

# SISTEMI DINAMICI

$$\frac{dx}{dt} = \underline{f(x)}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R}^n \\ M$$

$$\varphi_T(x)$$

→ SISTEMI DINAMICI 1-DIM.

$$\frac{d x(t)}{dt} = f(x(t))$$

$$\dot{x} = f(x)$$

$$x = x(t)$$

funzione di una variabile  
reale, a valori in  $\mathbb{R}$

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$I$  può essere  $\mathbb{R}$   
 $f$  liscia ( $C^\infty(\mathbb{R})$ )

Esempio:  $\dot{x} = \sin x$

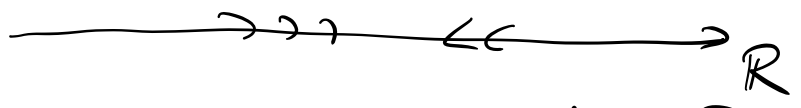
→ separazione di variabili  $dt = \frac{dx}{\sin x}$

$$t = \int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{1}{\sin x} + \cot x \right| + C.$$



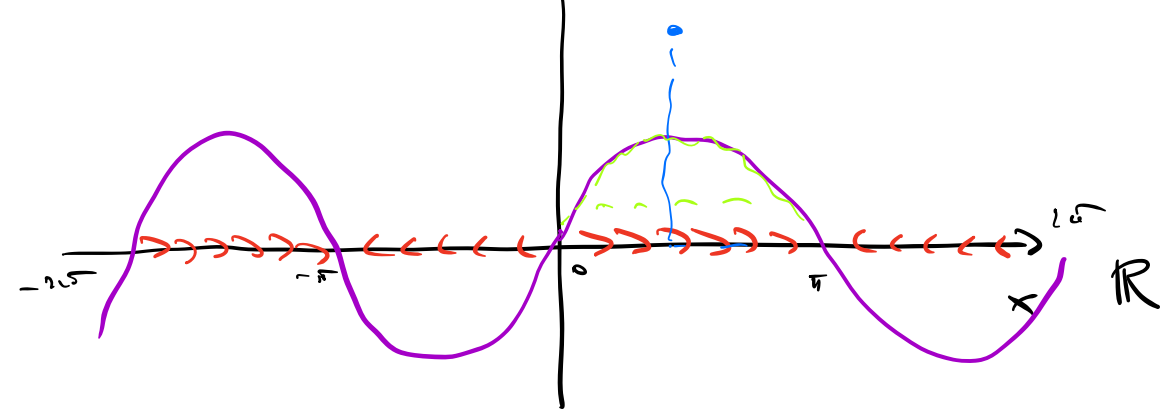
ci chiediamo : andamento di  $x(t)$

1.  $\dot{x} = \sin x$



ad ogni punto  $x$ , associamo il vettore  $\dot{x}$

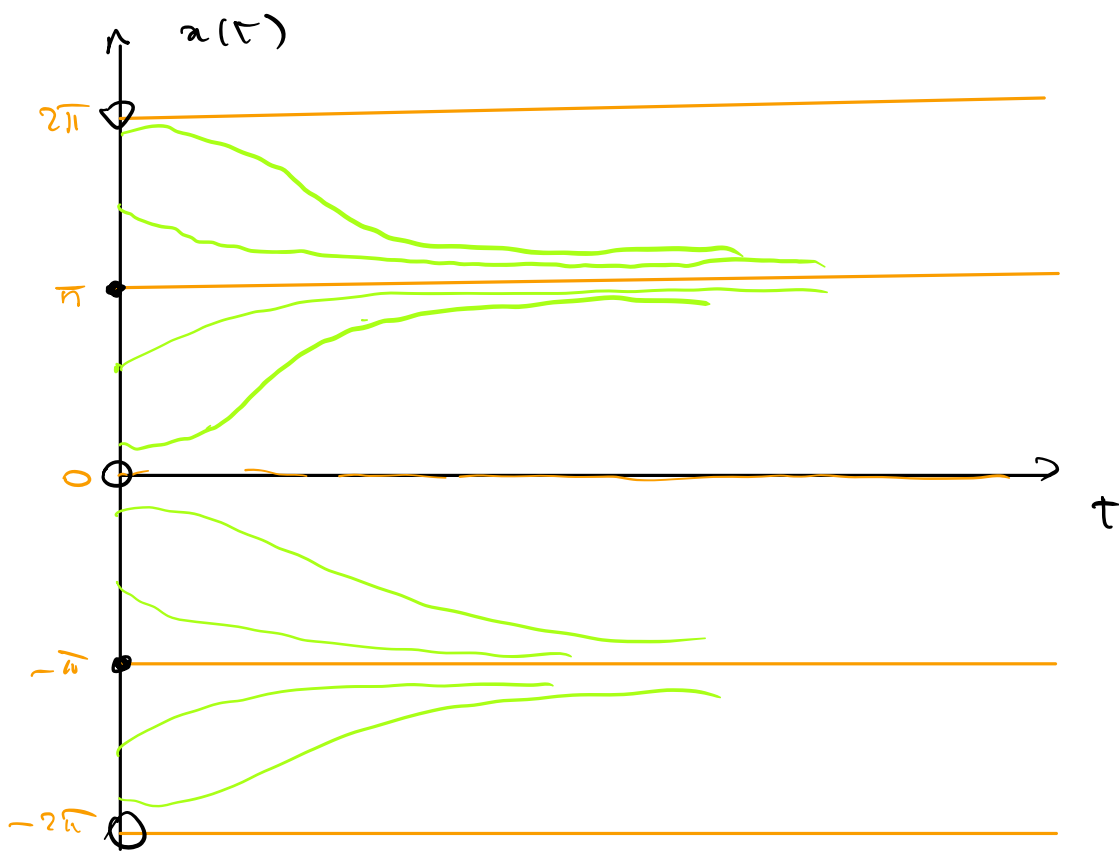
2. integrando questi vettori sull'asse  $x$   $\dot{x} = \sin x$   $x \in \mathbb{R}$



rappresentazione grafica del flusso

Punti  $\dot{x} = 0 \rightarrow$  punti fissi  
o di equilibrio

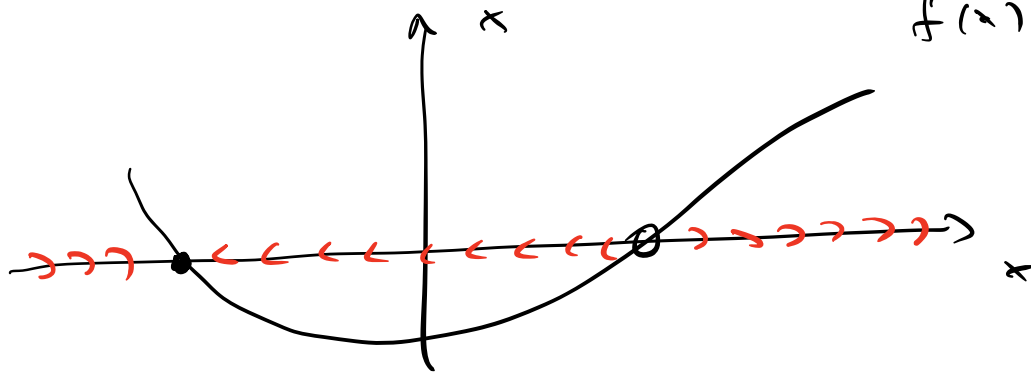
- $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \bullet \leftarrow \leftarrow \leftarrow$  stabile / attrattivo / pozzo
- $\leftarrow \leftarrow \leftarrow \bullet \rightarrow \rightarrow \rightarrow$  instabile / repulsivo / sorgente



Analisi qualitative.

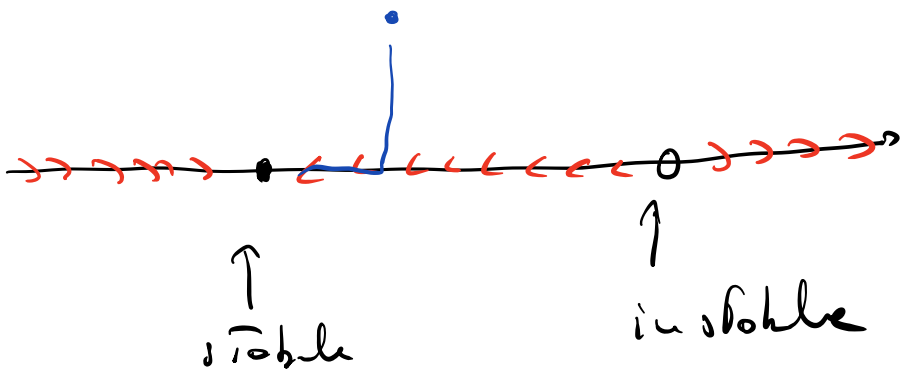
Ritratto di fase (Phase portrait)

Procedura generale  $\dot{x} = f(x)$



Regione delle fasi

$f(x)$  : velocità locale del flusso  
 direzione  $\rightarrow\rightarrow\rightarrow$  se  $f(x) > 0$   
 $\leftarrow\leftarrow\leftarrow$  se  $f(x) < 0$

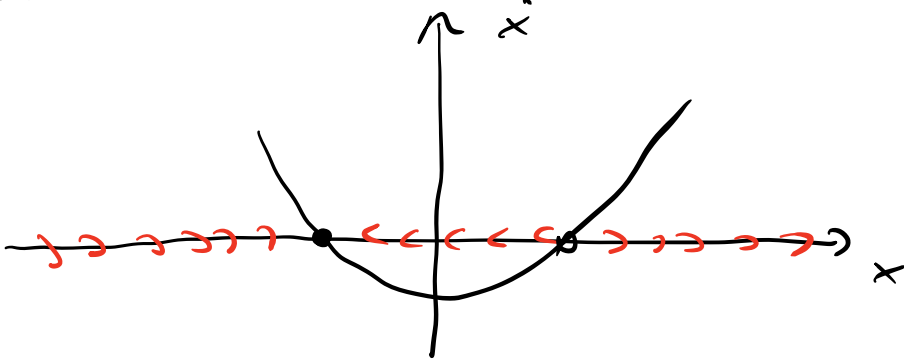


Punto critico  
fisso  
equilibrio

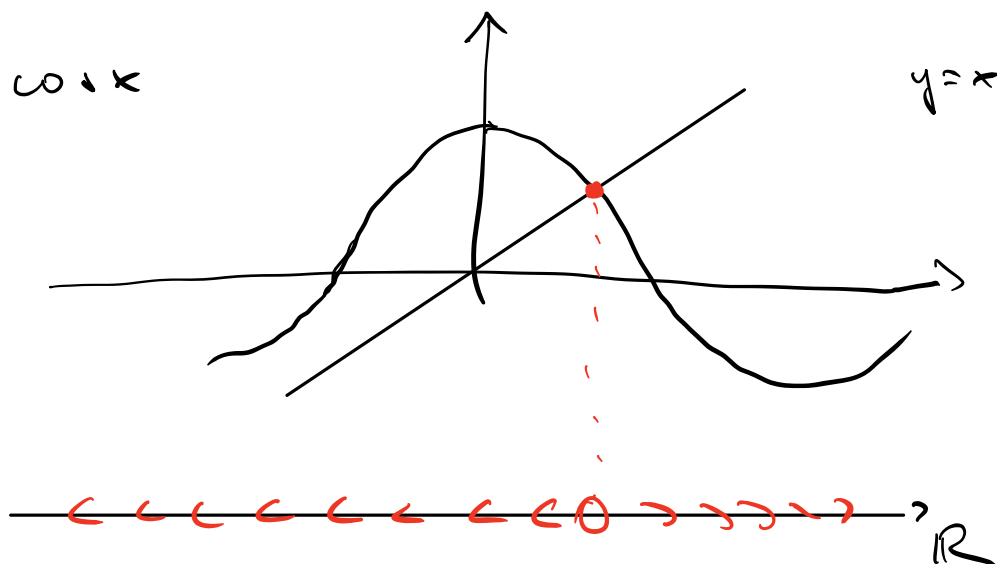
$$x^* \text{ t.c. } f(x^*) = 0$$

Esempi Derivata il ritratto di fase

1)  $\dot{x} = x^2 - 1$

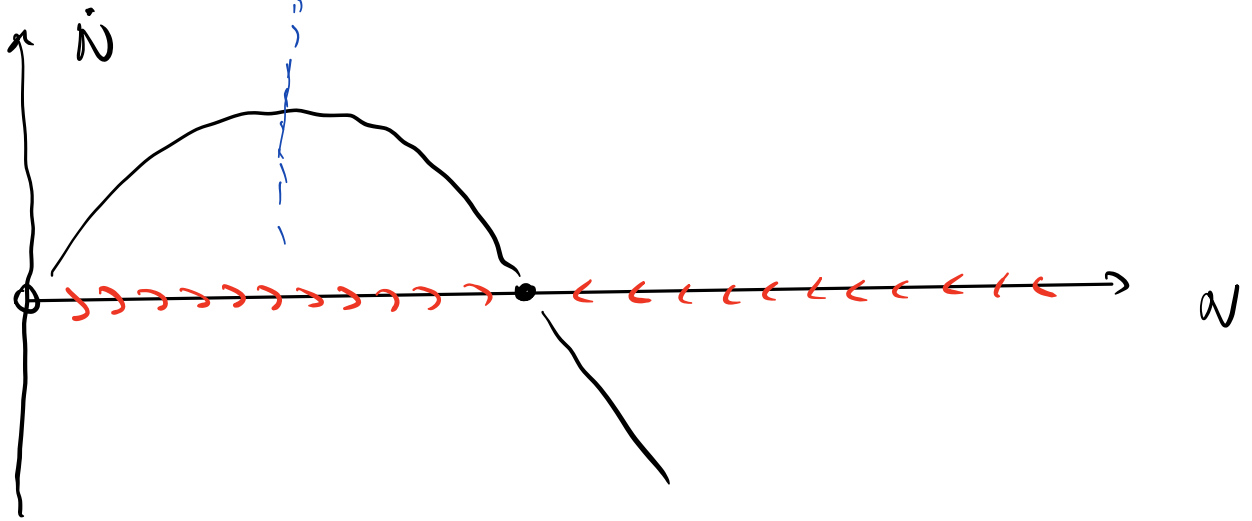


2)  $\dot{x} = x - \cos x$

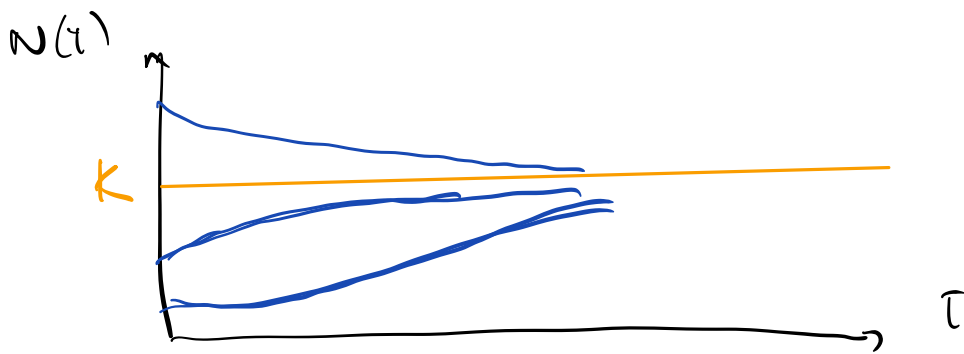


Esempio Dinamica delle popolazioni

$$\dot{N} = \sum N \left( 1 - \frac{N}{K} \right) \quad | \quad N$$



punti fissi :  $N^* = 0$      $N^* = K$



## Analisi lineare

Se otteniamo un punto fisso, possiamo  
 un'idea più precisa :

$$x(\tau) = x^* + \eta(\tau)$$

$\eta(\tau)$  perturbazione

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau) = \frac{d}{d\tau} \eta(\tau) = f(x(\tau)) = f(x^* + \eta(\tau))$$



$$= f(x^*) + \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2)$$

1.  $x^*$  punto fisso  $\leadsto f(x^*) = 0$

2.  $\eta$  è "piccola"  $\rightarrow$  lo sviluppiamo al primo ordine.

$$\rightarrow f'(x^*) \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \eta(t) = \eta(t) \underbrace{f'(x^*)}$$

la perturbazione cresce exp se  $f'(x^*) > 0$ ,

decresce exp se  $f'(x^*) < 0$

Se  $f'(x^*) \neq 0 \rightarrow$  è il segno di  $f'(x^*)$

a determinare la stabilità locale.

(stabilità, stabilità lineare ...)

Commento: siccome le sol. sono exp

$\sim e^{f'(x^*)t}$  : la quant.  $t$

$$\frac{1}{|f'(x^*)|}$$

determina una scala  
temporale; cioè determina

il tempo nel quale  $x(t)$  varia in  
modo "significativo" in un intorno di  $x^*$ .

Def Un punto di equilibrio  $x^*$  T.c.

$f'(x^*) \neq 0$  è detto iperbolico

(o non degenere).

Un sistema dinamico è iperbolico  
se tutti i suoi punti fissi sono  
iperbolici.

Esempio  $\dot{N} = f(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$

$$f'(N) = r - \frac{2rN}{K} \Rightarrow$$

$$f'(0) = r > 0 \text{ instabile}$$

$$f'(K) = -\frac{r}{2} < 0 \text{ stabile}$$

## Alcuni commenti:

1)  $\dot{x} = f(x)$  su  $\mathbb{R}$

non hanno soluzioni periodiche.

(non è più vero su  $S^1$ )

2)  $\frac{dx}{dt} = f(x) = - \frac{dV}{dx}$

$$V = V(x(t))$$

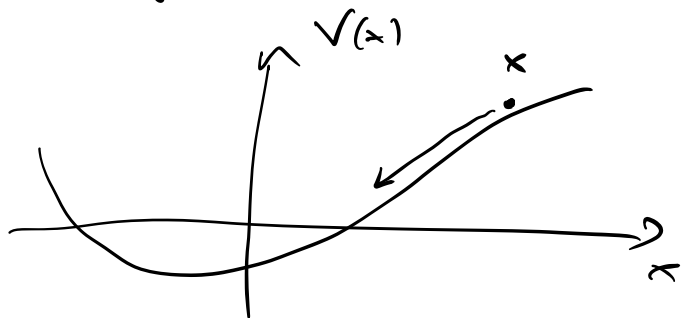
$$\left( V(x) = - \int_0^x f(s) ds \right)$$

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{dx}{dt} \frac{dV}{dx} = - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

→

il potenziale decresce lungo le

traiettorie



parti di  
eq.  
sono  $\frac{dV}{dx} = 0$



# BIFORCAZIONI

le dinamiche può cambiare  
in modo qualitativo al variare  
di un parametro.

Supponiamo di avere un parametro  $\mu$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} x(t) &= f_{\mu}(x(t)) \\ &= f(x(t), \mu)\end{aligned}$$

Supponiamo di avere  $\mu^*$  t.e.  $f_{\mu^*}(x^*) = 0$

e  $f'_{\mu^*}(x^*) \neq 0$   $\left( \begin{array}{l} x^* \text{ è punto} \\ \text{critico} \\ \text{iperbolico} \end{array} \right)$

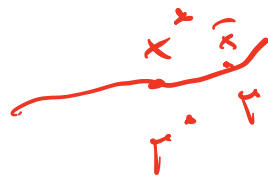
Allora il Teorema delle funzioni implicite  
che il punto di equilibrio  $e^*$   
"strutturalmente stabile": non può  
essere rimosso con una variazione del

parametro.

$\Gamma$   $g(x, \mu) = 0$  solto questi condizioni  
risolvere per  $x = x(\mu)$

Per noi: questo implica  $\exists$  un'unica  
funzione regolare  $\bar{x}(\mu)$ ,  $\mu \in U$   
( $U$  aperto di  $\mu^*$ ), tale che

$$\begin{cases} \bar{x}(\mu^*) = x^* \\ \underline{f_\mu(\bar{x}(\mu))} = 0 \end{cases}$$



A parole: i punti critici iperbolici  
persistono per piccole variazioni  
del parametro.  $\mu$ .

Vedremo:  $f_\mu(x^*) = 0$   
 $f'_\mu(x^*) = 0$