SERIE NUMERICHE

APPUNTI DAL CORSO DI
COMPLEMENTI DI MATEMATICA
PER L.S. IN BIOTECNOLOGIE
INDUSTRIALI

a cura di:
ILARIA PASTORELLO

PARTECIPANTI AL CORSO A.A. 2005/2006:

Agostini Simone
Biscontin Alberto
Bisogno Stefano
Boato Francesco
Boscaini Anita
Brandi Lucia
Buonomo Davide
Cappozzo Marco
Carlotto Elena
Chemello Francesco
Domeneghetti Stefania
Fiori Lorenzo
Fornasa Giulia
Fornelli Luca
Gerotto Caterina
Hajman Karla
Heidari Ali Reza
Legnini Elisa
Maddalena Andrea
Manfrin Alberto
Moret Francesca
Mosconi Ilaria
Mozzato Flavio
Munari Fabio
Muratore Giulia
Olivieri Valeria
Panozzo Silvia
Pastorello Ilaria
Raffaello Tommaso
Reghelin Elena
Rigo Chiara
Rosan Valentina
Ruberti Cristina
Scarpa Andrea
Zoccarato Anna

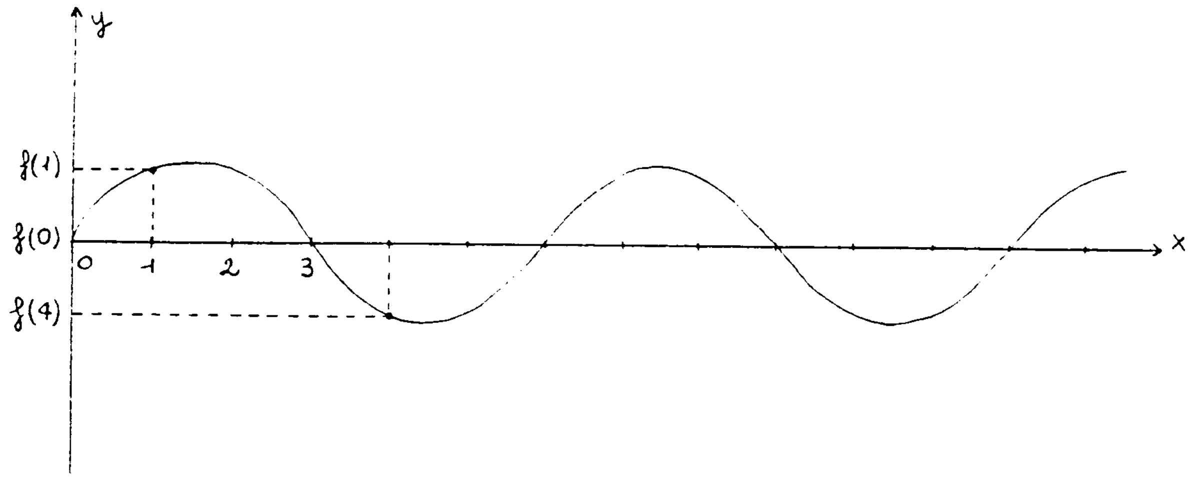
DOCENTE: RICCARDO COLPI

SUCCESSIONI E SERIE

DEF: Una successione è una qualunque applicazione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Dunque, la "variabile indipendente" è un n° naturale ($n = 0, 1, 2, 3 \ldots$) anziché reale.

Esempio 1:

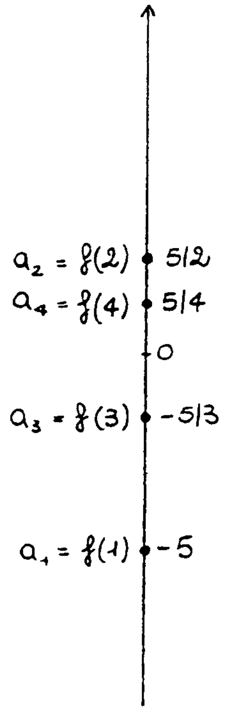
$f(n) = \operatorname{sen} n$



Il grafico di una successione è un n° discreto di punti del piano xy aventi ascissa pari a un n° naturale. È più conveniente, però, andare a vedere come si distribuiscono i punti sull'asse y.

Esempio 2:

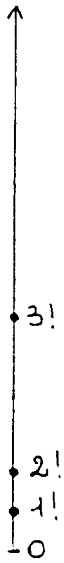
$f(n) = \frac{5}{n}(-1)^n$ con $n \geq 1$



Questo grafico è più significativo del precedente: è più utile visualizzare sull'asse reale come si distribuiscono le immagini generate dai numeri naturali. I punti sull'asse reale si avvicinano allo 0 per eccesso e per difetto e possono essere identificati mediante "etichette" numerate all'infinito.

Esempio 3:

$f(n) = n! = n(n-1) \ldots \cdot 2 \cdot 1$ con $n \geq 1$



Abbiamo un n° infinito di punti che si allontanano molto velocemente dallo 0.

In modo più significativo, possiamo dire che una successione è costituita da numeri reali a_n, uno per ciascun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Si usa, perciò, la notazione: $\cancel{f(n)} = a_n$

Es. 1: $\cancel{f(n) = \operatorname{sen} n}$ $\qquad (\operatorname{sen} n)_{n \in \mathbb{N}}$

Es. 2: $\cancel{f(n) = \frac{5}{n}(-1)^n}$ $\qquad \left(\frac{5}{n}(-1)^n\right)_{n \geq 1}$

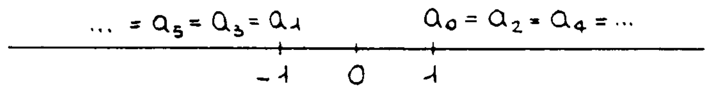
Es. 3: $\cancel{f(n) = n!}$ $\qquad (n!)_{n \geq 1}$

ATTENZIONE! Dato che $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ in generale non è iniettiva (un'applicazione si dice iniettiva se a elementi distinti del dominio corrispondono elementi distinti del codominio), può accadere che $a_n = a_m$ per qualche $n \neq m$ (in altre parole, può succedere che uno stesso punto abbia etichette diverse).

Esempio 4:

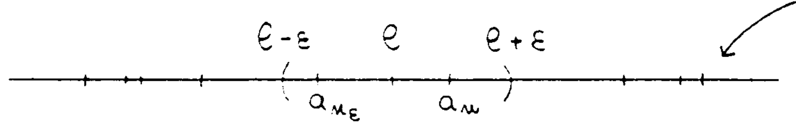
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$

Lo stesso punto ha più etichette:



Limiti di successioni

- Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione. Diremo che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge al n° reale $\ell \in \mathbb{R}$ e scriveremo che $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\varepsilon$ si ha che $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

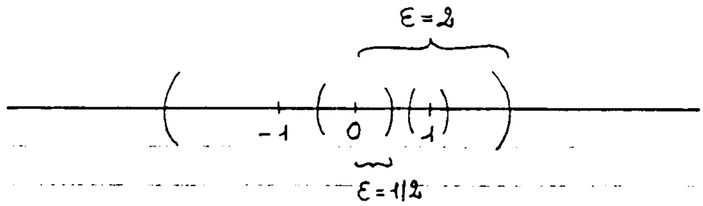


Fuori dall'intervallo ci sono al più gli a_n con $n < n_\varepsilon$.

Tutti gli a_n della successione, con $n \geq n_\varepsilon$, finiscono all'interno di questo intervallo.

Esempio 4:

$a_n = (-1)^n$

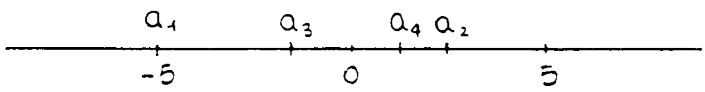


Se prendiamo un intorno di 0 di raggio $\varepsilon = 2$, tutti gli elementi della successione stanno dentro l'intorno, se, invece, prendiamo $\varepsilon = 1/2$, tutti gli elementi stanno fuori dall'intorno $\Rightarrow$ 0 non è il limite della successione.
Se prendiamo un intorno di 1, non tutti gli elementi della successione finiscono dentro quell'intorno, ma solo gli a_n con n pari. Similmente per gli altri reali $\neq 0, 1$. Di conseguenza, il limite della successione non esiste.

Esempio 2:

$$a_n = \frac{5}{n}(-1)^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{5}{n}(-1)^n = 0$$



Dobbiamo dimostrare che, fissato $\varepsilon > 0$, $|a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$.

$$|a_n - 0| < \varepsilon \iff \left|\frac{5}{n}(-1)^n\right| < \varepsilon \iff \frac{5}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{5}{\varepsilon}$$

Prendiamo, quindi, come n_ε il più piccolo n° naturale $n_\varepsilon > \frac{5}{\varepsilon}$.

$\forall n \geq n_\varepsilon > \frac{5}{\varepsilon}$, anche $n > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{5}{n}(-1)^n - 0\right| < \varepsilon$.

Di conseguenza, il limite della successione è proprio 0.

- Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione. Diremo che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ e scriveremo che $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ se $\forall k > 0 \ \exists n_k \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_k$ si ha che $a_n > k$.

- Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione. Diremo che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ e scriveremo che $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ se $\forall k < 0 \quad \exists n_k \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \leq n_k$ si ha che $a_n < k$.

Esempio 3:

$(n!)_{n \geq 1}$ diverge a $+\infty$.

Esempio 5:

$(-n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$.

Riassunto:

DEF: Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Diremo che:

- La successione converge a $\ell \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

  Es: $\left(\frac{5}{n}(-1)^n\right)_{n>0} \Rightarrow \ell = 0$.

- La successione diverge a $+\infty$ (risp. $-\infty$) se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (risp. $-\infty$).

  Es: $(n!)_{n\geq 0}$, $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- La successione è indeterminata se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste.

  Es: $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

OSSERVAZIONE: Il carattere di una successione (convergente, divergente, indeterminata) non dipende dai suoi primi termini, ovvero le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a_n)_{n\geq N}$, dato ad arbitrio $N\in\mathbb{N}$, hanno medesimo carattere. Infatti, il carattere è determinato dall'esistenza del limite, che a sua volta non dipende dai primi termini della successione stessa.

DEF: Informalmente, una serie è una somma di infiniti termini.
Formalmente, data una qualunque successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si definisce serie di termine n-esimo a_n la somma formale:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

cioè la somma degli infiniti termini della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Esempi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots$$

Talvolta è necessario o conveniente iniziare la somma da un indice diverso da 1; ad esempio, l'ultima serie non avrebbe senso se la somma iniziasse da $n=1$, in quanto il primo termine sarebbe non definito.

Se necessario, è possibile cambiare l'indice di una sommatoria, in modo che inizi da un valore differente. Ciò viene realizzato mediante una sostituzione.

Ad esempio, per mezzo della sostituzione $n = m - 2$, si può riscrivere la sommatoria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nella forma $\sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$. Entrambe le sommatorie originano lo stesso sviluppo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{m=3}^{+\infty} a_{m-2}$$

L'addizione è un'operazione definita su coppie di numeri.
Se si dovesse calcolare la somma finita $a_1 + a_2 + a_3$, si potrebbe procedere sommando $a_1 + a_2$ e poi sommando a_3 a questo risultato, oppure si potrebbe prima sommare $a_2 + a_3$ e poi sommare a_1 al risultato: in entrambi i casi si otterrebbe sempre il medesimo risultato, in quanto l'addizione di un n° finito di termini gode delle proprietà commutativa e associativa.
Invece, quando si esegue la somma di un n° infinito di termini, l'ordine con cui i termini vengono sommati diviene importantissimo. L'interpretazione scelta per la somma infinita è quella di sommare da sinistra verso destra, come indicato dal raggruppamento:

$$((((a_0 + a_1) + a_2) + a_3) + a_4) + \dots$$

Informalmente, quindi, ci interessa determinare il risultato della seguente "operazione infinita":

$$a_0,\ a_0 + a_1,\ (a_0 + a_1) + a_2,\ ((a_0 + a_1) + a_2) + a_3,\ \dots$$

Ad esempio, sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \underbrace{\underbrace{1} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Per eseguire la "somma infinita" è necessario definire una nuova successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, chiamata successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, in modo tale che s_n sia la somma dei primi n termini della serie originaria:

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1 = s_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$$

$\vdots$

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_{n-1} + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

$\vdots$

Formalmente, la somma della serie infinita equivale al $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i$, cioè al limite della nuova successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dipendente da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dove $s_n = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ (somma parziale n-esima della serie).

DEF: Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$:

- Converge a ℓ, cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell\,(\in \mathbb{R})$, se $\lim_{n \to +\infty} s_n = \ell$.

- Diverge a $+\infty(-\infty)$, cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$ (risp. $-\infty$), se $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$ (risp. $-\infty$).

- È indeterminata, se $\lim_{n \to +\infty} s_n$ non esiste.

Pertanto, una serie converge se e solo se la successione delle sue somme parziali converge, diverge se e solo se la successione delle sue somme parziali diverge, è indeterminata se e solo se la successione delle sue somme parziali è indeterminata.

Esempi:

1) $\ell = 0,32323232\ldots = 0,\overline{32} \in \mathbb{R}$

$$\ell = \frac{32}{10^2} + \frac{32}{10^4} + \frac{32}{10^6} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{32}{10^{2(n+1)}}$$

$$a_n = \frac{32}{10^{2(n+1)}}$$

La serie converge.

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} n = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$

La serie diverge a $+\infty$.

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \text{non esiste}$$

La serie è indeterminata.

OSSERVAZIONE: In generale, data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, è estremamente difficile calcolarne il limite; è, invece, più facile determinarne il carattere ed eventualmente il limite in modo approssimato con errore predefinito.
Il limite può essere calcolato in modo esatto solo per pochissime serie, ad esempio per le serie geometriche e telescopiche.

Serie geometriche

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ è detta "serie geometrica di ragione $q \in \mathbb{R}$".

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

$$s_n(1-q) = s_n - q s_n = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \dots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \cancel{q^3} - \cancel{q^4} - \dots - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$$

Pertanto, se $q \neq 1$, abbiamo che $s_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Se $q = 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1+1+1+1+\dots$ diverge a $+\infty$.

Se $q \neq 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} =$

a) $\dfrac{1}{1-q}$, cioè la serie converge a $\dfrac{1}{1-q}$, se $|q| < 1$;

b) $+\infty$, cioè la serie diverge a $+\infty$, se $q \geq 1$;

c) non esiste, cioè la serie è indeterminata, se $q \leq -1$. Infatti, quando q è un n° negativo, se lo elevo a esponente pari ottengo un n° positivo, se lo elevo a esponente dispari ottengo un n° negativo.

Esempi:

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

$q = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la serie converge a $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n = 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 4 + \dots$

$q = \sqrt{2} > 1 \Rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$.

3) $0,\overline{32} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{32}{10^{2(n+1)}} = \frac{32}{100} + \frac{32}{100^2} + \frac{32}{100^3} + \dots =$

$$= \frac{32}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots\right) = \frac{32}{100} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$q = \frac{1}{100} < 1 \Rightarrow$ la serie converge a $\frac{32}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{32}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{32}{99}$.

Alcuni teoremi sulle serie

TEOR. 1: I caratteri di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e di $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n$ coincidono qualunque sia $N \in \mathbb{N}$. I due limiti, invece, non coincidono.

Il carattere di una serie non dipende dai primi termini della successioni delle somme parziali. Dalle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ otteniamo delle successioni $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distinte, che, però, differiscono solo per una costante, pari alla somma dei primi $N-1$ termini.

Esempio:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

Il carattere non cambia, ma il limite sì.

TEOR. 2: se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

N.B.: Il viceversa è generalmente falso!

Dim: Se $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$, allora $s_n - s_{n-1} = a_n$.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_{n \to +\infty} s_n = \ell$ e $\lim_{n \to +\infty} s_{n-1} = \ell$.

Quindi $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} (s_n - s_{n-1}) = \ell - \ell = 0$.

Una serie, pertanto, non può convergere se i suoi termini non tendono a zero; la proposizione inversa è, in generale, falsa, infatti:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}, \text{ mentre}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge, come vedremo.}$$

Quando si cerca di stabilire se una data serie converge, la prima domanda da porsi è: "Il termine n-esimo tende a 0 quando n tende a $+\infty$?". Se la risposta è "no", allora la serie non può convergere; se la risposta è "sì", allora la serie può convergere o non convergere. Se la successione di termini $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende a un limite ℓ non nullo, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$ se $\ell > 0$, mentre diverge a $-\infty$ se $\ell < 0$.

Esempio:

Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n-1}$ converge o meno.

Innanzitutto, controlliamo se $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\nearrow +\infty}}{\underbrace{2n-1}_{\searrow +\infty}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(2 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} \neq 0$$

La serie non converge, bensì diverge a $+\infty$.

TEOR. 3: Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \ell_2 \in \mathbb{R}$.

Allora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \ell_1 + \beta \ell_2$$

Esempio:

Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n}$ converge e, in caso affermativo, calcolarne il limite.

Volendo, possiamo controllare che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = 0$, con cui che possiamo solo dire che FORSE la serie converge.

D'altra parte, $a_n = \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \underbrace{\frac{1}{3^n}}_{= b_n} + 2\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{= c_n}$, perciò:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} \overset{\text{TEO.3}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ convergono, perché sono serie geometriche di ragione $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, rispettivamente; pertanto, si ottiene:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - 1 = \frac{1}{1-1/3} - 1 = \frac{1}{2} \quad \text{e}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-2/3} - 1 = 2, \quad \text{così}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2} + 2\cdot 2 = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

Serie telescopiche

Per le serie telescopiche si riesce a esprimere in funzione di n la somma parziale n-esima S_n (come accadeva per le serie geometriche).

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

Dire se la serie converge e, in caso affermativo, calcolarne la somma.

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2)+Bn}{n(n+2)} = \frac{An+2A+Bn}{n(n+2)} = \frac{(A+B)n+2A}{n(n+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases} \iff A = 1/2 \,,\ B = -1/2$$

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = a_n$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$S_n = \frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{\left(1-\frac{1}{3}\right)}_{i=1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}_{i=2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)}_{i=3} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)}_{i=4} + \underbrace{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)}_{i=5} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)}_{i=n}\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{6} + \cancel{\frac{1}{5}} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Dire se la serie converge e, in caso affermativo, calcolarne la somma.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{An+A+Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \iff A = 1 \,,\ B = -1$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = a_n$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Serie a termini positivi

DEF: La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice (definitivamente) a termini positivi se $a_n \geq 0 \ \forall n$ (rispettivamente $a_n \geq 0 \ \forall n \geq n_0$, per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$).

TEOREMA 1:

Una serie (definitivamente) a termini positivi converge oppure diverge a $+\infty$; non può mai essere indeterminata.

COROLLARIO (CRITERIO DEL CONFRONTO):

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie (definitivamente) a termini positivi e sia $a_n \leq b_n \ \forall n$ (rispettivamente $\forall n \geq n_0$). Allora:

a) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

b) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge.

<u>Dim</u>: Siano $S_n^a = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S_n^b = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Se $a_n \leq b_n \ \forall n$, allora $S_n^a \leq S_n^b \ \forall n$.

Esercizio:

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{18}{\sqrt{2}^n + 3n + 2}$

Notiamo che e' una serie a termini positivi.

$$a_n = \frac{18}{\sqrt{2}^n + 3n + 2} \leq \frac{18}{\sqrt{2}^n} = 18 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}^n} = b_n$$

Notiamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^n}$ e' una serie geometrica di ragione $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

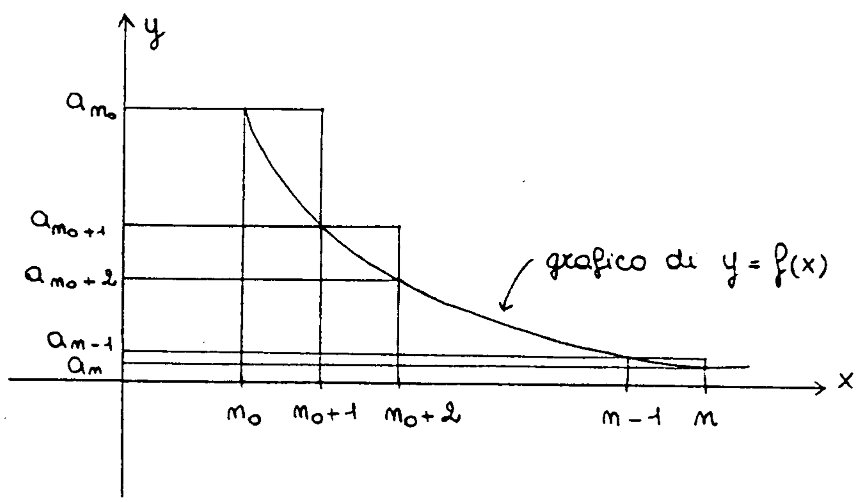
Poiche' $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$, la serie converge a $\frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}}$.

Quindi, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 18 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}^n}$ converge.

Allora, per il criterio del confronto, anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

TEOREMA 2 (DEL CONFRONTO INTEGRALE):

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie (definitivamente) a termini positivi tale per cui esista $y = f(x) : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ positiva, decrescente e continua, tale che $a_n = f(n)$ per ogni $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$.



Allora:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se l'integrale generalizzato $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge se l'integrale generalizzato $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

<u>Dim</u>: $\sum_{i=n_0+1}^{n} a_i \leq \int_{n_0}^{n} f(x)\,dx \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i$

altezze dei rettangoli inferiori

altezze dei rettangoli superiori

Passando al limite per $n \to +\infty$ otteniamo:

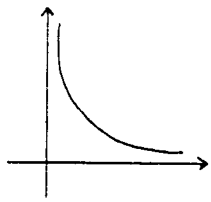
$$\sum_{i=n_0+1}^{+\infty} a_i \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{i=n_0}^{+\infty} a_i$$

<u>Esercizio</u>:

Determinare il carattere delle seguenti serie a termini positivi:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$



Funzione continua, positiva, decrescente.

Una primitiva di $f(x)$ e':

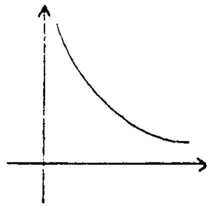
$$\int x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{-1/2+1} x^{-1/2+1} + c = \frac{1}{1/2} x^{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int_1^{+\infty} x^{-1/2}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x} - 2 = +\infty$$

Per il teorema del confronto integrale, concludiamo che la serie diverge.

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

$y = f(x) = \frac{1}{x}$



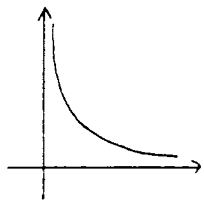
Funzione continua, positiva, decrescente. ($1/x$ è infinitesima a $+\infty$ di ordine 1, come vedremo)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c = \ln x + c = \Big[\ln x\Big]_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \ln x - 0 = -\infty$$

La serie diverge.

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$y = f(x) = \frac{1}{x^2}$



Funzione continua, positiva, decrescente. A mano a mano che aumenta l'esponente, il grafico diviene sempre più schiacciato sull'asse x. ($1/x^2$ è infinitesima di ordine 2, come vedremo)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} x^{-2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} + 1 = 1$$

La serie converge.

4) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log^2(n) \cdot n}$

L'ordine di infinitesimo a $+\infty$ non è un n° reale, riusciamo solo a dire che è >1

$y = f(x) = \frac{1}{\log^2(x) \cdot x}$ Funzione continua, positiva, decrescente.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log^2(x) \cdot x}\,dx \qquad t = \log(x) \qquad dt = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\log^2(x) \cdot x}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}\,dt = \frac{1}{-2+1}\,t^{-2+1} + c = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{\log x} + c$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log^2(x)\cdot x}\,dx = \left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log 2} = \frac{1}{\log 2}$$

La serie converge.

5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log(n)\cdot n}$

$y = f(x) = \dfrac{1}{\log(x)\cdot x}$ Funzione continua, positiva, decrescente.

$$\int \frac{1}{\log(x)\cdot x}\,dx \qquad t = \log x \qquad dt = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\log(x)\cdot x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c = \log t + c = \log(\log x) + c$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log(x)\cdot x}\,dx = \left[\log(\log x)\right]_2^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \log(\log x) - \log(\log 2) = +\infty$$

La serie diverge.

LEMMA: Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Allora:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

<u>Dim</u>: $$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} (\text{se } \alpha = 1) & \log|x| + c \\ (\text{se } \alpha \neq 1) & \dfrac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha} + c \end{cases}$$

Cosicché:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{se } \alpha > 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha}}_{\to 0} - \dfrac{1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1} \in \mathbb{R} \\ \text{se } \alpha = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \log x - 0 = +\infty \\ \text{se } \alpha < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha}}_{\to +\infty} - \dfrac{1}{1-\alpha} = +\infty \end{cases}$$

Richiami sull'ordine di infinitesimo

DEF: Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Diciamo che è infinitesima se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Diciamo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima di ordine:

a) $> \alpha$ se $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = 0$ (con $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$)

b) $= \alpha$ se $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

c) $< \alpha$ se $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = +\infty$

Esempi:

1) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, $a_n = \frac{1}{3\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{n}} = \frac{1}{3}$$

a_n è infinitesima di ordine $1/2$.

2) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, $a_n = \frac{1}{n^2+3n-\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ Qual è l'ordine di infinitesimo?

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^2+3n-\sqrt{n}} = \frac{n^\alpha}{n^2\underbrace{\Big(1+\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{3}{n}}-\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}\Big)}_{\downarrow\atop 1}} = 1 \text{ se } \alpha = 2$$

N.B.: Se $\alpha > 2$, il limite vale $+\infty$.

Se $\alpha < 2$, il limite vale 0.

Dunque, a_n è infinitesima di ordine 2.

TEOREMA DELL'ORDINE DI INFINITESIMO:

Sia $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ una serie (definitivamente) a termini positivi.

Condizione necessaria affinché essa converga è che $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sia infinitesima.

1) Se $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ha ordine di infinitesimo $\geq \alpha > 1$, allora $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ converge.

2) Se $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ha ordine di infinitesimo ≤ 1, allora $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ diverge.

<u>Esempi</u>:

1) $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m\sqrt{m}}$ è a termini positivi.

$a_m = \frac{1}{m\sqrt{m}}$ è infinitesima di ordine $\frac{3}{2} > 1$. Soddisfa, perciò, alla condizione 1) del teorema precedente, con $\alpha = \frac{3}{2}$. La serie, pertanto, converge.

2) $\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m^2 - \sqrt{m}}$ è a termini definitivamente positivi.

$a_m = \frac{1}{m^2-\sqrt{m}}$ è infinitesima di ordine $2 > 1$, infatti:

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{m^2}{m^2-\sqrt{m}} = \lim_{m\to+\infty} \frac{\cancel{m^2}}{\cancel{m^2}\left(1-\underbrace{\frac{1}{m\sqrt{m}}}_{c}\right)} = 1.$$

Soddisfa, perciò, alla condizione 1) del teorema precedente. La serie, pertanto, converge.

3) $\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m\log m}$ è a termini positivi.

$a_m = \frac{1}{m\log m}$ è infinitesima di ordine > 1, infatti:

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}\log m} = 0$$

Tuttavia, il teorema non può essere applicato, perché si vede che a_m ha ordine di infinitesimo $< \alpha$ qualunque sia $\alpha > 1$.

Infatti, sia $\alpha > 1$. Allora:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\alpha}}{n \log n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\alpha} \cdot n^{-1}}{\log n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{n^{\overset{>0}{\alpha - 1}}}}{\underset{\to +\infty}{\log n}} \overset{(H)}{=} \lim_{n \to +\infty} \frac{(\alpha - 1)\, n^{\alpha - 2}}{\frac{1}{n}} =$$

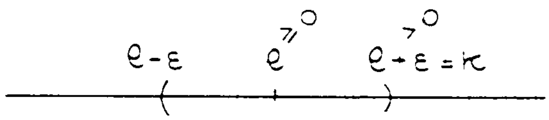
$$= \lim_{n \to +\infty} (\alpha - 1)\, n^{\alpha - 2} \cdot n = \lim_{n \to +\infty} (\overset{>0}{\alpha - 1})\, n^{\overset{>0}{\alpha - 1}} = +\infty$$

Cioè $\frac{1}{n \log n}$ ha ordine di infinitesimo $< \alpha$.

Dimostriamo ora il teorema precedente.

Dim 1): Dimostriamo che, se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è infinitesima di ordine $\geq \alpha > 1$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $a > 1$, e supponiamo che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sia infinitesima di ordine $\geq \alpha$, cioè $\lim_{n \to +\infty} \overset{>0}{n^{\alpha}} \overset{>0}{a_n} = \ell\ (\in \mathbb{R}) \geq 0$ ($\ell = 0$ se l'ordine è $> \alpha$).



Fissato $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ tale che $\forall n \geq n_0$ si ha che $n^{\alpha} a_n \leq k$, cioè $a_n \leq \frac{k}{n^{\alpha}}$

Notiamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k}{n^{\alpha}} = k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge per il criterio del confronto integrale e per il lemma.

Così la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge per il criterio del confronto, poiché $a_n \leq \frac{k}{n^{\alpha}}$

Dim 2): Dimostriamo che, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima di ordine ≤ 1, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia infinitesima di ordine ≤ 1. Allora:

$$\lim_{n\to+\infty} n\,a_n = \begin{cases} a)\ +\infty & \text{se l'ordine è } < 1 \\ b)\ \ell\,(\in\mathbb{R}) > 0 & \text{se l'ordine è } 1 \end{cases}$$

- Caso a): Preso $K=1$, $\exists\, n_0$ tale che, $\forall n \geq n_0$, $1 \leqslant n a_n$, cioè $\frac{1}{n} \leqslant a_n$.

  Notiamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge per il criterio del confronto integrale e per il lemma.

  Così, anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge per il criterio del confronto, poiché $\frac{1}{n} \leqslant a_n$.

- Caso b): Preso $\varepsilon > 0$ in modo che $\ell - \varepsilon = k > 0$, $\exists\, n_0$ tale che, $\forall n \geq n_0$, $n a_n \geqslant k$, cioè $a_n \geq \frac{k}{n}$.

  Notiamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k}{n} = k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge per il criterio del confronto integrale e per il lemma.

  Così, anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge per il criterio del confronto, poiché $a_n \geqslant \frac{k}{n}$.

ESERCIZIO

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n+1}$ è a termini positivi ($a_n \geq 0 \ \forall n$).

$$a_n = \frac{1}{2^n+1} \,, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{1}{2^n+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{\ln 2^x}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x\ln 2}+1} \overset{(H)}{=}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\ln 2\, e^{x\ln 2}} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\ln^2 2\, e^{x\ln 2}} = 0$$

a_n è infinitesima di ordine $> \overset{\in \mathbb{R}}{2} > 1 \Rightarrow$ la serie converge.

Alternativamente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n+1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, che converge a $\displaystyle\frac{1}{1-1/2} - 1 = 1$.

Allora, anche $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n+1}$ converge per il criterio del confronto.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ è a termini positivi ($a_n \geq 0 \ \forall n$).

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{n^3+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}(3+1/n)}{n^{\cancel{3}2}(1+1/n^3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} =$$

$$= 3 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

a_n è infinitesima di ordine $\overset{\in \mathbb{R}}{2} > 1$, infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to+\infty} \cancel{n^2} \cdot \frac{3+1/n}{\cancel{n^2}(1+1/n^3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3+1/n}{1+1/n^3} = 3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

La serie, pertanto, converge.

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ è a termini positivi ($a_n \geq 0 \ \forall n$).

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\underset{\to+\infty}{\ln n}} = 0 \quad \Rightarrow a_n \text{ è infinitesima.}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n \frac{1}{\ln n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{+\infty}{x}}{\underset{+\infty}{\ln x}} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$a_n = \frac{1}{\ln n}$ è infinitesima di ordine $< 1 \Rightarrow$ la serie diverge.

ESERCIZIO

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ è a termini positivi ($a_n \geq 0 \ \forall n$).

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} = 0 \quad \Rightarrow a_n \text{ è infinitesima.}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \frac{1}{1+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(1+\underset{\to 0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)} = 1$$

a_n è infinitesima di ordine $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la serie diverge.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3}$ è a termini positivi ($a_n \geq 0 \ \forall n$).

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}(1+\overset{\to 0}{5/n})}{n^{\cancel{3}2}(1-\underset{\to 0}{2/n^2}+\underset{\to 0}{3/n^3})} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \Rightarrow a_n \text{ è infinitesima.}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2(1-2/n^2+3/n^3)} = 1$$

a_n è infinitesima di ordine $\underset{\in \mathbb{R}}{2} > 1 \Rightarrow$ la serie converge.

ESERCIZIO

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\operatorname{sen} n}{n^2}$$ è a termini positivi ($a_n \geq 0 \ \forall n$).

$$a_n = \frac{1+\operatorname{sen} n}{n^2} = (1+\operatorname{sen} n) \cdot \frac{1}{n^2}$$

$1+\operatorname{sen} n$ è limitata tra 0 e 2, perchè $-1 \leq \operatorname{sen} n \leq 1$.

$1/n^2$ è infinitesima di ordine 2.

Teorema: infinitesima x limitata = infinitesima.

In definitiva, a_n è infinitesima di ordine $2>1 \Rightarrow$ la serie converge. Infatti:

$$0 \leq \frac{1+\operatorname{sen} n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$ converge, perchè $\frac{2}{n^2}$ è infinitesima di ordine $2>1$.

Così, anche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\operatorname{sen} n}{n^2}$ converge, per il criterio del confronto.

OSSERVAZIONE: Il criterio dell'ordine di infinitesimo ha un limite: la successione deve essere interpolata da una funzione, ma ciò non è sempre possibile.

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} \cdot \frac{1}{n!} = ???$$

a_n è infinitesima, ma di che ordine?

Servono altri criteri di convergenza.

TEOREMA (CRITERIO DEL RAPPORTO):

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Allora:

a) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

b) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

c) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ oppure non esiste, non si può dire nulla.

La convergenza è garantita dalla decrescenza dei termini della serie: all'infinito a_{n+1} deve essere "sensibilmente più piccolo" di a_n.
Viceversa, la divergenza è garantita dalla crescenza dei termini della serie: all'infinito a_{n+1} deve essere più grande di a_n.

<u>Esempio</u>:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ è a termini positivi.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!} \Big/ \frac{1}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{la serie converge.}$$

TEOREMA (CRITERIO DELLA RADICE):

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Allora:

a) Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

b) Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

c) Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ oppure non esiste, non si può dire nulla.

Se i termini della serie decrescono, più grande è n più a_n si avvicina a zero e più $\sqrt[n]{a_n}$ si avvicina a 1 (se $a_n > 0$). Se il bilancio è "positivo" (cioè se $\lim = l < 1$), la serie converge.

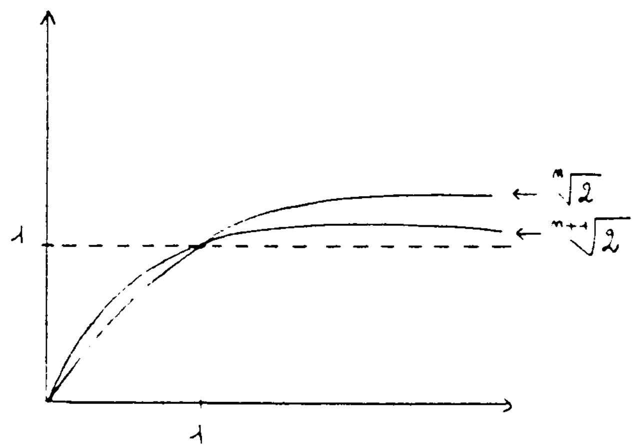
<u>Esempi</u>:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^{n+1}}$ è a termini positivi.

$$a_n = \frac{n^n}{2^{n+1}} = \frac{n^n}{2^n \cdot 2} \implies \sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{2\sqrt[n]{2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2\sqrt[n]{2}} = \lim_{n\to+\infty} n \underbrace{\frac{1}{2\sqrt[n]{2}}}_{1/2} = +\infty$$

La serie, pertanto, diverge.



2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ è a termini positivi.

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \implies \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Quando c'è un esponente che dipende da n, conviene utilizzare il criterio della radice.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

La serie, pertanto, converge.

Abbiamo visto che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

Qualunque sia $a \in \mathbb{R}, a>0$, si ha che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

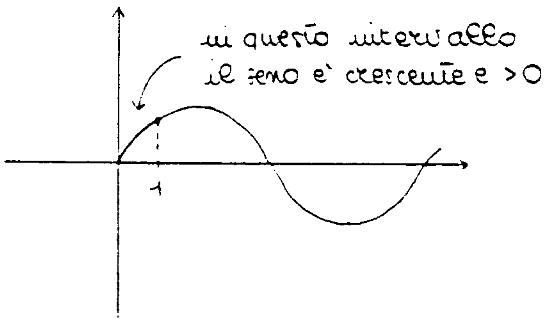
Infatti: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ e $\lim_{n\to+\infty} a^{\overset{\to 0}{1/n}} = 1$.

ESERCIZIO

Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^2(1+1/n)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n}}$$

$a_n \geq 0 \ \forall n$, infatti $\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq 0$, $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0$, essendo $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.



Possiamo, allora, utilizzare il criterio dell'ordine di infinitesimo.

$\frac{1}{n}$ è infinitesima di ordine 1; inoltre:

$\lim_{n\to+\infty} n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ Pongo $t = \frac{1}{n^2}$; per $n\to+\infty$, $t\to 0$

$\lim_{n\to+\infty} n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$; perciò:

$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ è infinitesima di ordine 2. Infine:

$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \overset{(H)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1/(1+t)}{1} = 1$; perciò:

$\lim_{n\to+\infty} n^2 \ln^2(1+1/n) = \lim_{n\to+\infty} \left[n \ln(1+1/n)\right]^2 = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)^2 = 1^2 = 1$

Abbiamo posto $t = 1/n$. Perciò:

$\ln^2(1+1/n)$ è infinitesima di ordine 2.

Qual è l'ordine di $\text{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n}$?

Quando sommiamo due infinitesimi di ordine diverso, diventa trascurabile l'infinitesimo di ordine maggiore.

Es: $\lim_{x\to 0} (x^2+x) = \lim_{x\to 0} x\underbrace{(x+1)}_{1} = \lim_{x\to 0} x$ L'ordine è 1, non 2!

Apriamo un'importante parentesi sulle
PROPRIETÀ DEGLI INFINITESIMI:

Supponiamo che a_n e b_n siano infinitesime di ordine rispettivamente α e β.

a) Il prodotto $a_n \cdot b_n$ è infinitesimo di ordine $\alpha+\beta$.

b) Il rapporto a_n/b_n è infinitesimo di ordine $\alpha-\beta$, se $\alpha>\beta$.

c) Se $\alpha>\beta$, la somma a_n+b_n è infinitesima di ordine β. Infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\beta(a_n+b_n) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^\beta b_n}_{\ell\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \underbrace{\left(\frac{a_n}{b_n}+1\right)}_{\to 1} = \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

($\frac{a_n}{b_n} \to 0$)

d) Se $\alpha=\beta$, la somma a_n+b_n è infinitesima di ordine $\geq\alpha$.

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha(a_n+b_n) = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n + \lim_{n\to+\infty} n^\alpha b_n = \ell'+\ell'' \in \mathbb{R}$$ (può essere anche 0)

Es: $\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}$ è infinitesima di ordine 1, infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}t+t}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\text{sen}t}{t}+1\right) = 2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Es: $\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}$ è infinitesima di ordine 3, infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} n^3\left[\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}t-t}{t^3} \overset{(H)}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2} \overset{(H)}{=}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{t\to 0}\frac{-\text{sen}t}{6t} = -\frac{1}{6}\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}t}{t} = -\frac{1}{6} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Tornando all'esercizio, possiamo, quindi, concludere che:

$$a_n = \frac{\overbrace{\ell n^2(1+1/n)}^{\text{ordine } 2}}{\underbrace{\underbrace{\text{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{ordine } 2}+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{ordine } 1}}_{\text{ordine } 1}}$$ è infinitesima di ordine $2-1=1$

La serie, quindi, diverge.

ESERCIZIO

Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{2^{2n-1}}$$

$$a_n = \frac{e^n}{2^{2n-1}} = \frac{e^n}{2^{2n} \cdot 2^{-1}} = 2\,\frac{e^n}{2^{2n}} = 2\left(\frac{e}{4}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{2^{2n-1}} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^n$$ È una serie geometrica di ragione $\frac{e}{4}$

Poiché $\left|\frac{e}{4}\right| < 1$, la serie converge a $2\,\frac{1}{1-e/4}$.

Il criterio della radice ci conferma che:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2}\,\frac{e}{4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1}\,\frac{e}{4} = \frac{e}{4} < 1 \Rightarrow \text{la serie converge.}$$

Il criterio del rapporto ci conferma che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\cancel{2}\,\frac{e^{n+1}}{2^{2n+2}}\right) \Big/ \left(\cancel{2}\,\frac{e^n}{2^{2n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+1}}{e^n} \cdot \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{e^n} \cdot e}{\cancel{e^n}} \cdot \frac{\cancel{2^{2n}}}{\cancel{2^{2n}} \cdot 2^2} = \frac{e}{4} < 1 \Rightarrow \text{la serie converge.}$$

ESERCIZIO

Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(ne)^n} \qquad a_n \geq 0 \ \forall n$$

In presenza di fattoriali conviene utilizzare il criterio del rapporto.

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)!}{[(n+1)e]^{n+1}} \Big/ \frac{(n+1)!}{(ne)^n} = \frac{(n+2)\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{n^n e^n}{(n+1)^{n+1} e^{n+1}} =$$

$$= (n+2)\,\frac{n^n \cancel{e^n}}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot \cancel{e^n} \cdot e} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{e} =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{e} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{e} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{\cancel{n}(1+2/n)}{\cancel{n}(1+1/n)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}_{\to 1/e} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e^2} < 1 \Rightarrow \text{la serie converge.}$$

ESERCIZIO

Si discuta, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, il carattere della serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{\lambda^n} \qquad a_n \geq 0 \quad \forall n$$

Quand'è infinitesima $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

- Se $\lambda < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\overset{\to+\infty}{n^3}}{\underset{\to 0}{\lambda^n}} = +\infty \Rightarrow$ la serie diverge.

- Se $\lambda = 1$, $a_n = n^3 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \Rightarrow$ la serie diverge.

- Se $\lambda > 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{\lambda^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overset{\to+\infty}{n^3}}{\underset{\to+\infty}{e^{n\ln\lambda}}} \overset{(H)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\overset{\to+\infty}{3n^2}}{\underset{\to+\infty}{\ln\lambda\, e^{n\ln\lambda}}} \overset{(H)}{=}$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\overset{\to+\infty}{6n}}{\underset{\to+\infty}{\ln^2\lambda\, e^{n\ln\lambda}}} \overset{(H)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{\underset{\to+\infty}{\ln^3\lambda\, e^{n\ln\lambda}}} = 0$$

Se $\lambda > 1$, a_n è infinitesima.

L'ordine di infinitesimo di a_n è certamente > 2, perché:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot \frac{n^3}{\lambda^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5}{\lambda^n} = \ldots = 0$$

Per $\lambda > 1$, la serie converge per il criterio dell'ordine di infinitesimo.

Serie oscillanti o serie a termini di segno alterno

Per le serie che non sono a termini definitivamente positivi vi e', in generale, una fitta nebbia. C'e' un'unica eccezione, rappresentata dalle cosiddette "serie oscillanti" o "serie a termini di segno alterno", cioe':

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \quad \text{con } a_n \geqslant 0 \ \forall n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots$$

Esempi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

TEOREMA (CRITERIO PER LE SERIE OSCILLANTI):

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$, con $a_n \geqslant 0 \ \forall n$ e $a_{n+1} \leqslant a_n \ \forall n$, converge se e solo se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Es: Le due serie degli esempi precedenti convergono in virtu' di questo teorema

Dim: Il fatto che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e', come ben noto, condizione necessaria alla convergenza. Dimostriamo, viceversa, che, nelle ipotesi del teorema, e' condizione sufficiente.

$$\overbrace{\underbrace{\overbrace{\underbrace{a_0}_{S_0} - a_1}^{S_1} + a_2}_{S_2} - a_3}^{S_3} + a_4 - a_5 \qquad a_{i+1} \leqslant a_i$$

$$0 < S_0$$

$$S_0 \geqslant S_2 \geqslant S_4 \geqslant \dots \geqslant S_{2n} \geqslant S_{2n+2}$$

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_5 \leqslant \dots \leqslant S_{2n+1} \leqslant S_{2n+3}$$

$S_{2n} \geq S_{2n+1}$

cioè: $S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \ldots \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq \ldots \leq S_4 \leq S_2 \leq S_0$

La successione $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e $\leq S_0$ (superiormente limitata).

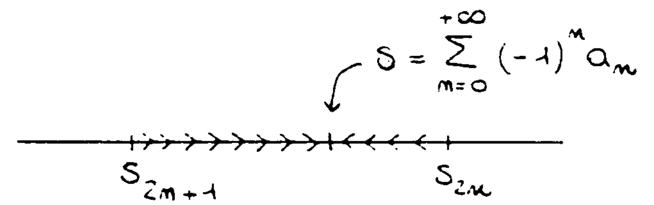
Pertanto $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \ell_{d(\text{dispari})}$.

Analogamente, la successione $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e $\geq S_1$ (inferiormente limitata). Pertanto $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ell_{p(\text{pari})}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \Big| \underset{\ell_d}{\underset{\downarrow}{S_{2n+1}}} - \underset{\ell_p}{\underset{\downarrow}{S_{2n}}} \Big| = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{m\to+\infty} \underset{(m=2n+1)}{a_m} = 0 \quad \text{per ipotesi}$$

Pertanto, $\ell_d = \ell_p$ = limite della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

N.B.:



$$|S - S_m| \leq |S_{m+1} - S_m| = a_{m+1}$$

Così S_m differisce da S meno di a_{m+1} $\Rightarrow$ possiamo calcolare con approssimazione il valore della serie.

<u>Es</u>: Per calcolare $S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ (che converge per il teorema appena visto) con un errore $< 1/1000$ è sufficiente considerare la somma parziale S_{31}:

$$\frac{1}{1000} > \frac{1}{n^2} \iff 1000 < n^2 \iff n > \sqrt{1000} \iff n = 32$$

$$m + 1 = n \Rightarrow m = n - 1 = 31 \Rightarrow S_m = S_{31}$$