Funzioni Primitive (Integrali Indefiniti) (l.v.)

Pur essendo un argomento che fa parte del Calcolo Differenziale, molti autori inseriscono funzioni primitive nel capitolo sul Calcolo Integrale, in quanto esse trovano applicazioni maggiori nel calcolo di integrali definiti e quindi, per esempio, nel calcolo di aree e volumi.

Definizione 1. Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che una funzione $F\colon I \to \mathbb{R}$ è *primitiva* della funzione f sull'intervallo I se F è derivabile in I con

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

Per esempio:

1) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2002$ è primitiva di $f(x) = x$ su $\mathbb{R}$;
2) $F(x) = \log|x|$ è primitiva di $f(x) = \frac{1}{x}$ su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$.
3) $F(x) = \operatorname{tg} x - x$ è primitiva di $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ su ogni intervallo I che non contiene nessuno dei punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (k intero) (*perché?*).

Osserviamo che se F è primitiva di f su I, allora lo è anche su ogni intervallo $J \subseteq I$.

`Domanda.` *Esistono funzioni che non siano primitive di nessuna funzione?*

`Risposta.` Ovviamente, se g non è derivabile su I allora non esiste nessuna funzione su I di cui g sia primitiva.

`Domanda.` *Esistono funzioni che non ammettono pimitiva?*

`Risposta.` Sì. Vedremo che la funzione $\operatorname{sgn} x$ ("signum" di x) non ammette primitiva su nessun intervallo aperto contenente l'origine. (Ciò segue anche dal fatto che una derivata sempre soddisfa la proprietà di Darboux.)

`Domanda.` *Funzione primitiva, se esiste, è unica?*

`Risposta.` No. Se F è una primitiva di f su I, allora lo è anche ogni funzione $G(x) = F(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

`Domanda.` *Ma queste primitive (cioè, quelle della forma $F + c$ dove F è una primitiva di f) sono tutte le primitive della funzione f su I, oppure ve ne possono essere altre?*

`Risposta.` Sono tutte, come afferma il seguente teorema.

Teorema 2. *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione. Se F, G sono due primitive di f su I, allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che*

$$G(x) = F(x) + c \qquad \textit{per ogni } x \in I.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $H = G - F$. Per ogni $x \in I$, $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Basta dedurre da ciò che H è costante su I. (Si osservi che, a tale scopo, non possiamo usare il banale fatto che la derivata di ogni funzione costante è nulla. *Perché?*) Riportiamo due possibili dimostrazioni.

1) Siano $x < y$ due punti qualsiasi di I. Per il teorema di Lagrange (applicato alla funzione H e all'intervallo $[x, y]$), esiste un $z \in (x, y)$ tale che

$$H(y) - H(x) = H'(z)\,(y - x) = 0.$$

Per arbitrarietà di x, y, H è costante su I.

2) Essendo $0 \leq H'(x) \leq 0$ per ogni $x \in I$, la funzione H è monotona non decrescente e contemporaneamente monotona non crescente su I (per un teorema del calcolo differenziale). Per cui H è costante su I. □

Commento 3. L'ipotesi che I sia un intervallo è essenziale nel Teorema 2. Si consideri, per esempio, l'insieme $E = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e la funzione $f(x) = 1/x$, di cui una delle primitive su E è la funzione $F(x) = \log|x|$. Le altre primitive di f su E sono, oltre alle funzioni $F(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$), anche tutte le funzioni

$$G(x) = \begin{cases} \log x + c & \text{per } x > 0 \\ \log(-x) + d & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

con $c, d \in \mathbb{R}$ distinti.

Corollario 4. *La funzione*

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \textit{se } x < 0 \\ 0 & \textit{se } x = 0 \\ 1 & \textit{se } x > 0 \end{cases}$$

non ammette primitiva su nessun intervallo (a, b) con $a < 0 < b$.

Se F fosse tale primitiva, per il teorema 2 (applicato agli intervalli $(a, 0)$ e $(0, b)$) esisterebbero due costanti $c, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} F(x) &= -x + d \qquad \forall\, x \in (a, 0), \\ F(x) &= \;\; x + c \qquad \forall\, x \in (0, b). \end{aligned}$$

F dovrebbe essere continua in 0, per cui necessariamente $c = d$; allora

$$F(x) = |x| + c \qquad \forall\, x \in (a, b),$$

ma tale F non è mai derivabile in 0.

`Domanda.` *C'è almeno qualche condizione sufficiente per l'esistenza di una primitiva?*

`Risposta.` Sì, la continuità, come afferma il seguente teorema che verrà dimostrato nel capitolo sull'integrale di Riemann.

Teorema 5. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo I. Allora f ammette una primitiva su I.*

Esempio 6. La funzione e^{-x^2} ammette una primitiva su $\mathbb{R}$. (Ma è possibile dimostrare che tale primitiva non è esprimibile in termini finiti mediante funzioni elementari.)

`Domanda.` *Perché le primitive vengono spesso chiamate* integrali indefiniti*?*

`Risposta.` Perché, come vedremo nella teoria dell'integrale, per calcolare l'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$ di una funzione f continua su $[a,b]$, è sufficiente trovare una primitiva F (di f su $[a,b]$) e calcolarne l'incremento:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Per questo motivo e per motivi storici, viene usata la seguente notazione.

Notazione 7. Denotiamo con $\int f(x)\,dx$ l'insieme di tutte le primitive della funzione f (su un intervallo I). Perciò, se F è una primitiva di f su I, si ha per il Teorema 2

$$\int f(x)\,dx = \{G\colon I \to \mathbb{R} :\ \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } G(x) = F(x) + c \text{ per ogni } x \in I\}. \tag{1}$$

Per motivi pratici usiamo la seguente scrittura abbreviata

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

al posto della (1).

`Domanda.` *Come si calcolano le primitive?*

`Risposta.` Utilizzando le seguenti proprietà delle primitive (conseguenze dirette di proprietà delle derivate).

Osservazione 8 (Linearità)**.** *Siano f, g due funzioni che ammettono primitive su I. Allora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx\,.$$

Esempio 9.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c\end{aligned}$$

su ogni intervallo non contenente nessuno dei punti $k\frac{\pi}{2}$ (k intero), cioè i punti in cui si annulla $\sin x$ o $\cos x$.

Esempio 10.

$$\int \frac{x\sqrt{x} - x^3 + 2}{x^2}\,dx = \int (x^{-1/2} - x + 2x^{-2})\,dx = \dots \qquad \text{su } (0, +\infty).$$

Esempio 11.

$$\int e^x \operatorname{Sh}(x)\,dx = \int e^x\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx - \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{x}{2} + c$$

su $\mathbb{R}$.

Ricordiamo che una funzione si dice di classe $\mathcal{C}^1$ su I se essa è derivabile con derivata continua su I.

Teorema 12 (Integrazione per parti)**.** *Siano f, g due funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ su I. Allora*

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in I$ si ha

$$\big[\,f(x)\,g(x)\,\big]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\,,$$

per cui

$$\begin{aligned}\int f'(x)\,g(x)\,dx &= \int \Big(\big[f(x)g(x)\big]' - f(x)g'(x)\Big)dx \\ &= f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

□

Esempio 13.

$$\int x\,\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + c \quad \text{su } (0, +\infty).$$

Esempio 14.

$$\begin{aligned}\int \sin x\,e^x\,dx &= -\cos x\,e^x - \int (-\cos x)e^x\,dx \\ &= -\cos x\,e^x + \int \cos x\,e^x\,dx \\ &= -\cos x\,e^x + \sin x\,e^x - \int \sin x\,e^x\,dx\,,\end{aligned}$$

da cui

$$\int \sin x\,e^x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c \qquad \text{su } \mathbb{R}.$$

Teorema 15 (Integrazione per sostituzione I)**.** *Consideriamo intervalli I, J e funzioni f, φ tali che*

$$J \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Supponiamo che $\int f(t)\,dt = F(t) + c$ su I e che φ sia derivabile su J. Allora

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = F\big(\varphi(x)\big) + c \quad \textit{su } J\,;$$

in altre parole,

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \left[\int f(t)\,dt\right]_{t=\varphi(x)}.$$

Dimostrazione. Si ha per ogni $x \in J$

$$\Big[F\big(\varphi(x)\big)\Big]' = F'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x).$$

□

Schematicamente possiamo esprimere l'utilizzo del teorema come segue.

$$\boxed{\begin{aligned}\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx &= \begin{bmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)\,dx \end{bmatrix} = \int f(t)\,dt \\ &= F(t) + c = F\big(\varphi(x)\big) + c.\end{aligned}}$$

Esempio 16.

$$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \log x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{bmatrix} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}\log^2 x + c \qquad \text{su } (0, +\infty).$$

Esempio 17.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx &= \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{bmatrix} \\ &= \int (-1/t)\,dt = -\log|\cos x| + c\end{aligned}$$

su ogni intervallo che non contiene punti del tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (k intero).

Esempio 18. Ecco un esempio che combina due tecniche ("per parti" e "sostituzione").

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x \, dx &= \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx = \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2x \, dx \end{bmatrix} \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + c \qquad \text{su } \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ogni tanto conviene effettuare sostituzioni in integrali indefiniti che non sono della forma $\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx$ come nel Teorema 15. Ci sono due tipi di sostituzioni, che descriveremo formalmente come segue (e dimostreremo nel Teorema 19).

Il primo tipo di tale sostituzione è quello in cui si vuole calcolare la primitiva di una funzione composta senza che vi compaia anche la derivata della funzione interna. Viene utilizzato quando la composizione $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ è semplice (vedi gli esempi 20 e 21):

$$\boxed{\begin{aligned}\int f\big(\varphi(x)\big) \, dx &= \begin{bmatrix} \varphi(x) = t \\ x = \varphi^{-1}(t) \\ dx = \left[\varphi^{-1}(t)\right]' dt = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \, dt \end{bmatrix} \\ &= \left[\int f(t) \, \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(t)\big)} \, dt\right]_{t=\varphi(x)}.\end{aligned}}$$

Il secondo tipo è quello del Teorema 15 letto "alla rovescia", cioè quando si vuole calcolare $\int f(t) \, dt$ usando l'integrale indefinito $\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx$ (se quest'ultimo è più semplice del primo; vedi Esempio 22):

$$\boxed{\int f(t) \, dt = \begin{bmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) \, dx \end{bmatrix} = \left[\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) \, dx\right]_{x=\varphi^{-1}(t)}.}$$

Osserviamo che, per entrambi i casi, le ipotesi dovranno assicurare l'invertibilità di φ e l'esistenza degli integrali indefiniti coinvolti.

Teorema 19 (Integrazione per sostituzione II)**.** *Supponiamo che gli intervalli I, J e le funzioni f, φ soddisfino le seguenti ipotesi:*

(a) $J \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,
(b) *f è continua su I, φ è di classe $\mathcal{C}^1$ su J,*
(c) *$\varphi(J) = I$ e $\varphi'(x) \neq 0$ per ogni $x \in J$.*

Allora valgono le seguenti formule di sostituzione:

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\,dx = \left[\int \frac{f(t)}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(t)\big)}\,dt\right]_{t=\varphi(x)}, \tag{2}$$

$$\int f(t)\,dt = \left[\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx\right]_{x=\varphi^{-1}(t)}. \tag{3}$$

Dimostrazione. Le ipotesi assicurano l'esistenza e derivabilità dell'inversa $\varphi^{-1} : I \to J$ (per il teorema sulla derivata della funzione inversa nel Calcolo Differenziale) e la continuità di tutte le funzioni coinvolte.

Osserviamo che la (2) segue dal Teorema 15:

$$\begin{aligned}\int f\big(\varphi(x)\big)\,dx &= \int \frac{f\big(\varphi(x)\big)}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(\varphi(x))\big)}\,\varphi'(x)\,dx \\ &= \left[\int \frac{f(t)}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(t)\big)}\,dt\right]_{t=\varphi(x)}.\end{aligned}$$

Dimostriamo ora la (3). Sia $G(x)$ una primitiva di $f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$ sull'intervallo J. Vogliamo dimostrare che la funzione $F(t) = G\big(\varphi^{-1}(t)\big)$ è una primitiva di $f(t)$ su I; ma ciò segue facilmente derivando:

$$\begin{aligned}F'(t) &= G'\big(\varphi^{-1}(t)\big)\cdot(\varphi^{-1})'(t) \\ &= f\big(\varphi(\varphi^{-1}(t))\big)\varphi'\big(\varphi^{-1}(t)\big)\cdot\frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(t)\big)} = f(t).\end{aligned}$$

□

Esempio 20. Per calcolare $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$ vogliamo sostituire $t = \sqrt{x} =: \varphi(x)$. Siccome la derivata $\varphi'(x)$ esiste ed e diversa da 0 su $J = (0,+\infty)$, useremo il teorema precedente per $I = \varphi(J) = (0,+\infty)$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx &= \begin{bmatrix}\sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt\end{bmatrix} = \int \frac{t}{1+t^2}\cdot 2t\,dt \\ &= 2\int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}\,dt = 2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt \\ &= 2t - 2\operatorname{arctg} t + c = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + c\end{aligned}$$

su $(0,+\infty)$.

Esempio 21. Con $\varphi(x) = e^x$ (la cui derivata non si annulla mai), possiamo porre $J = \mathbb{R}$, $I = \exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

$$\int f(e^x)\,dx = \begin{bmatrix} e^x = t \\ x = \log t \\ dx = (1/t)dt \end{bmatrix} = \int \frac{f(t)}{t}\,dt$$

Quindi, se $G(t)$ è una primitiva di $f(t)/t$ su $(0, +\infty)$, allora

$$\int f(t)\,dt = G(t) + c = G(e^x) + c$$

su $\mathbb{R}$. (Se G è primitiva di $f(t)/t$ soltanto su un intervallo $I_1 \subset (0, +\infty)$, allora abbiamo calcolato l'integrale indefinito di f sull'intervallo $J_1 = \log(I_1)$.)

Esempio 22. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. In questo esempio, anche se non è ovvio al primo sguardo, conviene sostituire $x = \sin t =: \varphi(t)$. (Si osservi che le variabili x, t hanno ruoli scambiati rispetto al Teorema 19(3).) La derivata $\varphi'(t)$ si annulla nei punti $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k intero). Fra gli intervalli che non contengono tali punti, conviene scegliere l'intervallo $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (quindi $I = \sin(J) = (-1, 1)$) perchè, con tale scelta, $\varphi^{-1} : I \to J$ è la funzione "arcoseno". Prendendo in considerazione che $\cos t > 0$ per $t \in J$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \begin{bmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \\ -\pi/2 < t < \pi/2 \end{bmatrix} = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\,dt \\
&= \int |\cos t| \cdot \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt \\
&= \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + c = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}(\sin t)\sqrt{1-\sin^2 t} + c \\
&= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + c \qquad \text{su } (-1, 1).
\end{aligned}$$

`Domanda.` *Come posso imparare a calcolare le primitive?*

`Risposta.` Facendo **da solo/sola** molti esercizi misti, per imparare a scegliere il metodo (i metodi) di calcolo da applicare. È solo una questione di allenamento e di consapevolezza di quello che si sta facendo.

Buon lavoro!