega t - \cancel{2x_0v_0\omega\sin\omega t\cos\omega t} + v_0^2\cos^2\omega t\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\omega^2\left(x_0^2\cos^2\omega t + \cancel{2\frac{x_0v_0}{\omega}\cos\omega t\sin\omega t} + \frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2\omega t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 x_0^2 + \frac{1}{2}v_0^2 = I(x_0,v_0)$$

Consideriamo una funzione

$$I : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$$

Scriviamo la seguente eq

$$I(\bar{x}) = \varrho \qquad \text{dove } \varrho \text{ cost. reale} \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^\ell$$

$\downarrow$

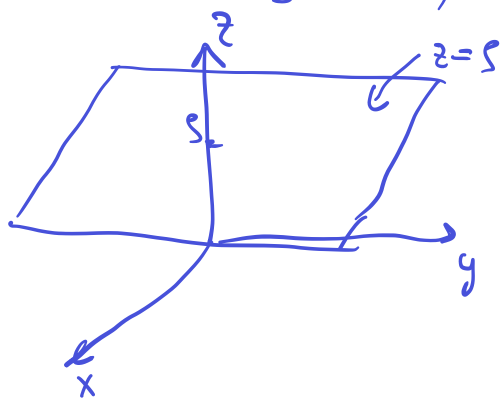
Le soluz. di questa eq. appartengono a un SOTTOINSIEME di $\mathbb{R}^\ell$ $\rightsquigarrow$ un' IPERSUPERFICE

ES. $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ e $I(\bar{x}) \equiv x^2 + y^2 + z^2$

eq. $I(\bar{x}) = R^2 \rightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \rightsquigarrow$ SFERA

ES. $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ e $I(\bar{x}) = z$

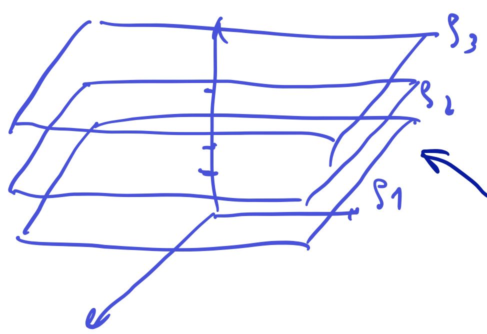
eq. $I(\bar{x}) = \varrho \rightsquigarrow z = \varrho$



Al variare del parametro ϱ, ho una FAMIGLIA di IPERSUPERFICI (disgiunte) che costituisce una FOLIAZIONE (stratificazione) di $\mathbb{R}^\ell$

l'unione di tutte le ipersuperfici è $\mathbb{R}^\ell$ stesso.

ES)



$I(\bar{x}) \equiv z$

"insiemi di livello"

Sia I una COSTANTE del MOTO per l'eq. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$

cioè una funz. $I : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ con

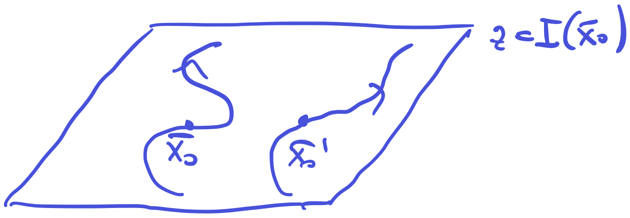
$I(\bar{x}(t)) = I(\bar{x}_0)$ ovvero $\frac{d}{dt} I(\bar{x}(t)) = 0$

$\forall t$ e $\forall \bar{x}(t)$ soluz. di $(*)$

$\Rightarrow$ Tutti i pti di una traiettoria che risolve $(*)$ giacciono su un'ipersuperficie, in qto caso

$$I(\bar{x}) = I(\bar{x}_0)$$

ES) Immaginiamo che $I(\bar{x}) = z$ sia cost. del moto per $(*)$



$\to$ le traiettorie giacciono su un piano (parallelo al piano xy) $\Rightarrow$ si può ridurre il problema da tridimensionale a un probl. piano.

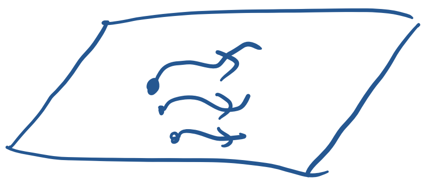
$\Rightarrow$ le cost. del moto permettono di ridurre il problema originario (cioè risolvere $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ in $\mathbb{R}^l$) a un problema con un MINOR NUMERO di VARIABILI e di EQ. DIFF.

Servono dei criteri per individuare le cost. del moto prima di risolvere le eq. $(*)$.

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^\ell$ si dice INVARIANTE per l'eq. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ se il suo evoluto $\varphi^t(A)$ coincide con A $\forall t$

Se $\exists$ cost. del moto I, allora l'ipersuperf. $I(\bar{x}) = \rho$ è un insieme invariante

ES.



$\forall \bar{x} \in A \quad \varphi^t(\bar{x}) \in A$

ES.) osc. ARM. $\mathbb{R}^\ell \equiv \mathbb{R}^2$ con coor. (x, v)

$\omega = 1$, $m = 1$

$x(t) = x_0 \cos t + v_0 \sin t$

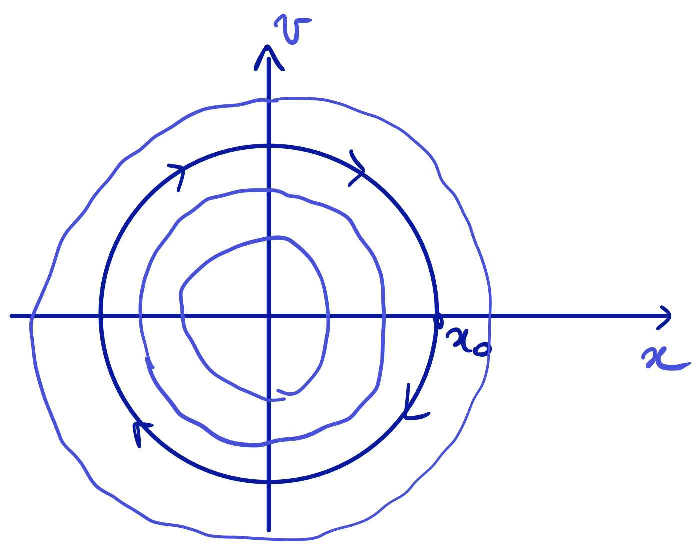
$v(t) = -x_0 \sin t + v_0 \cos t$

Prendiamo come dato iniz. $(x_0, 0)$ (cioè $v_0 = 0$)

$x(t) = x_0 \cos t$

$v(t) = -x_0 \sin t$

descrizione parametrica di una circonf. di raggio x_0



Cost. del moto $I(x,v) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} x^2$

Insiemi di livello sono $I(x,v) = I(x_0, v_0)$

cioè le "sup." $v^2 + x^2 = x_0^2$

ES. DI COST. del MOTO :

ENERGIA in sist. meccanici a 1 grado di libertà, autonomi e con forze puramente posizionali.

$$f(x,v) = f(x) \qquad\qquad f = \frac{F}{m}$$

$$\Downarrow$$

$\exists$ una primitiva di F $\quad (\ \bar{F} = -\bar{\nabla} V \ )$

$\exists V(x)$ t.c. $F = -V'$ $\qquad \frac{\partial E}{\partial x} = V'(x)$ $\qquad \frac{\partial E}{\partial v} = mv$ $\qquad \ddot{x} = f(x)$

$$E(x,v) = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{V(x)}_{\text{en. potenziale}} \qquad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} \ (*)$$

è una cost. del moto

Dim. (solut. di eq. del moto)

$$\frac{d}{dt} E(x(t), v(t)) =$$

$$= \frac{\partial E}{\partial x}(x(t),v(t))\,\dot{x}(t) + \frac{\partial E}{\partial v}(x(t),v(t))\,\dot{v}(t)$$

$x(t), v(t)$ è solut. di $(*)$

$$= \frac{\partial E}{\partial x}(\dots)v(t) + \frac{\partial E}{\partial v}(\dots) f(x(t))$$

$$= V'(x(t))\,v(t) + m v(t) f(x(t)) \qquad mf = F, \quad V' = -F$$

$$= -F(x(t))\,v(t) + v(t)F(x(t)) = 0 \quad //$$

DERIVATA DI LIE

Data una funzione $G : \mathbb{R}^{\ell} \to \mathbb{R}$ (detta VARIABILE DINAMICA), consideriamo la derivata totale di G lungo una traiettoria $\bar{x}(t)$ che soddisfa $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$

$$\frac{d}{dt} G(\bar{x}(t)) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{x}(t)) \cdot \dot{x}_i(t)$$

soluz. di $(*)$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{x}(t)) \cdot f_i(\bar{x}(t)) \quad \leftarrow \bar{\nabla} G \cdot \bar{f} \quad (dG[\bar{f}])$$

È significativo introdurre una nuova variabile dinamica

$L_{\bar{f}} G : \mathbb{R}^{\ell} \to \mathbb{R}$ detta DERIVATA DI LIE di G rispetto al campo vett. $\bar{f}$

def. da

$$(L_{\bar{f}} G)(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{\ell} f_i(\bar{x}) \frac{\partial G(\bar{x})}{\partial x_i}$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} G(\underset{\text{solut. di } (*)}{\bar{x}(t)}) = (L_{\bar{f}} G)(\bar{x}(t))$$

Prop. $G : \mathbb{R}^{\ell} \to \mathbb{R}$ è una COST. del MOTO per $(*)$ $\iff$ $L_{\bar{f}} G = 0$

Dim

$(\Leftarrow)$: $\frac{d}{dt} G(\underset{\text{solut. di } (*)}{\bar{x}(t)}) = \underset{0}{(L_{\bar{f}} G)}(\bar{x}(t)) = 0$ //

$(\Rightarrow)$: $\forall \bar{x}_0$ $\exists!$ solut. $\bar{x}(t)$ che passa per esso:

$\forall \bar{x}_0$ $\quad L_{\bar{f}} G(\bar{x}_0) = L_{\bar{f}} G(\bar{x}(t_0)) = 0$ //

STUDIO ATTORNO AI PTI di EQUIL.

Linearizzazione : studio locale attorno al pto di equil., nel quale si approssima il sistema non-lineare ("difficile") con un sistema lineare ("facile")

Sistema lineare in $\mathbb{R}^l$ è un sist. di eq. diff. lineari del tipo $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$ $\quad$ $\bar{x}$ a valori in $\mathbb{R}^l$ e A una matrice $l \times l$

Partiamo da un sistema autonomo

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \qquad \bar{x} \text{ in } \mathbb{R}^l \qquad \bar{f} : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$$

t.c. $\bar{f}$ ha un pto singolare (pto equil.) in $\bar{c}$ $(\bar{f}(\bar{c})=0)$

Siccome vogliamo studiare le soluz. $\bar{x}(t)$, quando passano per più vicini a $\bar{c}$, ci interessa il comportamento di $\bar{f}$ attorno a $\bar{c}$, cioè per $\|\bar{x}-\bar{c}\| \ll 1$

$\rightsquigarrow$ esp. di Taylor attorno a $\bar{c}$

$$f_i(\bar{x}) = \underbrace{\cancel{f_1(\bar{c})}}_{=0} + \sum_{j=1}^{\ell} \underbrace{\frac{\partial f_i(\bar{c})}{\partial x_j}}_{\equiv A_{ij}} (x_j - c_j) + O(\|\bar{x}-\bar{c}\|^2)$$

Attorno a $\bar{c}$ la funz. $\bar{f}$ è ben approssimata da

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) = A \cdot (\bar{x}-\bar{c}) + \dots \qquad \text{con} \qquad A_{ij} = \frac{\partial f_i(\bar{c})}{\partial x_j}$$

Def. $\bar{\xi} = \bar{x} - \bar{c}$

$\bar{\xi}(t) = \bar{x}(t) - \bar{c}$ soddisfa eq. lineare

$$\dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{x}} = A \cdot (\bar{x}-\bar{c}) + O(\|\bar{x}-\bar{c}\|^2) = A \cdot \bar{\xi} + O(\|\bar{\xi}\|^2)$$

$\downarrow$

$$\dot{\bar{\xi}} = A \cdot \bar{\xi} + \underbrace{O(\|\bar{\xi}\|^2)}_{\text{trascuriamo}}$$

$\Leftarrow$ eq. lineare che approssima bene $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ per $\|\bar{x}-\bar{c}\| \ll 1$

(risolto, otteniamo $\bar{\xi}(t) \Rightarrow \bar{x}(t) = \bar{\xi}(t) + \bar{c}$).

Se il sist. autonomo viene da

$$\ddot{x} = f(x) \qquad \bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x) \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(c) & 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{\bar{\xi}} = A\,\bar{\xi}$ $\leftarrow$ sistema di eq. diff. LINEARE del 1° ordine, OMOGENEA
$(*)$
$\Downarrow$
soluzione generale sarà combinaz. lineare
di ℓ soluz. particolari indipendenti

Cerchiamo soluz. particolari della forma
$$\bar{\xi}(t) = \rho(t)\cdot\bar{u} \qquad \bar{u}\in\mathbb{R}^{\ell} \text{ vett. cost.} \qquad (\maltese)$$

- ci interessano soluz. non-banali $\Rightarrow$ $\bar{\xi}(t)$ non si annulla mai.

($\exists$ soluz. t.c. $\bar{\xi}(t_0)=0$ e questa è la soluz. $\bar{\xi}(t)=0$ $\forall t$ $\Rightarrow$ le altre traiettorie non possono passare per $\bar{\xi}=0$)

- sostituiamo $(\maltese)$ in $(*)$:

$$\underline{\underline{\dot{\rho}(t)\cdot\bar{u}}} = A\left(\rho(t)\cdot\bar{u}\right) = \underline{\underline{\rho(t)\,A\bar{u}}}$$

l'uguaglianza è possibile solo se $\bar{u}$ e $A\bar{u}$ sono vett. paralleli $\rightsquigarrow$ $\exists\,\alpha\in\mathbb{R}$ t.c. $\boxed{A\bar{u}=\alpha\,\bar{u}}$ $(\circ)$

- $\dot{\rho}(t) = \alpha\,\rho(t) \Rightarrow \rho(t) = c\,e^{\alpha t}$ $\quad c=\rho(0)$

- $(\circ)$ ci dice che $\bar{u}$ è un AUTOVETT. di A con AUTOVAL. α.

Prop. Eq. lin. $\dot{\bar{\xi}} = A\bar{\xi}$ ha soluz. particolari
$$\bar{\xi}(t) = C e^{\alpha t} \cdot \bar{u}$$
dove $\bar{u}$ è autov. di A con autoval. α.

Per risolvere $(*!)$ uno deve diagonalizzare A.

Se $\exists$ una base di autovettori (A diagonalizzabile) allora posso scrivere la soluz. generale come
$$\bar{\xi}(t) = \sum_{j=1}^{\ell} C_j \, e^{\alpha_j t} \, \bar{u}_j$$
autoval. autovett.

ASIDE: tornarci dopo aver studiato sist. Lagrangiani

Sist. Lagrangiano $L = \frac{1}{2}\dot{\bar{x}} \cdot A\dot{\bar{x}} - \frac{1}{2}\bar{x} \cdot B\bar{x}$

eq: $A\ddot{\bar{x}} = -B\bar{x}$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} A\dot{\bar{v}} = -B\bar{x} \\ \dot{\bar{x}} = \bar{v} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v} \\ -A^{-1}B\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -A^{-1}B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$$

Soluz. generale:

- autovalori $0 = \det\begin{pmatrix} \lambda\mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ A^{-1}B & \lambda\mathbb{1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ A^{-1}B + \lambda^2\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$

$$= \det A^{-1} \det(B + \lambda^2 A)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -A^{-1}B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

$$\bar{w} = \lambda\bar{u}$$

$$-A^{-1}B\bar{u} = \lambda\bar{w} \quad \Rightarrow \begin{cases} B\bar{u} = -\lambda^2 A\bar{u} \\ \bar{w} = \lambda\bar{u} \rightarrow \end{cases}$$

Inoltre se A e B sono def. pos. l'eq. $\det(B + \lambda^2 A) = 0$ ha solut. sol. se $\lambda^2 < 0$ cioè λ immaginario $\lambda = \pm i\omega \leftarrow$ in coppie perché matrici reali

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\left[C_j e^{i\omega_j}\begin{pmatrix} \bar{u}_j \\ i\omega_j\bar{u}_j \end{pmatrix} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solut. reali}}}{C_j^*} e^{-i\omega_j}\begin{pmatrix} \bar{u}_j \\ -i\omega_j\bar{u}_j \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} u_j \\ i\omega_j u_j \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} u_j \\ -i\omega_j u_j \end{pmatrix}$$

due soluz. indip. relative a un λ^2

$$\Downarrow$$

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{i\omega_j t}\bar{u}_j + \sum_j C_j^* e^{-i\omega_j t}\bar{u}_j$$

$$\bar{v} = \sum_{j=1}^{n} C_j i\omega_j e^{i\omega_j t}\bar{u}_j + \sum_j C_j^*(-i\omega_j)e^{-i\omega_j t}\bar{u}_j$$