TEOREMA DI LJAPUNOV (Punti d'equil.)

Se conosciamo la soluz. di $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$, possiamo dire se un pto è di equil. è stabile o no.

Ma se non siamo in grado di risolvere $(*)$?

Prop. Sia $\bar{c}$ un pto di equil. per $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ in $\mathbb{R}^\ell$ (cioè $\bar{f}(\bar{c}) = 0$).

Se in un intorno U_0 di $\bar{c}$ $\exists$ una variabile dinamica $W : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ ("funz. di Ljapunov") t.c.

a) W ha un MIN. stretto in $\bar{c}$
(cioè $W(x) > W(\bar{c})$ in $U_0 \setminus \{\bar{c}\}$)

b) $\mathcal{L}_{\bar{f}} W \leq 0$ in U_0 (cioè W è non-crescente lungo ogni moto in U_0 per t crescente)
$(\geq)$ $(=)$

$\Rightarrow$ $\bar{c}$ è un pto di equil. STABILE

per tempi positivi (negativi) (per tutti i tempi)

Teor. di Ljapunov permette di ottenere informaz. sulla stabilità del pto di equil. in modo rapido, senza risolvere $(*)$.

Corollario. Si consideri un sist. meccanico con forze puramente posizionali

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases}$$

Se l'en. potenziale $V(x)$ ha un MIN. ISOLATO in $x^* \in \mathbb{R}$, allora $\bar{c} = (x^*, 0) \in \mathbb{R}^2$ è un pto d'equil. STABILE.

Dim. Se $V(x)$ ha min. stretto in x^*, allora

$$f(x^*) = -\frac{V'(x^*)}{m} = 0 \ ;$$

inoltre $E(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ ha anch'essa un min. isolato, e si trova in $\bar{z} = (x^*, 0) \Rightarrow$ a) dal teor. di Ljap.

Inoltre E è una cost. del moto $\Rightarrow L_{\bar{f}} E = 0 \Rightarrow$ b) //

Il risultato del corollario si estende a tutti i sist. meccanici a più gradi di libertà per i quali si può scrivere l'en. totale come somma di $\underbrace{\text{en. cin.}}_{\text{def. positiva}}$ e en. pot.

Stabilità nel futuro persiste anche se aggiungiamo alla forza un termine dissipativo

ES. $\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\mu\dot{x}$ $\qquad V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 x - 2\mu v \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \end{matrix}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$L_{\bar{f}} E = \frac{\partial E}{\partial x} f_1 + \frac{\partial E}{\partial v} f_2 = \cancel{m\omega^2 x \cdot v} + m v \cdot (\cancel{-\omega^2 x} - 2\mu v)$$

$$= -2\mu m v^2 \leq 0$$

SISTEMI MECCANICI UNIDIMENSIONALI (1 grado di libertà)

- $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$
- ci concentriamo su sistemi con $F = F(x)$

$\rightsquigarrow$ si conserva l'ENERGIA

$$\underbrace{E(x,v)}_{} = \underset{\text{en. cinetica}}{T(v)} + \underset{\text{en. potenziale}}{V(x)}$$

è una cost. del moto

$$\rightarrow \quad E(x(t), v(t)) = \underset{\text{costante}}{E}$$

- Le traiettorie sul piano di fase giacciono sulle curve di livello date dall'eq.

$$E(x,v) = E$$

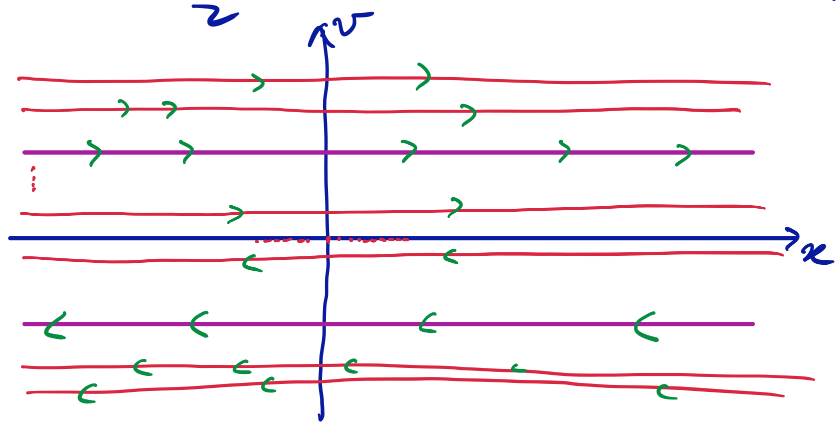
ES) 1) PARTICELLA LIBERA

$\bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x) \end{pmatrix}$

$\ddot{x} = 0 \qquad E(x,v) = \dfrac{mv^2}{2}$

Curve di livello sono date da eq.

$$\frac{mv^2}{2} = E \quad \rightarrow \quad v = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$$



$v = \dot{x}$

$v > 0 \Rightarrow \dot{x} > 0$

$\Rightarrow x$ cresce cost.

2) OSC. ARM.

$\ddot{x} = -\omega^2 x$, $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$, $E(x,v) = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

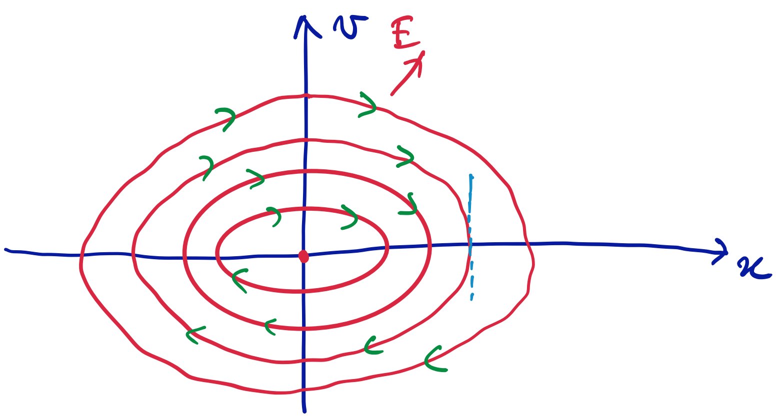
Curve di livello:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = E$$

$E \neq 0$

$$\frac{v^2}{2E/m} + \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1 \quad \leftarrow \text{ELLISSE}$$

$E = 0$ $\quad \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = 0 \rightsquigarrow (x,v) = (0,0) \rightarrow$ curva di liv. degenere (1 pto)



Traiettorie giacciono sulle curve di livello

- nel semipiano superiore le frecce vanno verso DESTRA,
  " " inferiore " " " " SINISTRA;
- traiettorie attraversano l'asse delle ascisse VERTICALMENTE (se il pto di intersez. NON è di equil.):

[Tang. a una curva $y = f(x)$ nel piano (x,y) in un pto x_0 è la retta $y = \alpha x + q$ con $\alpha = f'(x_0)$; una retta verticale ha pendenza ∞ infinita]

La curva nel piano (x,v) avrà eq.

$$v = v(x)$$

$$\alpha = \frac{dv(x_0)}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \dot{v} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{f(x_0)}{v(x_0)} \qquad (*)$$

x_0 è il pto di attraversam. dell'asse delle ascisse

$\longrightarrow$ se x_0 non è di equil. (cioè $f(x_0) \neq 0$),

allora $\alpha \to \infty$ (perché $v(x_0) \to 0$). //

(*) $\alpha = \left. \dfrac{dv(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ $\qquad$ $v(x) = v(t(x))$

$v(t)$ $\qquad$ è l'inversa di $x(t)$

Analisi qualitativa

$$E(x, v) = T(v) + V(x)$$

le curve di livello: $T(v) + V(x) = E$ cost.

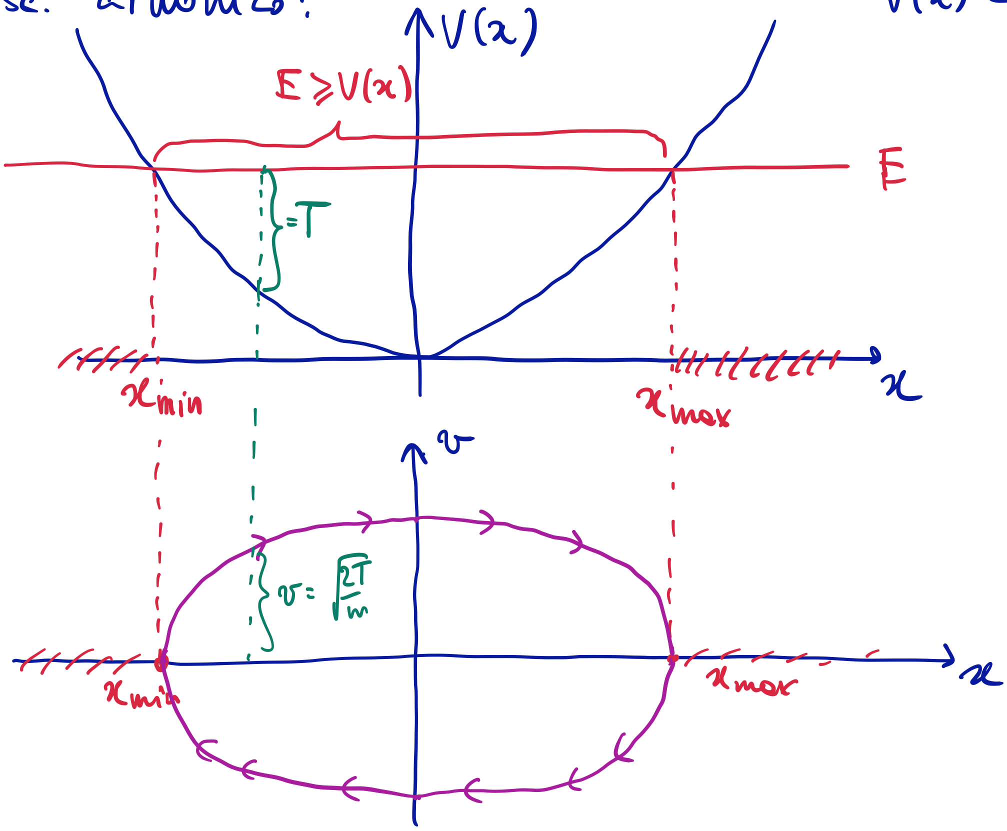
- $T(v) = \dfrac{mv^2}{2} \geqslant 0$

$$\Downarrow$$

$$E - V(x) \geqslant 0 \qquad (\cdot)$$

un pto x può stare su una curva di livello (e quindi essere un pto permesso, cioè un pto attraverso cui può passare una traiettoria) se soddisfa $(\cdot)$, cioè $V(x) \leq E$

ES. Osc. armonico: $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$



Differenza tra E e V mi dà T. Dato $T = \frac{mv^2}{2}$ ho $v = \pm\sqrt{\frac{2T}{m}}$

- $x(t) \in \{ x \in \mathbb{R} \mid V(x) \leq E \}$

  per osc. armonico $\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \leq E \rightarrow x^2 \leq \frac{2E}{m\omega^2}$

  $\hookrightarrow x(t) \in \left[\underbrace{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}_{x_{min}}, \underbrace{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}_{x_{max}} \right]$

- Nei pti dove $V(x) = E$ (x_{min} e x_{max} per osc. arm.)

  $\hookrightarrow T = 0 \Rightarrow v = 0$

  Tali pti sono chiamati PUNTI D'INVERSIONE.

$$\ddot{x} = f(x) = -\frac{1}{m} V'(x)$$

pti invers. $V'(x) \neq 0$

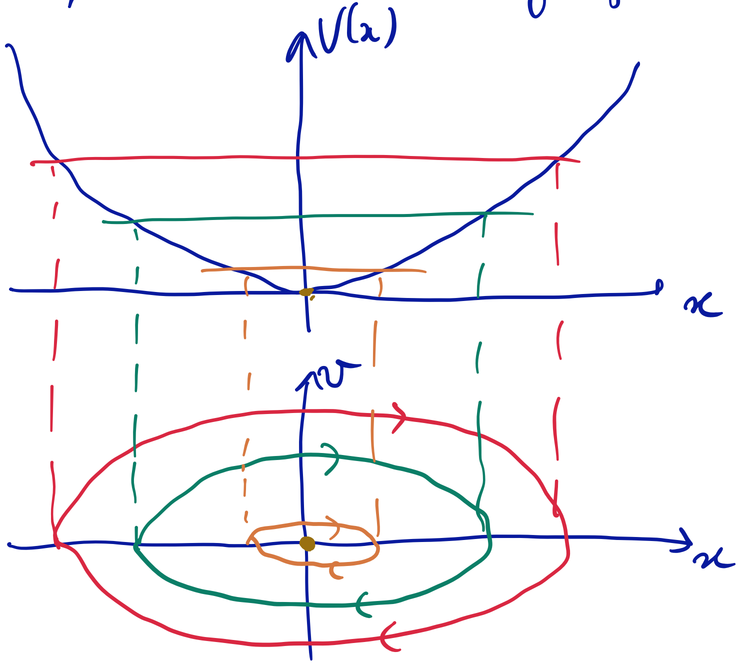
$\Rightarrow$ anche se $v = 0$ la traiettoria transita per questi pti (forza non-nulla)

- Per osc. arm.

$E>0$: il moto è dato da una curva CHIUSA

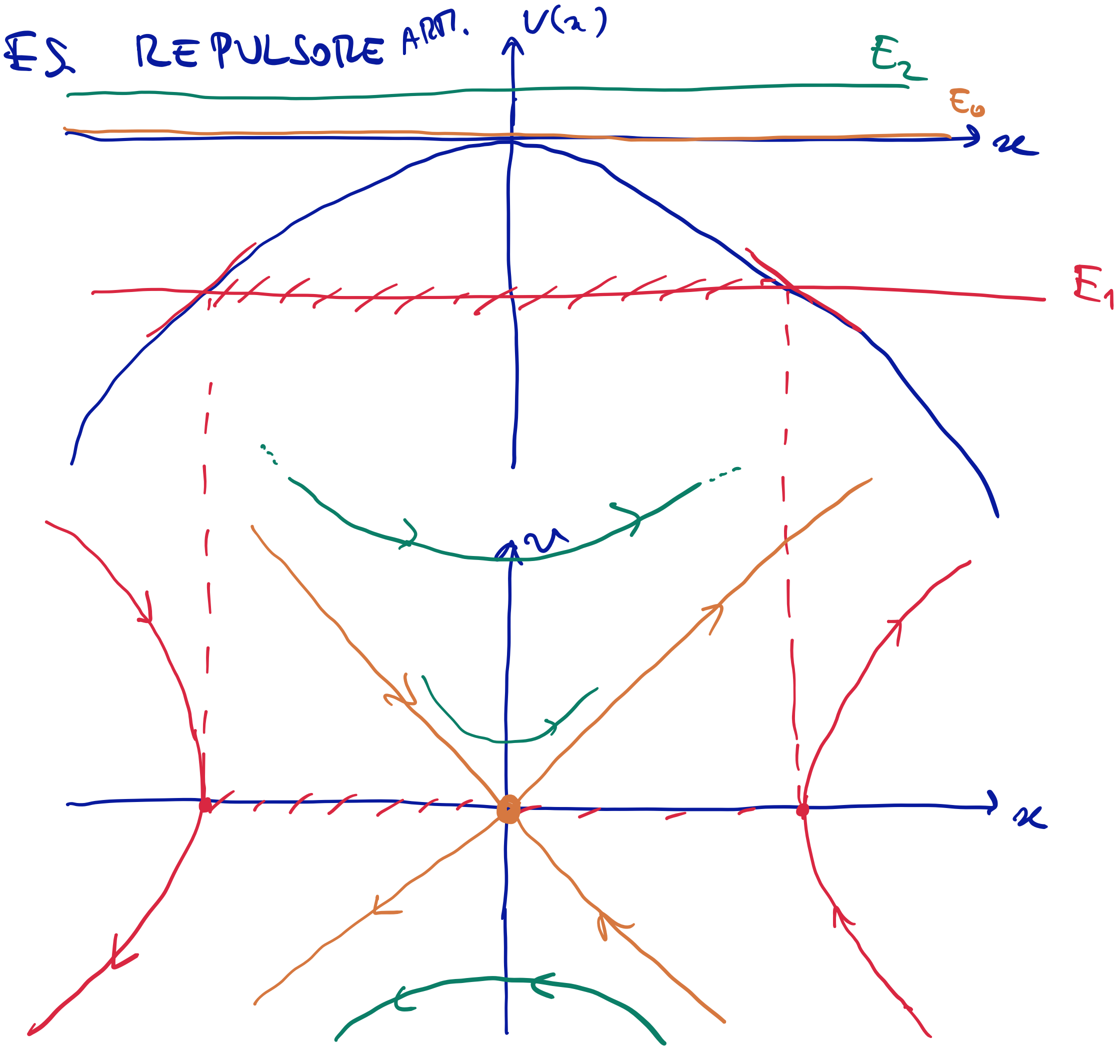
→ il moto $x(t)$ è una funz. PERIODICA

→ Traiettorie si possono ottenere (qualitativam.) semplicemente dal grafico di $V(x)$



$E=0$) l'unico pto per cui $V(x) \leq E$ è $x=0$ → il pto equil.

ES. REPULSORE ARM.



$V(x) = -\frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$(x,v) = (0,0)$ è pto di equil.

Notiamo delle traiettorie in $\mathbb{R}^2$ che si intersecano (non ce le aspettiamo perché il sist. è autonomo)

$\rightarrow$ questo può avvenire solo per $t \rightarrow \pm\infty$

Vediamo se effettivamente le curve di livello sono quelle ricavate con l'analisi qualitativa:

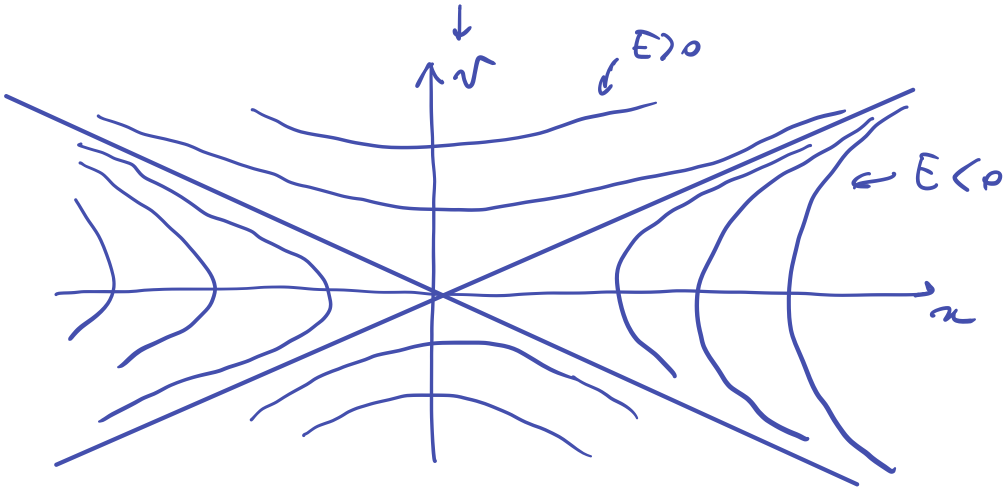
Rep. arm. $\ddot{x} = \omega^2 x$ $\qquad E(x,v) = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

Curve di livello: $\qquad E(x,v) = E^{\text{cost.}}$

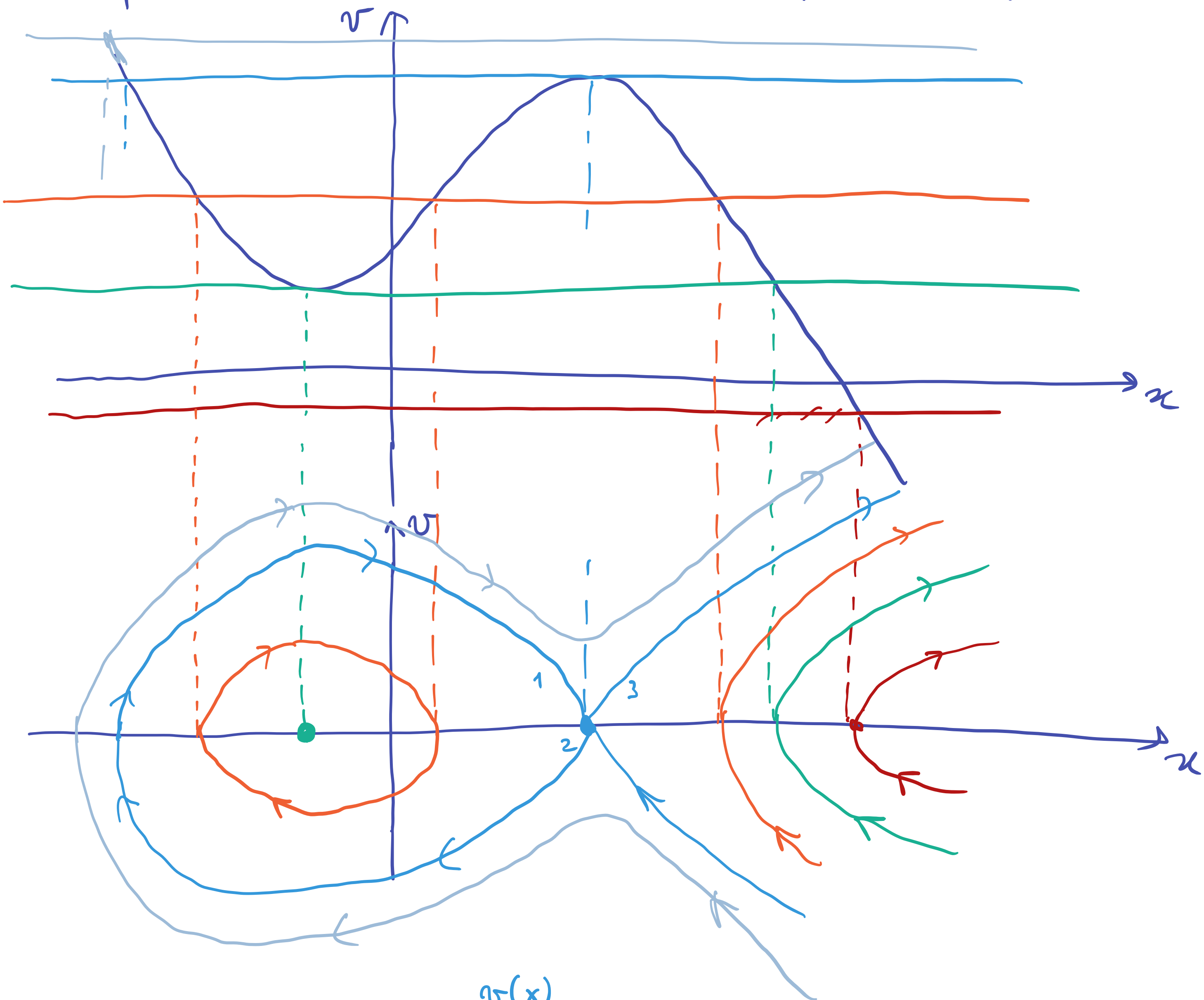
$E \neq 0 \qquad \frac{v^2}{2E/m} - \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1$ $\qquad$ IPERBOLE

$E = 0 \qquad v^2 - \omega^2 x^2 = 0$

$(v - \omega x)(v + \omega x) = 0 \rightarrow$ UNIONE di due RETTE



ES] Dato l'andam. qualitativo di $U(x)$, determinare qualitativam. le traiettorie nel piano di fase (x,v).

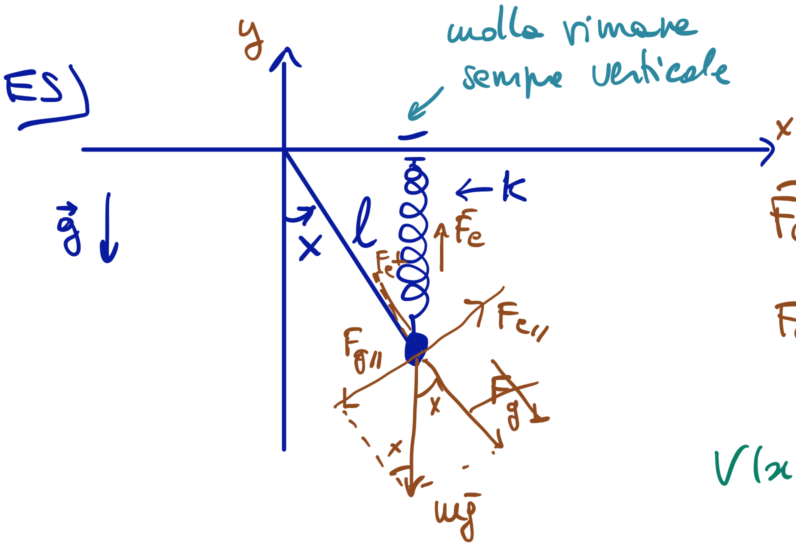


$$v(x) \qquad \frac{dv}{dx} \sim \frac{f}{v} \longrightarrow \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

BIFORCAZIONI

Le eq. diff. possono dipendere da dei PARAMETRI; il comportamento qualitativo delle soluzioni può cambiare drasticam. al variare del parametro.

ES)



$\bar{F_e} = k\ell\cos x \ \bar{e_y}$ $\qquad \bar{F_g} = -mg\,\bar{e_y}$

$F_{e\parallel} = k\ell\cos x \operatorname{sen} x$ $\qquad F_{g\parallel} = -mg \operatorname{sen} x$

$V(x) = mg(1-\cos x)\ell + \frac{1}{2}k\ell^2\cos^2 x$

$$m\ell\ddot{x} = -mg\operatorname{sen}x + k\ell\cos x\operatorname{sen}x$$

$$\ddot{x} = -\underbrace{\frac{g}{\ell}}_{=\omega^2}\operatorname{sen}x + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\Omega^2}\cos x\operatorname{sen}x \qquad \left(= -\frac{V'(x)}{m\ell}\right)$$

due parametri da cui dip. l'eq. diff.

$$\ddot{x} = -\omega^2\operatorname{sen}x + \Omega^2\cos x\operatorname{sen}x \equiv f(x) \qquad (\neq)$$

dip. da ω e Ω

Le soluz.$^{\text{ni}}$ più semplici dell'eq. $(\neq)$ sono i pti di equil., cioè i c t.c. $f(c) = 0$

$$f(x) = 0 \; : \; \Omega^2\operatorname{sen}x\left(\cos x - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) = 0$$

$\rightarrow$ $c_1 = 0$, $c_2 = \pi$ $\leftarrow$ esistono sempre $\forall$ valore dei parametri ω, Ω.

$$c_{3,4} = \pm \arccos\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) \quad \leftarrow \text{ esistono solo se } \frac{\omega^2}{\Omega^2} \leq 1$$

$\omega^2 \leq \Omega^2 \longrightarrow$ 4 pti equil.

$\omega^2 > \Omega^2 \longrightarrow$ 2 pti equil.

Studiamo la stabilità di questi pti di equil.

$$V(x) = mg(1-\cos x)\ell + \frac{1}{2}k\ell^2\cos^2 x =$$

$$= m\ell^2\left[(1-\cos x)\omega^2 + \frac{\Omega^2}{2}\cos^2 x\right]$$

$c_1 = 0$

$c_2 = \pi$

$\cos(c_{3,4}) = \frac{\omega^2}{\Omega^2}$

$$V'(x) = m\ell^2\left[\omega^2 \operatorname{sen} x - \Omega^2 \cos x \operatorname{sen} x\right]$$

$$V''(x) = m\ell^2\left[\omega^2\cos x - \Omega^2\cos^2 x + \Omega^2 \underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{1-\cos^2 x}\right] = m\ell^2\left[\omega^2\cos x - 2\Omega^2\cos^2 x + \Omega^2\right]$$

$$V''(c_1) = m\ell^2\left[\underline{\omega^2 - \Omega^2}\right]$$

$$V''(c_2) = m\ell^2\left[-\omega^2 - \Omega^2\right] < 0$$

$$V''(c_{3,4}) = m\ell^2\left[\cancel{\omega^2\frac{\omega^2}{\Omega^2}} - \cancel{2}\,\Omega^2\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)^2 + \Omega^2\right]$$

$$= m\ell^2\left[\Omega^2 - \frac{\omega^4}{\Omega^2}\right] = \frac{m\ell^2}{\Omega^2}\left[\Omega^4 - \omega^4\right] =$$

$$= \frac{m\ell^2}{\Omega^2}\left(\underline{\Omega^2 - \omega^2}\right)\left(\Omega^2 + \omega^2\right)$$

Quando $\omega^2 > \Omega^2$ $\quad c_1$ è MIN $\leftarrow$ stab.

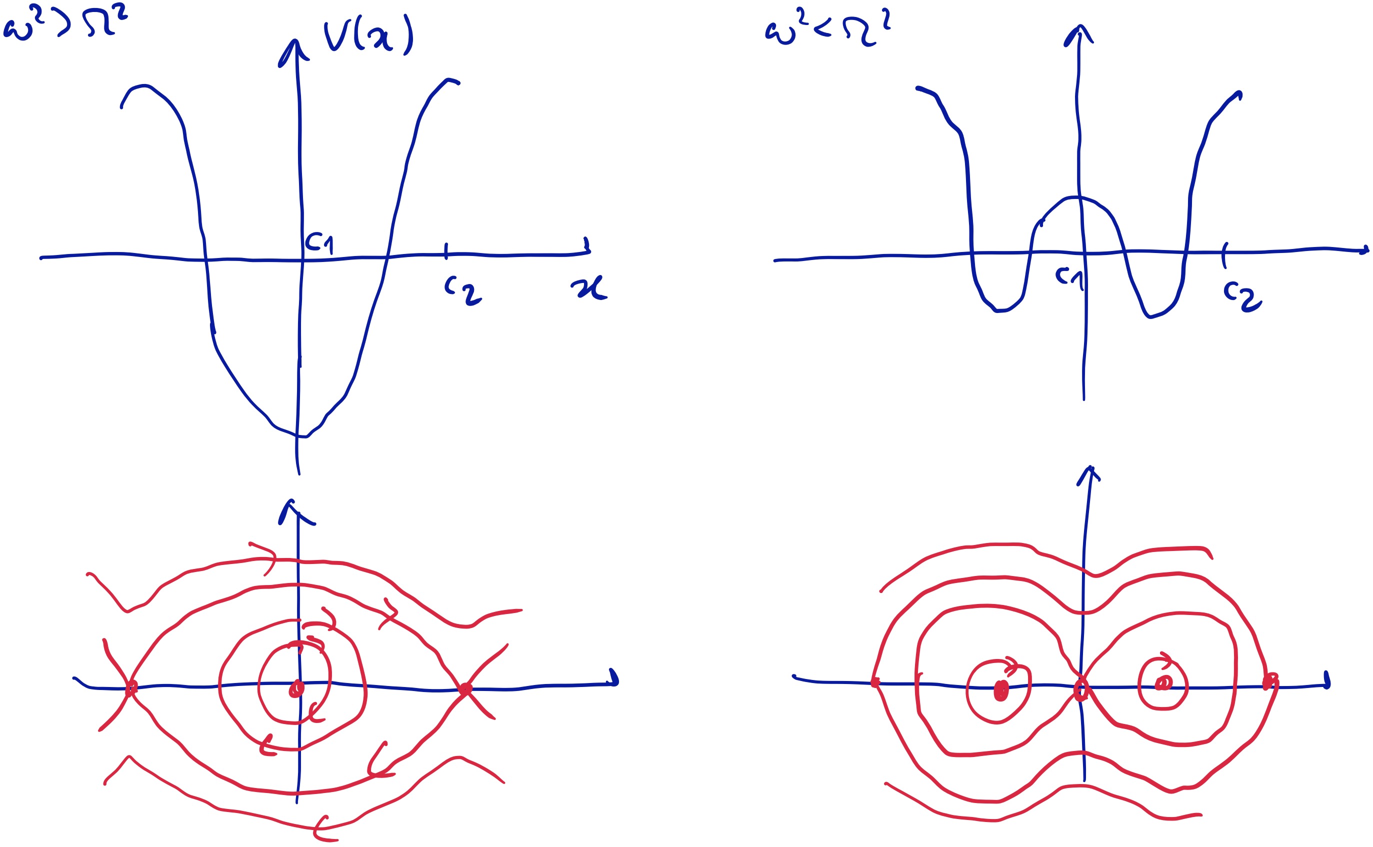
c_2 è MAX $\leftarrow$ instab.

$c_{3,4}$ non sono soluz.

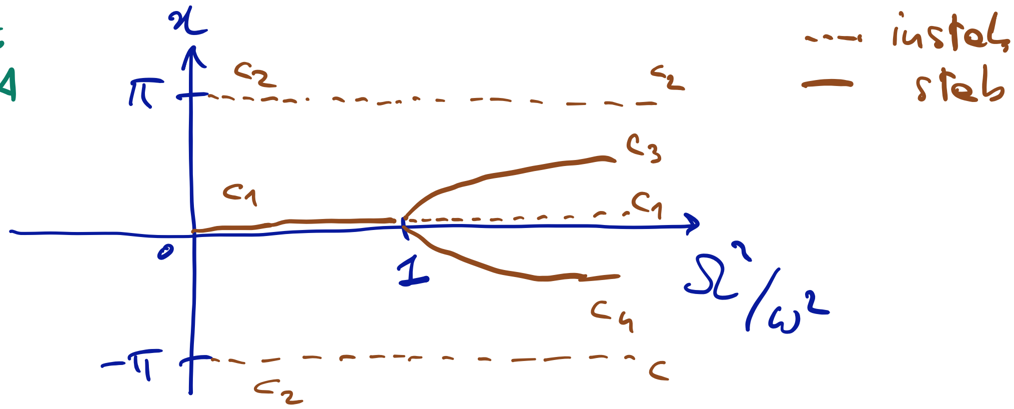
Quando $\omega^2 < \Omega^2$ $\quad c_1$ è MAX $\leftarrow$ inst.

c_2 è MAX $\leftarrow$ inst.

$c_{3,4}$ sono MINIMI $\leftarrow$ stab.



BIFORCAZIONE A FORCHETTA



Al variare del parametro, cambia il numero e il tipo di pti di equilibrio.