SISTEMI DINAMICI

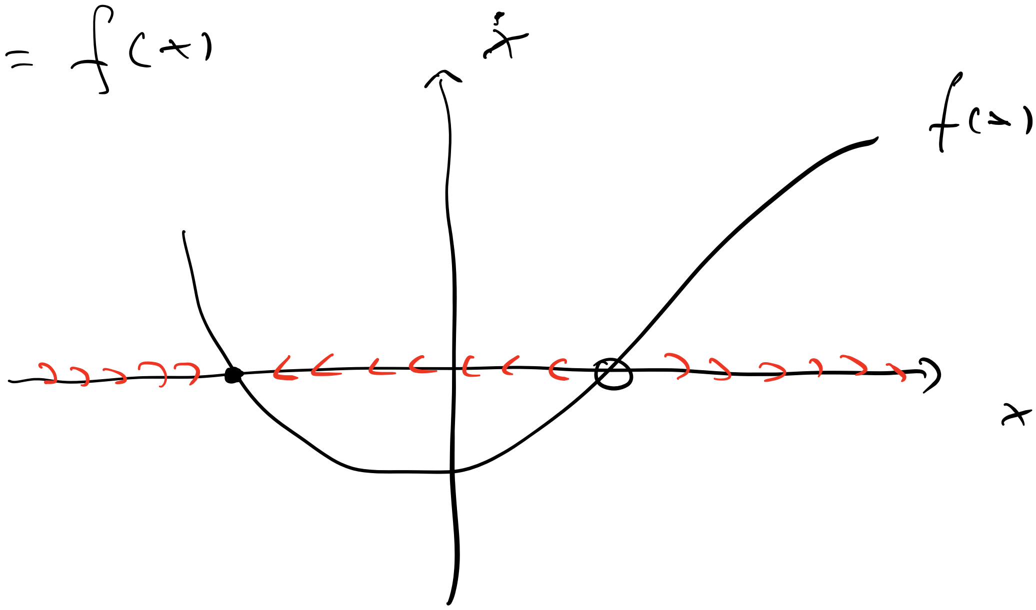
Sistemi dinamici 1-dimensionali

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t))$$

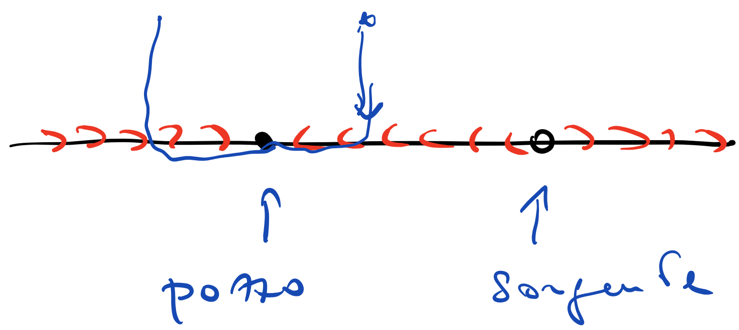
$x = x(t)$

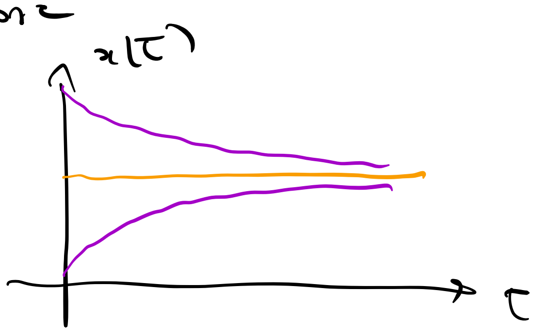
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
(T)

$\dot{x} = f(x)$



Ritratto di fase





Linearizziamo $\longrightarrow$ $x(\tau) = x^* + \eta(\tau)$

$$\frac{d}{d\tau}\eta(\tau) = \eta(\tau)\, f'(x^*)$$

Introduciamo un parametro μ

$$\frac{d}{d\tau}x(\tau) = f_\mu(x(\tau))$$

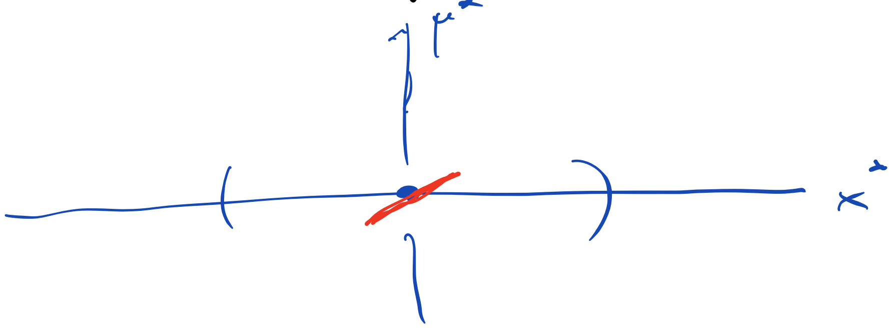
↳ Biforcazione = cambio qualitativo della dinamica

Punto critico iperbolico:

supponiamo che avere un μ^*

Tale che $\boxed{f_{\mu^*}(x^*) = 0}$, e valga

$$f'_{\mu^*}(x^*) \neq 0$$

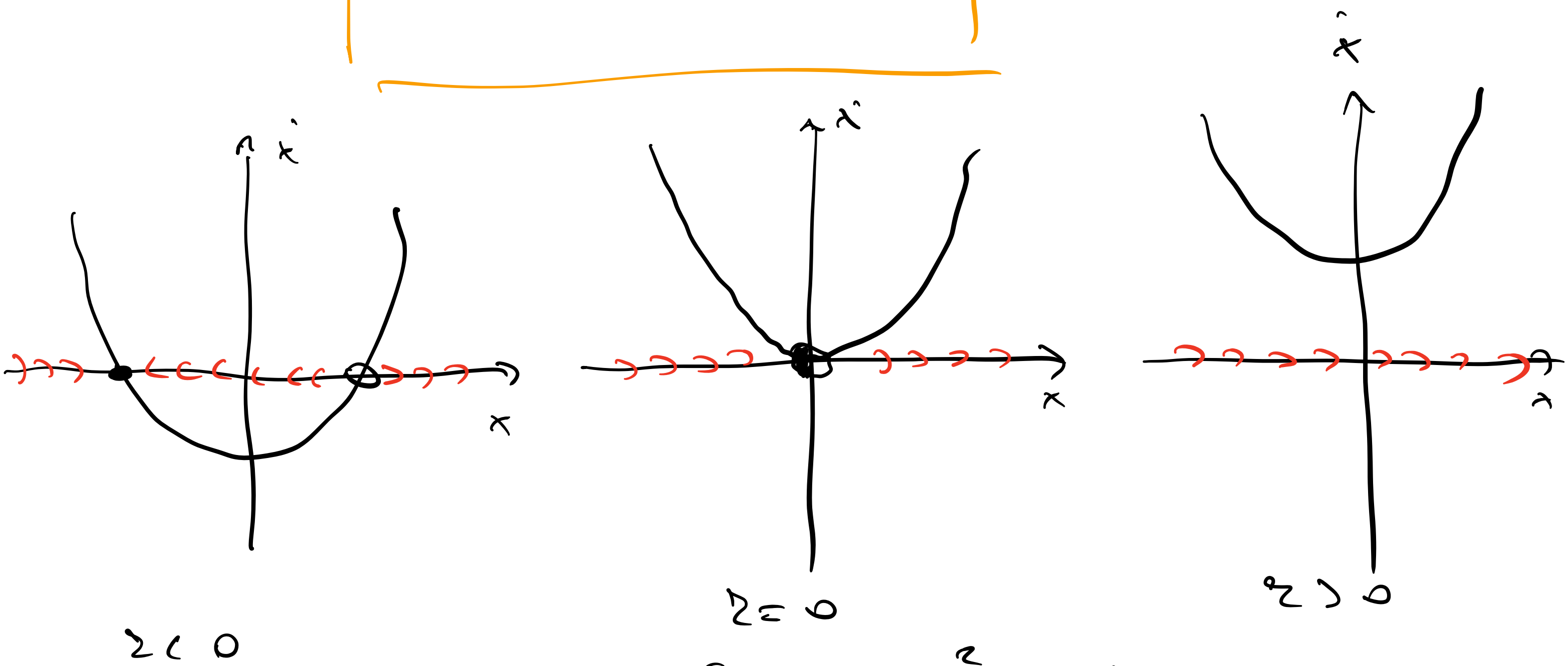


$x^* = \mu^*$

→ Strutturalmente stabile

Biforcazione Tangente → punti critici vengono creati o distrutti

$$\boxed{\dot{x} = r + x^2}$$



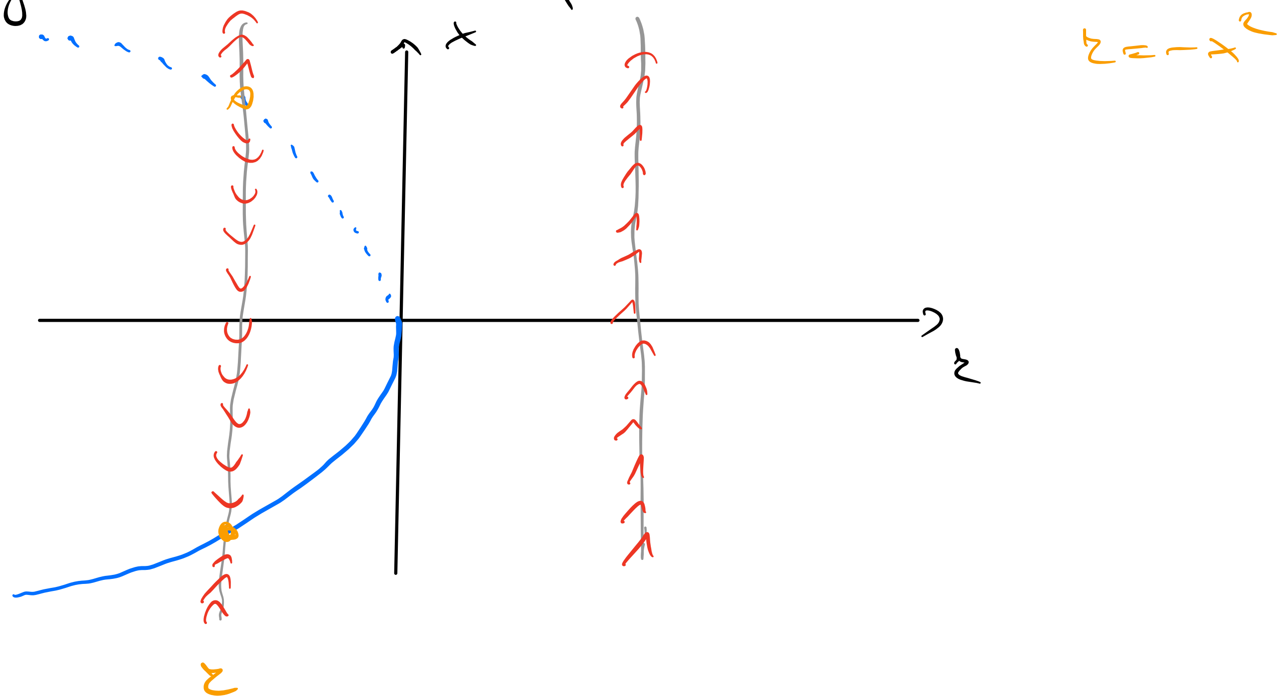
punti critici $x^2 = -r$

$f_r(x) = x^2 + r$

Abbiamo una differenza qualitativa tra $r > 0$ e $r < 0$ ⇒ è avvenuta una biforcazione per $r = 0$

Riesaminiamo la situazione nel

diagramma di biforcazione



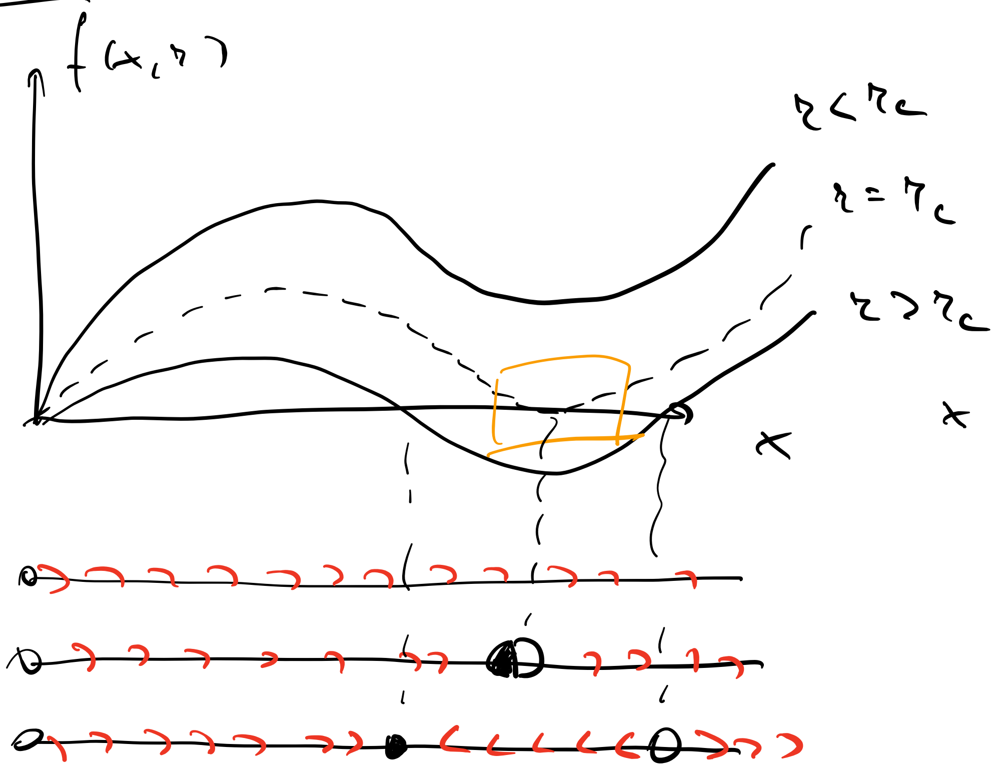
$$\dot{x} = f(x; r) \longrightarrow$$ biforcazione tangente a $x = x^*$, $r = r_c$

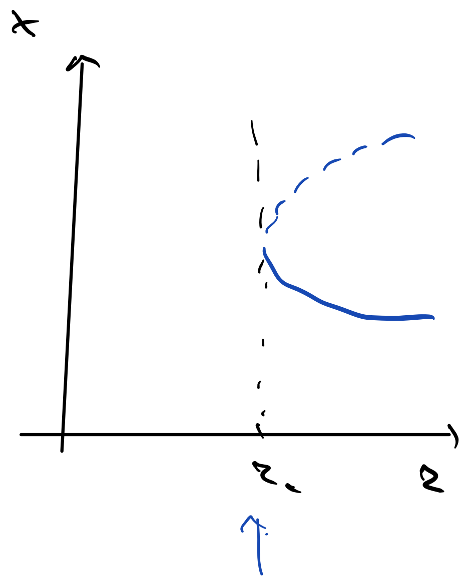
biforcazione tangente:

$$\begin{cases} f(x^*; r_c) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*; r_c) = 0 \end{cases}$$

+ e le altre derivate $\neq 0$

Esempio





Localmente

$$\dot{x} = f(x;r) = f(x^*; r_c) + (x - x^*) \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*, r_c} + (r - r_c) \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{x^*, r_c} + \frac{1}{2}(x - x^*)^2 \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x^*; r_c} + \dots$$

$$\simeq \alpha (r - r_c) + \beta (x - x^*)^2$$

$$\alpha = \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{x^*, r_c} \qquad \beta = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x^*, r_c}$$

$$\dot{x} = r + x^2$$

: forma canonica

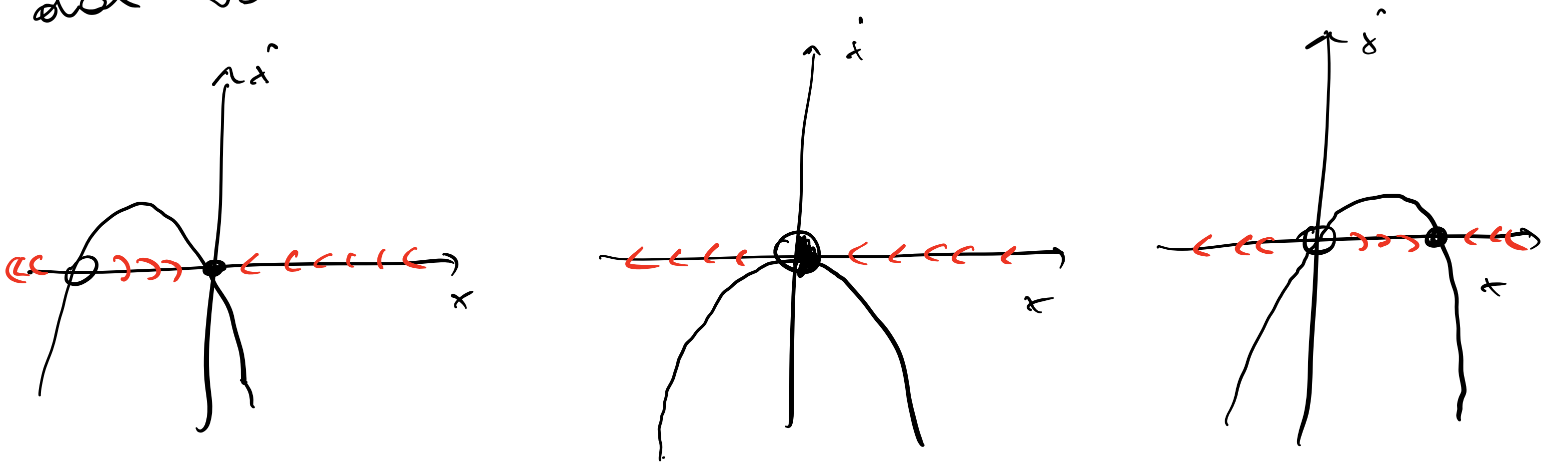
forma normale

Biforcazione Transcritica

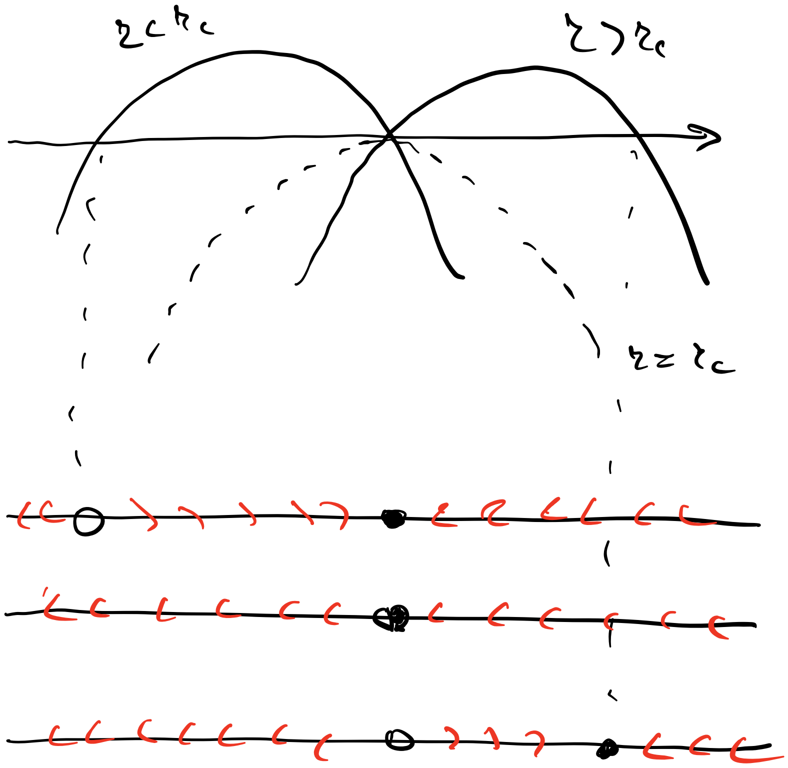
la stabilità di un punto critico

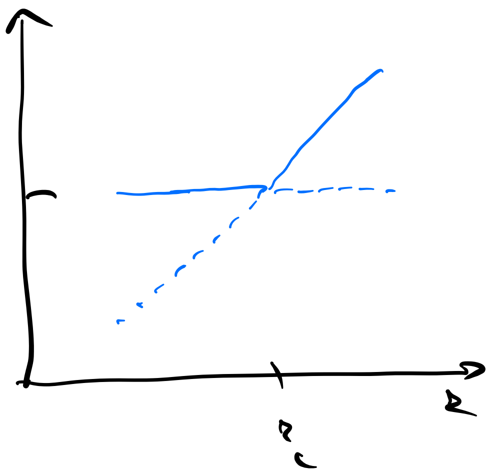
$$\dot{x} = r x - x^2 = x(r - x)$$

ha un punto critico $x^* = 0$ indipendente dal valore di r



$x^* = 0$ è stabile per $r < 0$ e instabile per $r > 0$





$$\dot{x} = rx - x^2 \longrightarrow \begin{array}{l} f(x^*, r_c) = 0 \\ \left.\frac{\partial}{\partial x} f\right|_{x^*, r_c} = 0 \end{array}$$

ma anche $\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{x^*, r_c} = 0$

<u>Esempio</u>

$$\dot{x} = x(1 - x^2) - a(1 - e^{-bx})$$

$x^* = 0$ è un punto critico

$$\dot{x} \simeq x - a\left(bx - \frac{1}{2} b^2 x^2\right) + O(x^3)$$

$$\simeq \underbrace{(1-ab)}\, x + \left(\frac{1}{2} a b^2\right) x^2 + O(x^3)$$

ha la forma $\dot{x} = r x - x^2$

Secondo punto critico: $x^* \simeq \dfrac{2(ab-1)}{ab^2}$

Biforcazione: $r_c = 0$

$$r_c = (1-ab) = 0 \longrightarrow \boxed{ab = 1}$$

curva di biforcazione

Biforcazione Pitchfork (a forchetta)

(può essere super-critico o sub-critico)

$$\boxed{\dot{x} = r x - x^3}$$

Notiamo la simmetria

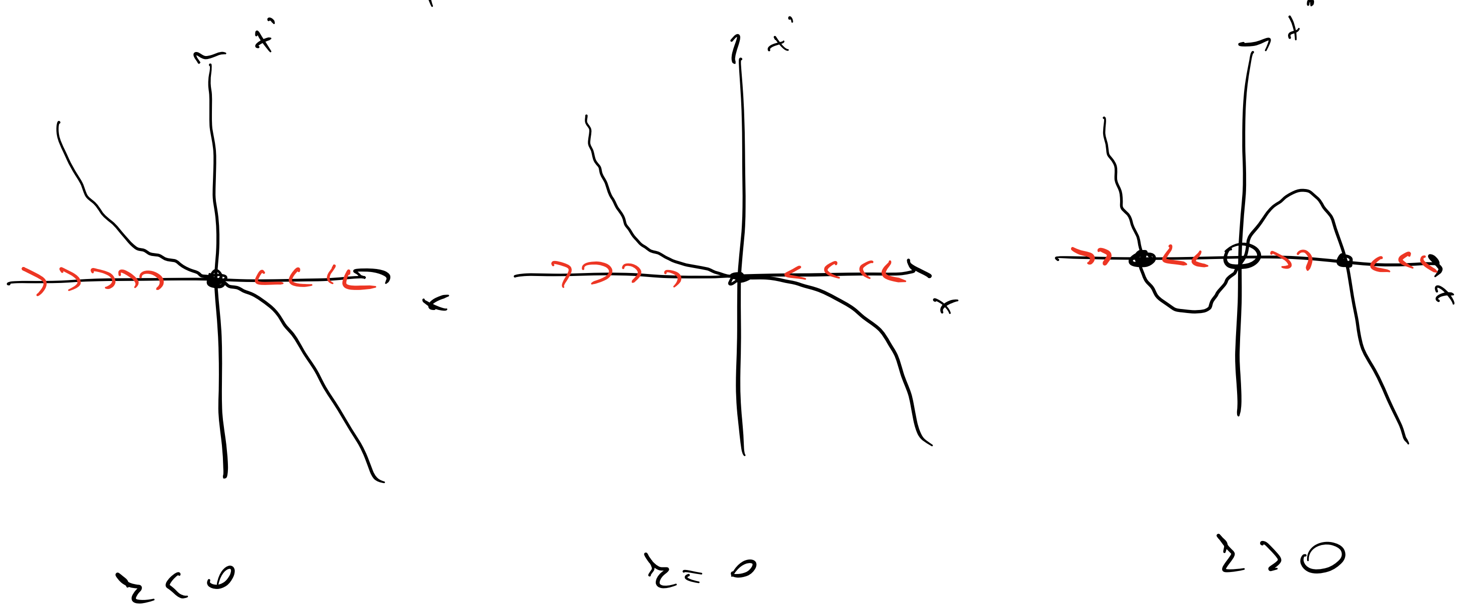
$x \longrightarrow -x$

Il punto $x^* = 0$ è di equilibrio per ogni valore di r

$rx - x^3 = x(r - x^2)$

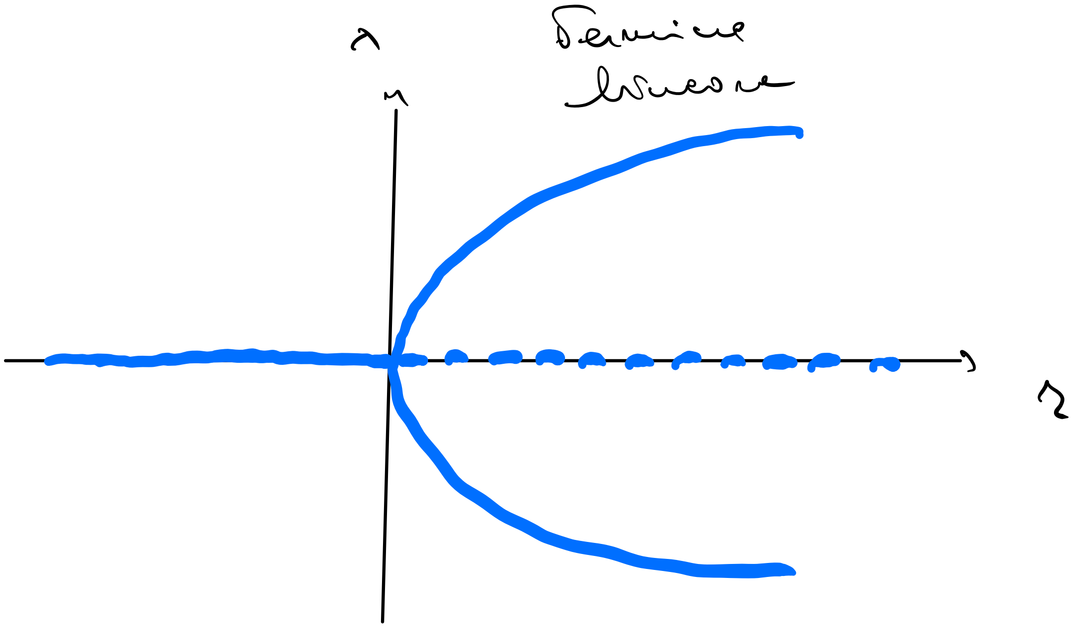
Se $r < 0$, $x^* = 0$ è l'unico punto critico

Per $r > 0$ $\to$ due nuovi punti critici, $x^* = \pm\sqrt{r}$

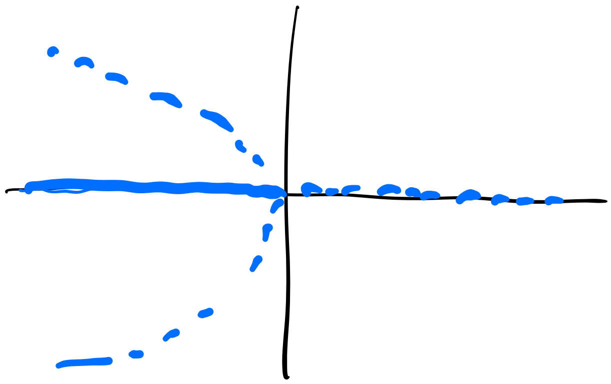


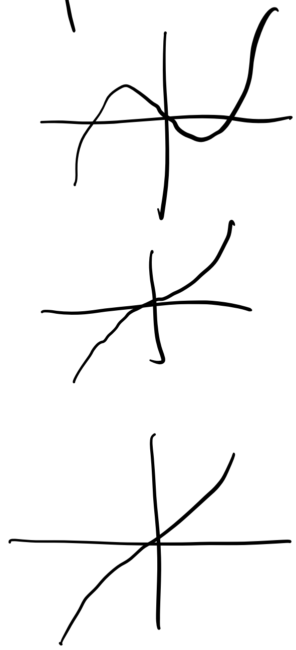
$\dot{x} = -x^3$

non c'è termine lineare



Esercizio : $\dot{x} = rx + x^3$ (subcritico)



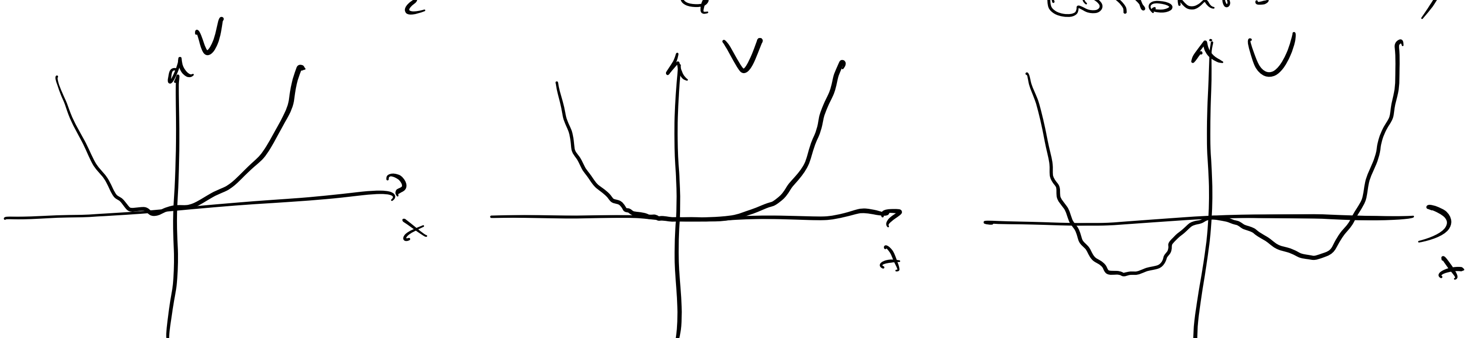


$$x^* = \pm\sqrt{-r}$$

Commento $\dot{x} = rx - x^3$

$$\dot{x} = f_r(x) \qquad f(x) = -\frac{dV}{dx}$$

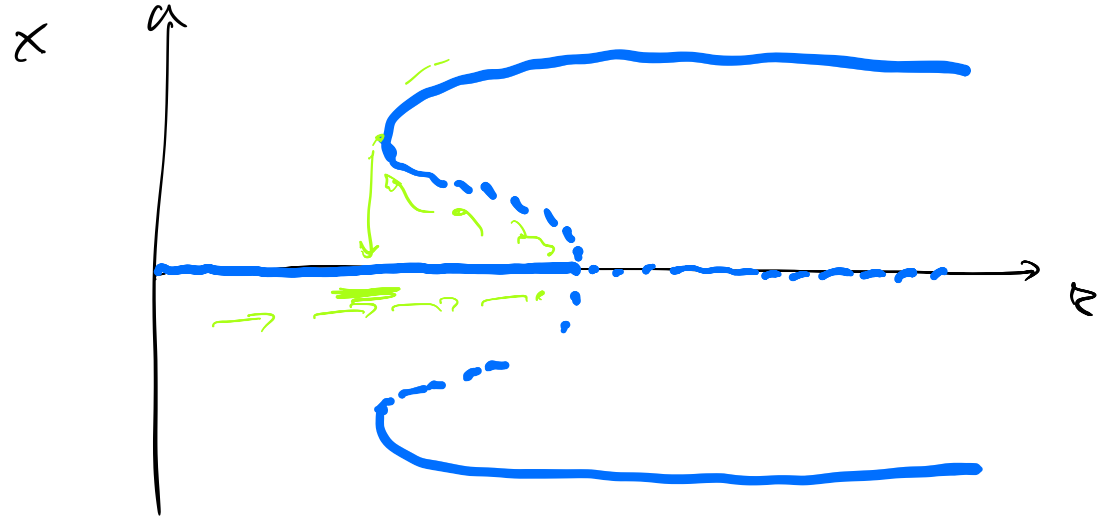
$$V = -\frac{1}{2} r x^2 + \frac{1}{4} x^4$$ (tralasciando costanti)



$r<0$ $\qquad$ $r=0$ $\qquad$ $r>0$

Esercizio diagramma di biforcazione

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5 = x(r + x^2 - x^4)$$



x
a
r