ANALISI QUANTITATIVA

Siamo partiti considerando un'eq. diff. del 2° ord $\ddot{x} = -V'(x)$; vediamo come semplificarla a una 1° ord. usando una COST. del MOTO!

$$E(x,v) \equiv T(v) + V(x) \quad \text{cost. del moto}$$

traiettorie giacciono sulle curve di livello

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x) = E$$

cost.

(cioè se $x(t)$ è una traiettoria, allora
$$\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + V(x(t)) = E \quad)$$

Questo ci da relazione tra le funzioni v(t) e x(t)

possiamo invertirla:

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

← deve valere per ogni traiettoria

segno dip. dal verso di percorrenza (scegliamo +)

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x(t)))}$$

cost.

← Eq diff. 1° ordine in $x(t)$

(Famiglia a 1 parametro (E) di eq. diff. del 1° ordine)

Se qta è soddisfatta anche eq moto soddisfatta

Qta eq. implica la seguente eq. diff. in la funzione $t(x)$ che è l'inversa di $x(t)$

$$(x(t(x)) = x)$$

$$\dot{x} \cdot \frac{dt}{dx} = 1$$

$$\frac{dt}{dx}(x) = \frac{1}{\dot{x}(t(x))} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

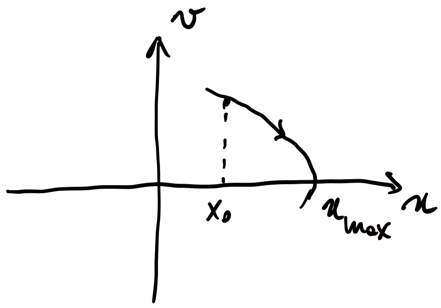
$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

→ integrazione $$t(x) - t(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}}$$ $x_0 = x(t_0)$

→ invertiamo $x(t)$

"Risolvere l'eq. diff. originaria per QUADRATURE"

- Nei pti di inversione $V(x) = E$ e l'integrando diverge
  ⇝ cosa succede all'integrale ?



$$t(x_{max}) = t_0 + \int_{x_0}^{x_{max}} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))}}$$

Mi concentro sul caso $|x_{max} - x_0| \ll 1$ →

→ posso espandere $V(\tilde{x})$ attorno a x_{max}

$$V(\tilde{x}) = \overset{\overset{E}{\parallel}}{V(x_{max})} + V'(x_{max})(\tilde{x} - x_{max}) + O(|\tilde{x} - x_{max}|^2)$$

denom : $$\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\tilde{x}))} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{V'(x_{max})} \sqrt{x_{max} - \tilde{x}}$$

cambiamo variab. integraz. $\xi = x_{max} - \tilde{x}$

$$t(x_{max}) = t_0 + \int_{0}^{x_{max} - x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2V'(x_{max})}{m}}\, \xi^{1/2}}$$

$\frac{1}{\xi^{1/2}}$ è integrabile per $\xi \sim 0$

⇒ il pto arriva in x_{max} (pto invers.) in un tempo FINITO.

- Nei pti di massimo di $V(x)$ con $E = V(c)$ $\quad$ ($x=c$)

$$t(c) = t_0 + \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(\tilde{x})\right)}} \qquad |c - x_0| \ll 1$$

$$\to V(\tilde{x}) = \underset{\overset{\shortparallel}{E}}{V(c)} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{V'(c)}(\tilde{x}-c) + \frac{1}{2}V''(c)(\tilde{x}-c)^2 + \dots$$

$V''(c) < 0$

$$t(c) = t_0 + \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{1}{m}\left(-V''(c)\right)(\tilde{x}-c)^2}} = t_0 + \frac{1}{\sqrt{-\frac{V''(c)}{m}}} \int_{x_0}^{c} \frac{d\tilde{x}}{c - \tilde{x}} =$$

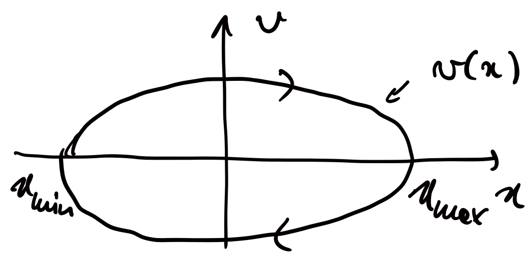
$$\underset{\xi \equiv c - \tilde{x}}{=} t_0 + \frac{1}{\sqrt{-\frac{V''(c)}{m}}} \int_0^{c - x_0} \frac{d\xi}{\xi}$$

$\frac{1}{\xi}$ non è integrabile a $\xi \sim 0$

$\Rightarrow$ INTEGRALE DIVERGE

$\Rightarrow$ il pto materiale arriva al pto di equil. (instab.) in un TEMPO INFINITO

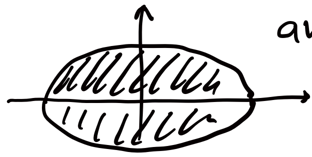
- Moti periodici



Periodo T_E è il tempo impiegato per andare da x_{min} a x_{max} e ritorno

$$T_E = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(\tilde{x})\right)}}$$

Def. $$S_E = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{\frac{2}{m}(E-V(\tilde{x}))}\, d\tilde{x} = 2\int_{x_{min}(E)}^{x_{max}(E)} v(\tilde{x};E)\, d\tilde{x}$$



area dentro la curva

E appare sia in integrando che in estremi d'integrazione

$\hookrightarrow$ S_E è funz. del tipo $S_E = F(E, x_{max}(E), x_{min}(E))$

Ora vogliamo vedere cosa otteniamo se deriviamo S_E rispetto E.

$$\frac{dS_E}{dE} = \frac{\partial F}{\partial E} + \frac{\partial F}{\partial x_{max}}\frac{dx_{max}}{dE} + \frac{\partial F}{\partial x_{min}}\frac{dx_{min}}{dE}$$

$$m\frac{dS_E}{dE} = m\, 2\frac{d}{dE}\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}\, dx + 2\sqrt{\frac{2}{m}\underbrace{(E-V(x_{max}))}_{=0}}\,\frac{dx_{max}}{dE} - 2\sqrt{\frac{2}{m}\underbrace{(E-V(x_{min}))}_{=0}}\,\frac{dx_{min}}{dE}$$

$$= 2\cancel{m}\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1\cdot \cancel{2}/\cancel{m}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}\, dx = T_E$$

$$T_E = m\frac{dS_E}{dE}$$ dove S_E è l'area dentro la curva chiusa nel piano di fase

ES.) osc. arm. $S_E = \text{Area ellisse} = \pi\frac{2E}{m\omega}$

$x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$

$v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$

$$T_E = m\frac{dS_E}{dE} = \frac{2\pi}{\omega}$$