

Un accenno alla *logica proposizionale*

Eugenio G. Omodeo (15/03/2022 - ...)



- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale
- Apparato deduttivo

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale
- Apparato deduttivo
- Perché non contentarsi di una logica così semplice

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale
- Apparato deduttivo
- Perché non contentarsi di una logica così semplice
- Sintesi di circuiti combinatori (Approfondim. facoltativo)



Sintassi

ALFABETO

Consideriamo una successione (infinita)

$(,), \rightarrow, p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$

di entità distinte una dall'altra, da chiamarsi **simboli**.

ALFABETO

Consideriamo una successione (infinita)

(,) , \rightarrow , p_0 , p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , ...

di entità distinte una dall'altra, da chiamarsi **simboli**.

(E se volessimo ridurci ad un alfabeto finito ?)

STRINGHE

Con la notazione

$$“\sigma_1 \cdots \sigma_h” ;$$

indichiamo semplicemente una sequenza (finita)

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_h \rangle ,$$

ovvero un'*h*-upla, con un numero qualsiasi *h* di componenti,
formata di simboli σ_i

LETTERE PROPOSIZIONALI

Indichiamo con

$f, p, q, r, s, p', q', r', s', p'', \dots$

lettere proposizionali

la successione di 1-uple

“ p_0 ”, “ p_1 ”, “ p_2 ”, “ p_3 ”, “ p_4 ”, “ p_5 ”, “ p_6 ”, ...

L'IMPLICAZIONE MATERIALE

Definiamo l'operazione $\sigma \Rightarrow \rho$ per ogni coppia

$$\sigma = \text{“}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{”}, \quad \rho = \text{“}\rho_1 \cdots \rho_k\text{”}$$

di sequenze finite di simboli ponendo

$$\text{“}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{”} \Rightarrow \text{“}\rho_1 \cdots \rho_k\text{”} \quad =_{\text{Def}} \quad \text{“}(\sigma_1 \cdots \sigma_h \rightarrow \rho_1 \cdots \rho_k)\text{”}$$

ECCO GLI ENUNCIATI:

Definiamo \mathcal{P} il *piú piccolo* soprainsieme di

$$\{ f, p, q, r, s, p', q', r', s', p'', \dots \}$$

tale che per ogni coppia α, β di stringhe in \mathcal{P} anche $\alpha \Rightarrow \beta$ appartenga a \mathcal{P}

Un linguaggio provvisorio per la logica proposizionale è dato dalla seguente grammatica:

REGOLE DI PRODUZIONE EBNF:

$$\langle \text{enunc} \rangle ::= \langle \text{Let} \rangle \mid \langle \text{Cost} \rangle \mid (\langle \text{enunc} \rangle \langle \text{Bop} \rangle \langle \text{enunc} \rangle)$$
$$\langle \text{Let} \rangle ::= p \mid q \mid r \mid s \mid \langle \text{Let} \rangle'$$
$$\langle \text{Cost} \rangle ::= f$$
$$\langle \text{Bop} \rangle ::= \rightarrow$$

ove la categoria sintattica principale è l'*enunciato*, $\langle \text{enunc} \rangle$.

Un linguaggio piú completo per la logica proposizionale è dato dalla grammatica (ove la categoria sintattica principale è $\langle \text{enunc} \rangle$):

REGOLE DI PRODUZIONE EBNF :

$$\langle \text{enunc} \rangle ::= \langle \text{Let} \rangle \mid \langle \text{Cost} \rangle \mid (\langle \text{Uop} \rangle \langle \text{enunc} \rangle) \\ \mid (\langle \text{enunc} \rangle \langle \text{Bop} \rangle \langle \text{enunc} \rangle)$$

$$\langle \text{Let} \rangle ::= p \mid q \mid r \mid s \mid \langle \text{Let} \rangle'$$

$$\langle \text{Cost} \rangle ::= f \mid v$$

$$\langle \text{Uop} \rangle ::= \neg$$

$$\langle \text{Bop} \rangle ::= \& \mid \vee \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \mid \mid \mid \downarrow \mid > \mid +$$

Un linguaggio piú completo per la logica proposizionale è dato dalla grammatica (ove la categoria sintattica principale è $\langle \text{enunc} \rangle$):

REGOLE DI PRODUZIONE EBNF

OPPURE, **AMBIGUAM...**:
$$\langle \text{enunc} \rangle ::= \langle \text{Let} \rangle \mid \langle \text{Cost} \rangle \mid \langle \text{Uop} \rangle \langle \text{enunc} \rangle \\ \mid \langle \text{enunc} \rangle \langle \text{Bop} \rangle \langle \text{enunc} \rangle \mid (\langle \text{enunc} \rangle)$$

$$\langle \text{Let} \rangle ::= p \mid q \mid r \mid s \mid \langle \text{Let} \rangle'$$

$$\langle \text{Cost} \rangle ::= f \mid v$$

$$\langle \text{Uop} \rangle ::= \neg$$

$$\langle \text{Bop} \rangle ::= \& \mid \vee \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \mid \mid \mid \downarrow \mid > \mid +$$

Introduzione di costrutti ‘derivati’

In \mathcal{P} possiamo introdurre come *abbreviazioni* i costrutti di **negazione**, **disgiunzione**, **congiunzione**, **biimplicazione**, ecc.:

$$\neg \alpha \quad =_{\text{Def}} \quad \alpha \Rightarrow f ,$$

$$\vee \quad =_{\text{Def}} \quad \neg f ,$$

$$\alpha \vee \beta \quad =_{\text{Def}} \quad (\neg \alpha) \Rightarrow \beta ,$$

$$\alpha \& \beta \quad =_{\text{Def}} \quad \neg(\alpha \Rightarrow \neg \beta) ,$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta \quad =_{\text{Def}} \quad (\alpha \Rightarrow \beta) \& (\beta \Rightarrow \alpha) ,$$

$$\alpha \mid \beta \quad =_{\text{Def}} \quad \neg(\alpha \& \beta) , \quad \text{“ NAND ”}$$

$$\alpha \downarrow \beta \quad =_{\text{Def}} \quad \neg(\alpha \vee \beta) , \quad \text{“ NOR ”}$$

$$\alpha > \beta \quad =_{\text{Def}} \quad \neg(\alpha \Rightarrow \beta) ,$$

$$\alpha + \beta \quad =_{\text{Def}} \quad \neg(\alpha \leftrightarrow \beta) . \quad \text{“ XOR ”}$$

Come stabilire una corrispondenza biunivoca fra gli enunciati (scritti in sintassi 'grezza') e i numeri naturali:

- richiamare la bijezione $c(\blacksquare, \blacksquare)$ di Cantor fra \mathbb{N}^2 ed \mathbb{N} :

$$2 \cdot c(i, j) = (i + j)^2 + 3 \cdot i + j .$$

- numerare gli enunciati e_0, e_1, e_2, \dots in modo che:

$$\begin{cases} e_{2i} = p_i, \\ e_{2\kappa+1} = (e_i \rightarrow e_j) \text{ dove: } \kappa = c(i, j). \end{cases}$$

ESERCIZIO

Stabilire analoghe codifiche bigettive tra:

- i **predicati del calcolo mappale** e i numeri naturali;
- i **polinomi diofantei** e i numeri naturali.



Semantica

ECCO LA TABELLA DELL'IMPLICAZIONE:

$$\Rightarrow$$

f	f	v
f	v	v
v	f	f
v	v	v

coefficiente binomiale $\binom{j}{i}$						
...	0	0	0	0	0	0
...	0	0	0	0	1	1
...	0	0	0	1	2	1
...	0	0	1	3	3	1
...	0	1	4	6	4	1
...	:	:	:	:	:	:
$j = \dots, 5, 4, 3, 2, 1, 0$						

Osserviamo che ogni funzione

$$\mathcal{J} \in \{f, v\}^{\{P_1, P_2, P_3, \dots\}}$$

ne induce un'altra $\alpha \mapsto \alpha^{\mathcal{J}}$ definita per tutti gli enunciati α , in base alle tabelle dei connettivi proposizionali.

In particolare: $f^{\mathcal{J}} = f$, $(f \Rightarrow f)^{\mathcal{J}} = v$ e,
per ogni enunciato α , $(\alpha \Rightarrow f)^{\mathcal{J}}$ è il contrario di $\alpha^{\mathcal{J}}$

ESEMPIO: VALUTAZIONE DI UN ENUNCIATO IN UN'INTERPRETAZIONE \mathcal{I}

Passando ora, brevemente, alla semantica:

=====

Un'interpretazione \mathcal{I} che mandi q in v , la lettera proposizionale p' in f , la lettera r in v rende

???? l'enunciato $((q \rightarrow p') \rightarrow ((q \rightarrow p') \rightarrow r))$

v	f	v
f	f	v
f	f	v
v		v

vero l'enunciato $((q \rightarrow p') \rightarrow ((q \rightarrow p') \rightarrow r))$

Scriveremo che

$$A \models \vartheta ,$$

(dove $A \subseteq \mathcal{P}$ e $\vartheta \in \mathcal{P}$) se:

in tutte le interpretazioni \mathcal{J} tali che

$$\alpha^{\mathcal{J}} = \top \text{ vale per ogni } \alpha \in A ,$$

vale anche che

$$\vartheta^{\mathcal{J}} = \top .$$



Apparato deduttivo

i.	$(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$
ii.	$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$
iii.	$((\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow (\beta \Rightarrow f)) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

VERIFICA DI TAUTOLOGICITÀ:

Controllare che tutti gli enunciati che ricadono sotto uno qualsiasi di questi schemi risultano veri in ogni possibile assegnamento di valori di verità. Suggerimento: Impiegare la *reductio ad absurdum*.

Un modo di definire le dimostraz. proposizionali

Scriveremo che

$$A \vdash \vartheta ,$$

se c'è una sequenza

$$\delta = \langle \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_h \rangle$$

che costituisce **dimostrazione** di ϑ da A in quanto:

- ① $\delta_h = \vartheta$;
- ② per ogni $i = 0, \dots, h$, accade che δ_i sia un enunciato in \mathcal{P} che o:
 - ★ appartiene ad A , oppure
 - ★ ricade in uno dei tre schemi del lucido precedente, oppure
 - ★ è *preceduto* da due enunciati δ_{j_0} e $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \Rightarrow \delta_i)$, nel senso che $j_0 < i$ e $j_1 < i$.

Esempio di dimostrazione

Dimostriamo in 9 passi l'enunciato $f \Rightarrow p$ da \emptyset , come segue:

	Ax.		Prem.
1. $f \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[ii]		
2. $(f \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow ((f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f))$	[i]	3. $(f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[1, 2]
4. $((f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[iii]	5. $f \Rightarrow f$	[3, 4]
6. $(f \Rightarrow f) \Rightarrow ((p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f))$	[ii]	7. $(p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[5, 6]
8. $((p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow (f \Rightarrow p)$	[iii]	9. $f \Rightarrow p$	[7, 8]



Guardando avanti...

ECCO assiomi propri ESPRESSI IN logica predicativa

$ab \equiv pq \ \& \ ab \equiv rs \rightarrow pq \equiv rs$	(TE)
$ab \equiv cc \rightarrow a = b$	(IE)
$\exists x (B qax \ \& \ ax \equiv bc)$	(SC)
$a \neq b \ \& \ B abc \ \& \ B a'b'c' \ \& \ ab \equiv a'b' \ \& \ bc \equiv b'c' \ \& \ ad \equiv a'd' \ \& \ bd \equiv b'd' \rightarrow dc \equiv c'd'$	(FS)
$B aba \rightarrow a = b$	(IB)
$B apc \ \& \ B bqc \rightarrow \exists x (B pxb \ \& \ B qxa)$	(IP)
$\exists a \exists b \exists c (\neg B abc \ \& \ \neg B bca \ \& \ \neg B cab)$	(Lo ₂)
$p \neq q \ \& \ ap \equiv aq \ \& \ bp \equiv bq \ \& \ cp \equiv cq \rightarrow B abc \vee B bca \vee B cab$	(Up ₂)
$B adt \ \& \ B bdc \ \& \ a \neq d \rightarrow \exists x \exists y (B abx \ \& \ B acy \ \& \ B xty)$	(Eu)
$\exists a \forall x \forall y (x \in X \ \& \ y \in Y \rightarrow B axy) \rightarrow \exists b \forall x \forall y (x \in X \ \& \ y \in Y \rightarrow B xby)$	(Co)

- (TE) Assioma di transitività per l'equidistanza
- (IE) Assioma d'identità per l'equidistanza
- (SC) Assioma di costruzione di segmenti
- (FS) Assioma dei 5 segmenti (variante di Makarios)
- (IB) Assioma d'identità per l'intermedietà
- (IP) Assioma interno di Pasch
- (Lo₂) Assioma 2-dimensionale inferiore
- (Up₂) Assioma 2-dimensionale superiore
- (Eu) Assioma euclideo
- (Co) Assioma di continuità

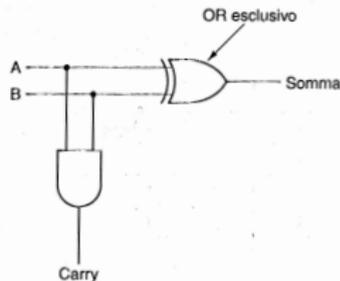


Sintesi di circuiti combinatori

Disegno, minimizzazione,
generazione automatica di
circuiti combinatori

A	B	Somma	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

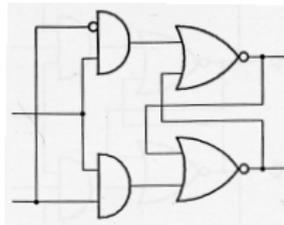
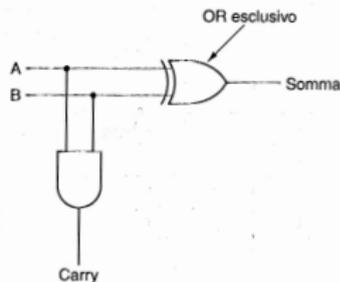
a)



Disegno, minimizzazione,
generazione automatica di
circuiti combinatori¹

A	B	Somma	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

a)

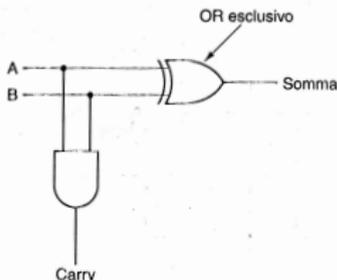


¹Per i circuiti sequenziali, serve di piú. . .

Disegno, minimizzazione,
generazione automatica di
circuiti combinatori

A	B	Somma	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

a)



The Nobel Prize in Physics 1956
William B. Shockley, John Bardeen, Walter H. Brattain

Share this:

The Nobel Prize in Physics 1956



William Bradford Shockley
Prize share: 1/3



John Bardeen
Prize share: 1/3



Walter Houser Brattain
Prize share: 1/3

The Nobel Prize in Physics 1956 was awarded jointly to William Bradford Shockley, John Bardeen and Walter Houser Brattain "for their researches on semiconductors and their discovery of the transistor effect".

Photos: Copyright © The Nobel Foundation

Chiamiamo **funzioni booleane** gli elementi di

$$\mathbb{B} \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{l \in \mathbb{N}} 2^{2^l}$$

Chiamiamo **funzioni booleane** gli elementi di

$$\mathbb{B} \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} 2^{2^\ell}$$

Quale sottoinsieme di \mathbb{B} costituiscono le funzioni specificate dagli enunciati in \mathcal{P} ?

Chiamiamo **funzioni booleane** gli elementi di

$$\mathbb{B} \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} 2^{2^\ell}$$

Quale sottoinsieme di \mathbb{B} costituiscono le funzioni specificate dagli enunciati in \mathcal{P} ?

La risposta è semplice: *tutto quanto* \mathbb{B}

(SEMANTICA:) TABELLE DI VERITÀ

'	"	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f	f	f	&	>	'	<	"	+	∨	↓	↔	¬"	←	¬'	→		∇
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v

(SEMANTICA:) TABELLE DI VERITÀ

'	"	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f	f	f	&	>	'	<	"	+	∨	↓	↔	¬"	←	¬'	→		∇
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	∇	∇	∇	∇	∇	∇	∇	∇
f	∇	f	f	f	f	∇	∇	∇	∇	f	f	f	f	∇	∇	∇	∇
∇	f	f	f	∇	∇	f	f	∇	∇	f	f	∇	∇	f	f	∇	∇
∇	∇	f	∇	f	∇	f	∇	f	∇	f	∇	f	∇	f	∇	f	∇

zOOMando entro
questa tavola, tro-
viamo che:

¬		
0		1
1		0

(SEMANTICA:) TABELLE DI VERITÀ

'	"	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f	f	f	&	>	'	<	"	+	∨	↓	↔	¬"	←	¬'	→		∇
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v

zOOMando entro
questa tavola, tro-
viamo che:

		&		
¬		0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
		1	1	1

(SEMANTICA:) TABELLE DI VERITÀ

'	"	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		f	&	>	'	<	"	+	∨	↓	↔	¬"	←	¬'	→		∇
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v

zOOMando entro
questa tavola, tro-
viamo che:

¬	
0	1
1	0

&		
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

∨		
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(SEMANTICA:) TABELLE DI VERITÀ

'	"	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		f	&	>	'	<	"	+	∨	↓	↔	¬"	←	¬'	→		∇
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v

zOOMando entro
questa tavola, tro-
viamo che:

¬	
0	1
1	0

&		
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

∨		
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

→		
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

In \mathcal{P} possiamo introdurre come *abbreviazioni* i costrutti di **negazione**, **disgiunzione**, **congiunzione**, **biimplicazione**:

$$\begin{aligned}\neg\alpha &=_{\text{Def}} \alpha \Rightarrow f, \\ \alpha \vee \beta &=_{\text{Def}} (\neg\alpha) \Rightarrow \beta, \\ \alpha \&\beta &=_{\text{Def}} \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta), \\ \alpha \leftrightarrow \beta &=_{\text{Def}} (\alpha \Rightarrow \beta) \& (\beta \Rightarrow \alpha).\end{aligned}$$

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{0, 1\}^{\ell} \longrightarrow \{0, 1\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1, \dots, p_{\ell}, \neg p_1, \dots, \neg p_{\ell}.$$

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{0, 1\}^{\ell} \longrightarrow \{0, 1\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1, \dots, p_{\ell}, \neg p_1, \dots, \neg p_{\ell}.$$

Casi basilari:

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{0, 1\}^{\ell} \longrightarrow \{0, 1\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1, \dots, p_{\ell}, \neg p_1, \dots, \neg p_{\ell}.$$

Casi basilari:

- la costante 0 (= f) può essere vista come disgiunzione vuota

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{0, 1\}^{\ell} \longrightarrow \{0, 1\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1, \dots, p_{\ell}, \neg p_1, \dots, \neg p_{\ell}.$$

Casi basilari:

- la costante 0 (= f) può essere vista come disgiunzione vuota
- la costante 1 (= v) come congiunzione vuota

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{0, 1\}^{\ell} \longrightarrow \{0, 1\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1, \dots, p_{\ell}, \neg p_1, \dots, \neg p_{\ell}.$$

Casi basilari:

- la costante 0 (= f) può essere vista come disgiunzione vuota
- la costante 1 (= v) come congiunzione vuota
- un letterale (o semplice lettera) proposizionale, preso a sé, vale sia come congiunzione che come disgiunzione

A titolo di esempio, esprimiamo in **forma disgiuntiva normale** una celebre funzione booleana Φ , la **Implicazione ‘materiale’**

$$\begin{array}{cc|c} \rightarrow & & \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Prendendo le righe a risultato 1, leggiamo direttamente:

$$\neg p_1 \ \& \ \neg p_2 \ \vee \ \neg p_1 \ \& \ p_2 \ \vee \ p_1 \ \& \ p_2$$

Fra le altre, ecco una codifica ben piú sbrigativa:

$$\neg p_1 \ \vee \ p_2$$



$$\neg(\alpha_1 \& \dots \& \alpha_n) = (\neg\alpha_1 \vee \dots \vee \neg\alpha_n)$$
$$\neg(\beta_1 \vee \dots \vee \beta_m) = (\neg\beta_1 \& \dots \& \neg\beta_m)$$

Augustus De Morgan
1806–1871

A titolo di esempio, esprimiamo in **forma congiuntiva normale** una celebre funzione booleana Φ , la **Implicazione 'a tre vie'**

seAlloraAltrim			
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Prendendo le righe a risultato 0, leggiamo direttamente:

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \& (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \& (\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3) \& (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3)$$

Fra le altre, ecco una codifica ben piú sbrigativa:

$$(\neg p_1 \vee p_2) \& (p_1 \vee p_3)$$

Mappe K per la sintesi di enunciati

$p \backslash q$	0	1
0	0	1
1	2	3

$p \backslash qr$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$sp \backslash qr$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Mappe K (provvisoriamente vuote) per funzioni booleane a 2,3,4 operandi

ESERCIZIO

Rappresentare tramite mappa \mathbf{K} una $\Phi(p, q, r, s)$ tale che

$$\Phi(f, f, f, v) = \Phi(f, f, v, f) = \Phi(f, f, v, v) =$$

$$\Phi(f, v, f, f) = \Phi(f, v, f, v) = \Phi(f, v, v, f) =$$

$$\Phi(f, v, v, v) = \Phi(v, f, f, v) = v$$

e che

$$\Phi(v, f, f, f) = \Phi(v, f, v, f) = \Phi(v, v, f, f) =$$

$$\Phi(v, v, v, f) = \Phi(v, v, v, v) = f,$$

utilizzando:

✓ per indicare il risultato v ,

? per risultato arbitrario,

nessun contrassegno per il risultato f

ESERCIZIO

Rappresentare tramite mappa **K** una $\Phi(p, q, r, s)$ tale che

$$\begin{aligned}\Phi(f, f, f, v) &= \Phi(f, f, v, f) = \Phi(f, f, v, v) = \\ \Phi(f, v, f, f) &= \Phi(f, v, f, v) = \Phi(f, v, v, f) = \\ \Phi(f, v, v, v) &= \Phi(v, f, f, v) = v\end{aligned}$$

e che

$$\begin{aligned}\Phi(v, f, f, f) &= \Phi(v, f, v, f) = \Phi(v, v, f, f) = \\ \Phi(v, v, v, f) &= \Phi(v, v, v, v) = f,\end{aligned}$$

utilizzando:

✓ per indicare il risultato v ,

? per risultato arbitrario,

nessun contrassegno per il risultato f

Poi, sfruttando la mappa, esprimere una tale Φ

utilizzando *al minimo* i connettivi \neg , $\&$, \vee .

SOLUZIONE DEL PRECEDENTE ESERCIZIO

$pq \backslash rs$	00	01	11	10
00	?	✓	✓	✓
01	✓	✓	✓	✓
11		?		
10		✓	?	

SOLUZIONE DEL PRECEDENTE ESERCIZIO

$pq \backslash rs$	00	01	11	10
00	?	✓	✓	✓
01	✓	✓	✓	✓
11		?		
10		✓	?	

Da questa mappa risulta un enunciato che descrive la Φ :

$$\neg p \vee (s \& \neg r) \vee (q \& \neg q)$$

ESERCIZIO DEL TUTTO SIMILE AL PRECEDENTE

$pq \backslash rs$	00	01	11	10
00	✓	✓	✓	✓
01		?		
11		✓	?	
10	?	✓	✓	✓

ESERCIZIO DEL TUTTO SIMILE AL PRECEDENTE

$pq \backslash rs$	00	01	11	10
00	✓	✓	✓	✓
01		?		
11		✓	?	
10	?	✓	✓	✓

Trovare un enunciato che esprima una funzione booleana conforme a questa mappa, utilizzando *al minimo* i connettivi \neg , $\&$, \vee .