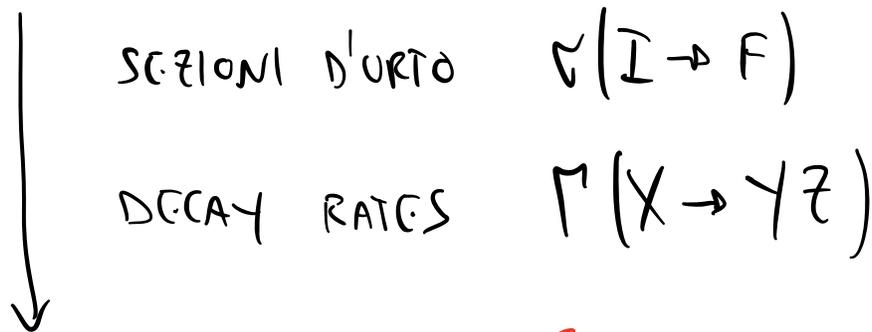


# Formula di riduzione di LSZ [17.5.1.3, S.6.1, E.23] M.5.2

La formula di riduzione di LSZ (Lehmann-Symanzik-Zimmermann) mette in relazione gli elementi di matrice  $S$  con funzioni di Green dei campi quantistici  $\phi(x)$

## OSSERVABILI



## ELEMENTI DI MATRICE $S$

LSZ

$$\langle f | i \rangle_{\text{out}} = \langle f | S | i \rangle_{\text{in}}$$

stati  $\downarrow$  generati dagli operatori asintotici  $\phi_{\text{in/out}}(x)$

## FUNZIONI DI GREEN DEL CAMPO INTERAGENTE

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \} | 0 \rangle$$

$$S_{i \rightarrow f} = \langle P_1, \dots, P_n | q_1, \dots, q_m \rangle_{in}$$

[Se. 2.2, W. 4.3]

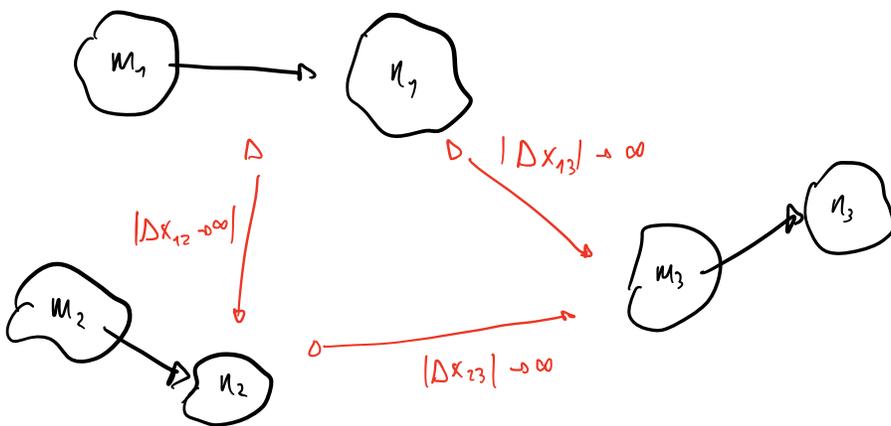
Due eventi a distanza di tipo spazio  $\Delta x^2 < 0$  non possono essere in correlazione tra loro.

Nel contesto degli elementi di matrice  $S$ , questo viene chiamato **PRINCIPIO DI CLUSTER DECOMPOSITION**.

Se il processo  $\{m\} \rightarrow \{n\}$  può essere scomposto in  $N$  sottoprocessi separati  $\{m_i\} \rightarrow \{n_i\}$ ,  $i=1, \dots, N$  che avvengono a grandi distanza tra loro,

allora dobbiamo avere che  $S_{m \rightarrow n}$  si fattorizza in:

$$S_{m \rightarrow n} = \prod_{i=1}^N S_{m_i \rightarrow n_i} \quad (*)$$



(\*) Implica che la probabilità si fattorizza e che quindi i processi distanti non sono correlati.

Questo può essere riformulato in termini delle parti connesse della matrice  $S$ :  $S_{m \rightarrow n}^c$

A livello perturbativo  $S_{m \rightarrow n}^c$ : **DIAGRAMMI CONNESSI**.

Può essere definita anche ricorsivamente:

$$S_{p \rightarrow p'} = S_{p \rightarrow p'}^c = \delta(p-p')$$

$$\Rightarrow \delta(p-p') = \delta(\vec{p}-\vec{p}') \delta_{s,s'} \delta_{n,n'}$$

include momento, spin e tipo di particella

$$S_{12 \rightarrow 1'2'} = S_{12 \rightarrow 1'2'}^c + S_{1 \rightarrow 1'}^c S_{2 \rightarrow 2'}^c \pm S_{1 \rightarrow 2'}^c S_{2 \rightarrow 1'}^c$$

etc...  $\pm \begin{cases} \text{bosoni} \\ \text{fermioni} \end{cases}$

**cluster decomposition**  $\longleftrightarrow$  **IMPLICATA**  $\boxed{S_{m \rightarrow n}^c \rightarrow 0}$  se una delle  $m+n$  particelle è molto lontana dalle altre.

[Vedi referenza per la dimostrazione]

Affinché questa condizione sia valida, nello spazio dei momenti ci può essere una  $\delta^4(\sum_i p_i - \sum_j p'_j)$  solo per la conservazione del momento TOTALE:

$$S_{m \rightarrow n}^c(p_1 \dots p_m, p'_1 \dots p'_n) = (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i - \sum_j p'_j) A^c(p_1 \dots p_m, p'_1 \dots p'_n)$$

$$S_{m \rightarrow n}^c(x_1 \dots x_m, x'_1 \dots x'_n) = \int \prod_{i=1}^m d^3 p_i \int \prod_{j=1}^n d^3 p'_j e^{i(p \cdot x - p' \cdot x')} S_{m \rightarrow n}^c(p_1 \dots p_m, p'_1 \dots p'_n)$$

Se  $A^c$  contenesse una  $\delta$  di altri momenti, potrei spostare le rispettive  $\{x, x'\}$  lontano dalle altre senza influire sulla trasformata di Fourier

# Formula di riduzione di LSZ

$$\sum_{i \rightarrow f}^c =_{\text{out}} \langle p_1, \dots, p_n | q_1, q_2, \dots, q_m \rangle_{\text{in}} = \sqrt{2\omega_{q_1}} \text{cut} \langle p_1, \dots, p_n | a_{\text{in}}^\dagger(q_1) | q_2, \dots, q_m \rangle_{\text{in}}$$

Usiamo:

$$\sqrt{2\omega_{q_1}} a_{\text{in/out}}^\dagger(q_1) = -i \int_t d^3x e^{-iq_1 x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi_{\text{in/out}}(x) \quad \text{R any } t$$

$$\sqrt{2\omega_{q_1}} a_{\text{in/out}}(q_1) = i \int_t d^3x e^{iq_1 x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi_{\text{in/out}}(x) \quad \checkmark \text{ since it is independent of time}$$

$$\sum_{i \rightarrow f}^c = -i \int_t d^3x e^{-iq_1 x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \text{cut} \langle p_1, \dots, p_n | \phi_{\text{in}}(x) | q_2, \dots, q_m \rangle_{\text{in}}$$

Dimostrazione:

$$\phi_{\text{in}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} (a(\vec{p})_{\text{in}} e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})_{\text{in}} e^{+ipx})$$

$$\partial_0 \phi_{\text{in}}(x) = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2}} \sqrt{\omega_p} (-a(\vec{p})_{\text{in}} e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})_{\text{in}} e^{ipx})$$

$$\partial_0 e^{-iq_1 x} = -i\omega_{q_1} e^{-iq_1 x}$$

$$\frac{1}{i} \int_t d^3x \left( e^{-iq_1 x} \partial_0 \phi_{\text{in}}(x) - \phi_{\text{in}}(x) \partial_0 e^{-iq_1 x} (-i\omega_{q_1}) \right) =$$

$$= \frac{1}{i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3x}{\sqrt{2}} \left[ i\sqrt{\omega_p} (-a(\vec{p}) e^{-i(p+q_1)x} + a^\dagger(\vec{p}) e^{i(p-q_1)x}) + i \frac{\omega_{q_1}}{\sqrt{\omega_p}} (a(\vec{p}) e^{-i(p+q_1)x} + a^\dagger e^{i(p-q_1)x}) \right]$$

$$= \int \frac{d^3p}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega_{q_1}} \left[ -\cancel{\delta(p+q_1)} a(\vec{p}) + a^\dagger(\vec{p}) \delta(p-q_1) + a(\vec{p}) \cancel{\delta(p+q_1)} + a^\dagger(\vec{p}) \delta(p-q_1) \right] =$$

$$= \sqrt{2\omega_{q_1}} a^\dagger(q_1) \quad \& \text{ it is independent of time}$$

Scegliendo  $t \rightarrow -\infty$  possiamo usare  $\langle \beta | \phi(x) | \alpha \rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} Z^{1/2} \langle \beta | \phi_{in}(x) | \alpha \rangle$

$$\sum_{i \rightarrow f}^C = -i \lim_{t \rightarrow -\infty} Z^{-1/2} \int d^3x e^{-iq_1 x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \langle P_{1\dots} | \phi(x) | q_{2\dots} \rangle_{in}$$

Usiamo il fatto che per un integrale:

$$\left( \lim_{t \rightarrow +\infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x f(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{d}{dt} \int d^3x f(\vec{x}, t)$$

$$\sqrt{2\omega_{q_1}} \langle P_{1\dots} | a_{out}(q_1) | q_{2\dots} \rangle_{in}$$

$$\sum_{i \rightarrow f}^C = -i \lim_{t \rightarrow +\infty} Z^{-1/2} \int d^3x e^{-iq_1 x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \langle P_{1\dots} | \phi(x) | q_{2\dots} \rangle_{in}$$

$$+ i Z^{-1/2} \int d^4x \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \left[ e^{-iq_1 x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \langle P_{1\dots} | \phi(x) | q_{2\dots} \rangle_{in} \right]$$

$$i Z^{-1/2} \int d^4x \langle P_{1\dots}, P_n | \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \left( e^{-iq_1 x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \phi(x) - \phi(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 e^{-iq_1 x} \right) | q_{2\dots}, q_m \rangle$$

$$= e^{-iq_1 x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0^2 \phi(x) - \phi(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0^2 e^{-iq_1 x} =$$

$$= e^{-iq_1 x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0^2 \phi(x) - \phi(x) (\nabla^2 - m^2) e^{-iq_1 x} = e^{-iq_1 x} (\square + m^2) \phi(x)$$

$\leftarrow q_1^2 = m^2$

Assumendo che  $\phi(x)$  sia confinato in un pacchetto d'onda localizzato nello spazio possiamo integrare per parti  $\nabla^2$ .

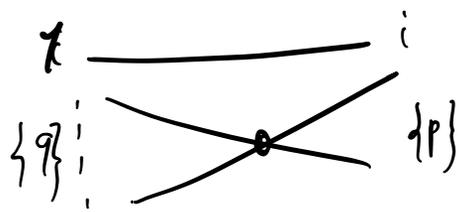
$$\sum_{i \rightarrow f}^C = \sqrt{2\omega_{q_1}} \langle P_{1\dots}, P_n | a_{out}(q_1) | q_{2\dots}, q_m \rangle_{in} +$$

$$+ i Z^{-1/2} \int d^4x e^{-iq_1 x} (\square + m^2) \langle P_{1\dots}, P_n | \phi(x) | q_{2\dots}, q_m \rangle_{in}$$

Il primo termine nel membro di destra è non-zero solo quando una particella non interviene nello scattering e quindi ha momento invariato:

$$\langle p_i | = \sqrt{2\omega_{p_i}} \langle 0 | a_{out}(p_i)$$

$$\langle p_1, \dots, p_n | a_{out}^\dagger(q_1) | q_2, \dots, q_m \rangle_{in} = \sum_{i=1}^n 2\omega_{q_1} (2\pi)^3 \delta^3(p_i - q_1) \langle p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n | q_2, \dots, q_m \rangle_{in}$$



→ DIAGRAMMI SCONNESSI

Dato che ogni  $q_i \neq p_i \rightarrow$  nessun diag. sconnesso.

← connessa  $\equiv i\tilde{T}_{i \rightarrow f}$

$$\Rightarrow S_{i \rightarrow f}^c \equiv \langle p_1, \dots, p_n | q_1, \dots, q_m \rangle_{in} =$$

$$= i Z^{-1/2} \int d^4x_1 e^{-iq_1 x_1} (\square_1 + m^2) \langle p_1, \dots, p_n | \phi(x_1) | q_2, \dots, q_m \rangle_{in}$$

Iteriamo questa procedura eliminando tutti gli stati in e out in favore dei campi  $\phi(x)$ .

Procediamo con  $\langle a_{\text{out}}(p_1) | = \sqrt{2\omega_{p_1}} \langle 0 | a_{\text{out}}(p_1) :$

$$\langle a_{\text{out}}(p_1, \dots, p_n | \phi(x) | a_{\text{in}}(p_1, \dots, p_m) \rangle = \sqrt{2\omega_{p_1}} \langle a_{\text{out}}(p_1, \dots, p_n | a_{\text{out}}(p_1) \phi(x_1) | a_{\text{in}}(p_1, \dots, p_m) \rangle$$

come prima

$$= \lim_{y_1^0 \rightarrow +\infty} i\tau^{-1/2} \int d^3y_1 e^{i p_1 y_1} \int_0^{\infty} \langle a_{\text{out}}(p_1, \dots, p_n | \phi(y_1) \phi(x_1) | a_{\text{in}}(p_1, \dots, p_m) \rangle \quad (1)$$

Per poter usare la stessa strategia di prima ci serve che  $a_{\text{in}}(p_1)$  dal limite inferiore di integrazione si applichi a  $|a_{\text{in}}(p_1, \dots, p_m)\rangle$  per dare i termini sconnessi.

$$\left( \lim_{t \rightarrow +\infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x f(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{d}{dt} \int d^3x f(\vec{x}, t)$$

Definiamo quindi il **T-PRODOTTO**

$$T \{ \phi(y) \phi(x) \} \equiv \begin{cases} \phi(y) \phi(x) & \text{se } y^0 > x^0 \\ \phi(x) \phi(y) & \text{se } x^0 > y^0 \end{cases} = \phi(y) \phi(x) \theta(y^0 - x^0) + \phi(x) \phi(y) \theta(x^0 - y^0)$$

e consideriamo, come prima, l'integrale:

$$i\tau^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1^0 \int d^3y_1 \int_0^{\infty} \langle a_{\text{out}}(p_1, \dots, p_n | T \{ \phi(y_1) \phi(x_1) \} | a_{\text{in}}(p_1, \dots, p_m) \rangle =$$

$$= \lim_{y_1^0 \rightarrow +\infty} i\tau^{-1/2} \int d^3y_1 e^{i p_1 y_1} \int_0^{\infty} \langle a_{\text{out}}(p_1, \dots, p_n | \phi(y_1) \phi(x_1) | a_{\text{in}}(p_1, \dots, p_m) \rangle$$

$$- \lim_{y_1^0 \rightarrow -\infty} i\tau^{-1/2} \int d^3y_1 e^{i p_1 y_1} \int_0^{\infty} \langle a_{\text{out}}(p_1, \dots, p_n | \phi(x_1) \phi(y_1) | a_{\text{in}}(p_1, \dots, p_m) \rangle$$

$$= \lim_{y_1^0 \rightarrow +\infty} i\tau^{-1/2} \int d^3y_1 e^{i p_1 y_1} \int_0^{\infty} \langle a_{\text{out}}(p_1, \dots, p_n | \phi(y_1) \phi(x_1) | a_{\text{in}}(p_1, \dots, p_m) \rangle \leftarrow \text{termine in (1)}$$

$$- \langle a_{\text{out}}(p_1, \dots, p_n | \phi(x_1) a_{\text{in}}(p_1) | a_{\text{in}}(p_1, \dots, p_m) \rangle$$

Possiamo quindi riscrivere (1) come:

$$\begin{aligned}
 (1) &= \lim_{y_1^0 \rightarrow +\infty} i z^{-1/2} \int d^3 y_1 e^{i p_1 y_1} \int_0^{\infty} dt \langle p_{2, \dots, p_n} | T \{ \phi(y_1) \phi(x_1) \} | q_{2, \dots, q_m} \rangle \\
 &= \langle p_{2, \dots, p_n} | \phi(x_1) a_{\alpha}(p_1) | q_{2, \dots, q_m} \rangle_{in} + \leftarrow \text{termini sconnessi} \\
 &+ i z^{-1/2} \int d^4 y_1 e^{i p_1 y_1} (\Delta_{y_1} + m^2) \langle p_{2, \dots, p_n} | T \{ \phi(y_1) \phi(x_1) \} | q_{2, \dots, q_m} \rangle_{in}
 \end{aligned}$$

Mettendo insieme quanto ottenuto finora:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \rightarrow f}^c \langle p_{1, \dots, p_n} | q_1, q_2, \dots, q_m \rangle_{in} &= (i z^{-1/2})^2 \int d^4 x_1 e^{-i q_1 x_1} (\Delta_{x_1} + m^2) \int d^4 y_1 e^{i p_1 y_1} (\Delta_{y_1} + m^2) \\
 &\langle p_{2, \dots, p_n} | T \{ \phi(y_1) \phi(x_1) \} | q_{1, \dots, q_m} \rangle_{in}
 \end{aligned}$$

Iterando: Formula di riduzione di Lehmann-Symanzik-Zimmermann

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \rightarrow f}^c \langle p_{1, \dots, p_n} | q_1, q_2, \dots, q_m \rangle_{in} &= (i z^{-1/2})^{n+m} \int \prod_{i=1}^m d^4 x_i \prod_{j=1}^n d^4 y_j e^{i(p_j y_j - q_i x_i)} \\
 &\times (\Delta_{x_1} + m^2) \dots (\Delta_{y_n} + m^2) \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(y_n) \} | 0 \rangle^c
 \end{aligned}$$

↑  
funzione di Green  
connessa

La teoria dei campi si occupa di calcolare le funzioni di Green  $\langle 0|T\{\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\}|0\rangle$

Definiamo la **funzione di Green** a  $N$  punti

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle 0|T\{\varphi(x_1)\dots\varphi(x_N)\}|0\rangle$$

e la sua trasformata di Fourier  $\tilde{G}^{(N)}$

$$\tilde{G}^{(N)}(k_1, \dots, k_N) = \int \prod_{i=1}^N dx_i e^{-i\sum_{i=1}^N x_i k_i} G^{(N)}(x_1, \dots, x_N).$$

$$(\Box_{x_j} + m^2) G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = - \int \prod_{i=1}^N \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} (k_i^2 - m^2) e^{i\sum_{i=1}^N x_i k_i} \tilde{G}^{(N)}(k_1, \dots, k_N)$$

Dato che per particelle on-shell  $k_j^2 - m^2 = 0$ , questo va inteso come il  $\lim$ . Estrae il residuo dal polo del propagatore della linea  $k_j^2 - m^2$  estrane in  $\tilde{G}^{(N)}$ .

LSZ diventa:

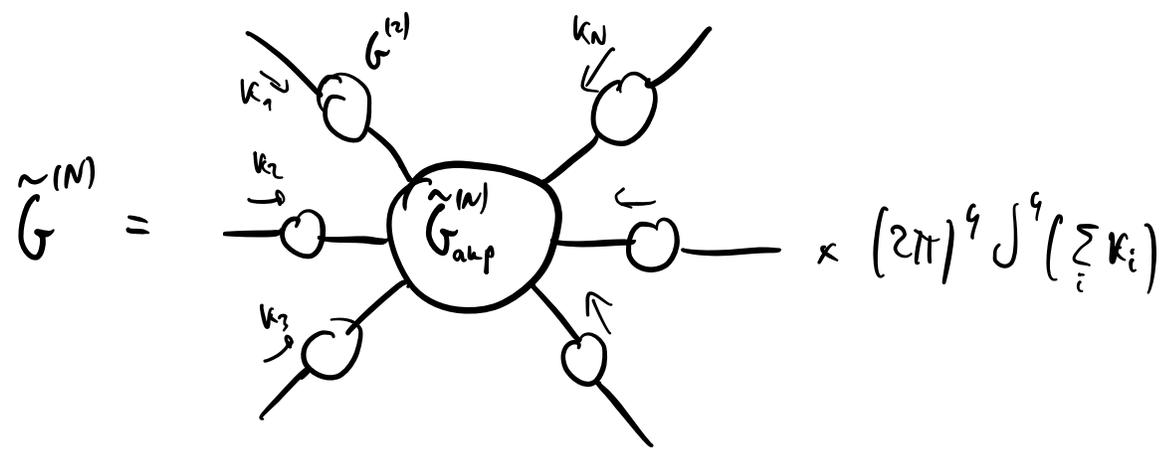
$$S_{i \rightarrow f}^C = \prod_{i=1}^n \lim_{q_i^2 \rightarrow -m^2} \frac{q_i^2 - m^2}{i\epsilon^{1/2}} \prod_{j=1}^n \lim_{p_j^2 \rightarrow -m^2} \frac{p_j^2 - m^2}{i\epsilon^{1/2}} \tilde{G}^{(n+n)}(q_1, \dots, q_n, -p_1, \dots, -p_n)$$

Usando  $\lim_{p^2 \rightarrow m^2} G^{(2)}(p) = \frac{iZ}{p^2 - m^2}$  definiamo la

Nota:  
 Abbiamo già visto che  
 $G^{(2)}(p) = i\tilde{\Gamma}(p^2) =$   
 $= i \frac{Z}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \int d^4q \frac{\tilde{\Gamma}(q^2)}{p^2 - q^2 + i\epsilon}$

funzione di Green AMPVATA rimuovendo i propagatori esterni e la delta della conservazione del momento da  $\tilde{G}^{(N)}$ :

$$\tilde{G}^{(N)}(k_1, \dots, k_N) = (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_i k_i\right) \left( \prod_{i=1}^N G^{(n_i)}(k_i) \right) \tilde{G}_{amp}^{(N)}(k_1, \dots, k_N)$$



LSZ diventa:

$$\sum_{i \rightarrow f}^C = (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_i q_i - \sum_j p_j\right) Z^{(n+m)/2} \tilde{G}_{amp}^{(n+m)}(q_1, \dots, q_m, -p_1, \dots, -p_n) \Big|_{q_i^2 = p_j^2 = m^2}$$

### CROSSING SYMMETRY

L'unica differenza tra avere particelle nello stato finali o iniziali sta nel segno del momento. Per "spostarle" basta invertire  $p \rightarrow -p$  (o  $q \rightarrow -q$ ).