MECCANICA RAZIONALE

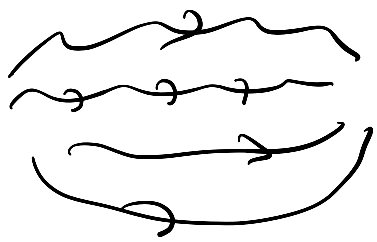
Forze conservative $\longrightarrow$ PLV

$$LV = \sum_{B \in S}' \underline{F}_B \cdot \delta \underline{x}_B$$

$$= \sum_{i=1}^{l}{}' Q_i \, \delta q_i$$

$F \longrightarrow$ conservativa $=$ lavoro

per x_i



x_f non

dipende dal percorso, ma solo

da $\underline{x}_{iniziale}$ e $\underline{x}_{finale}$

$\Rightarrow \quad \exists \; V = V(\underline{x})$ t.c.

$$\text{Lavoro} = -\left[V(\underline{x}_{finale}) - V(\underline{x}_{iniziale}) \right]$$

$$LV = -\left[V(\underline{x}_E + \delta \underline{x}) - V(\underline{x}_E) \right]$$

$$= -dV$$

↪ configurazioni di equilibrio

= punti di stazionarietà di V

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \quad \dots \right)$$

↪ "stabili" se minimo

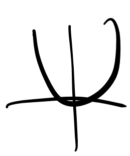
altrimenti "instabili"

Se tutte le forze sono conservative

scriviamo $V = \sum_a V_a$ $\quad a =$ tutte le forze

$$\frac{dV}{dq} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0$$

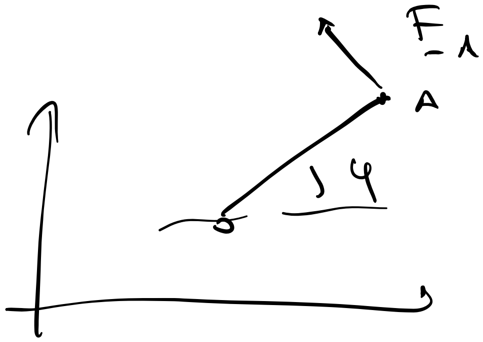
$$\frac{d^2V}{dq^2} \gtrless 0 \quad , \quad \mathrm{Hess}\, V$$

( x^2 2)

Riformuliamo :

$$LV = -dV = \sum_{i=1}^{\ell} Q_i \, \delta q_i$$

$$\Longleftrightarrow \qquad Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad \forall i = 1, \dots, \ell$$



parametro τ

$\rightarrow \quad x_0 = x_0(\tau)$

$y_0 = y_0(\tau)$

$\varphi = \varphi(\tau)$

Stato iniziale a τ_0

Stato finale a τ_1

Lavoro per andare da τ_0 a τ_1

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} W(\tau) \, d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A \, d\tau$$

$$\frac{d\underline{x}_A}{d\tau}$$

Consideriamo un sistema a ℓ gradi di libertà : $(q_1, \dots, q_\ell)$

- per definire l'evoluzione del sistema dobbiamo dare

$$\underline{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_\ell(t))$$

quindi troviamo

$$\underline{x}_A(t) = \underline{x}_A(q_1(t), \dots, q_\ell(t))$$

$$\underline{v}_A = \frac{d\underline{x}_A}{dt} = \frac{\partial \underline{x}_A}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \underline{x}_A}{\partial q_\ell}\dot{q}_\ell$$

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1(t)}{dt} \dots$$

- possiamo calcolare la potenza

$$W(t) = \underline{F}_A \cdot \underline{v}_A =$$

$$= \underline{F}_A \cdot \left(\frac{\partial \underline{x}_A}{\partial q_1}\dot{q}_1\right) + \dots + \underline{F}_A \cdot \left(\frac{\partial \underline{x}_A}{\partial q_\ell}\dot{q}_\ell\right)$$

$$= \underbrace{Q_1 \dot{q}_1 + \dots + Q_\ell \dot{q}_\ell}_{\text{FORMA DIFFERENZIALE}}$$

• Il lavoro si trova integrando

$$\text{Lavoro} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} W(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(Q_1 \dot{q}_1 + \dots + Q_\ell \dot{q}_\ell \right) d\tau$$

Allora

il lavoro dipende solo dalle configurazioni τ_0 e τ_1 (Forze conservative) $=$ $\exists$ funzione $V(q_1, \dots, q_\ell)$ tale che $Q_i = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i}$ $i = 1, \dots, \ell$

Se è vera, la forma differenziale è ESATTA.

Abbiamo una condizione necessaria (ma non sufficiente):

$$\boxed{\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}} \quad \forall\, i,j = 1,\dots,l$$

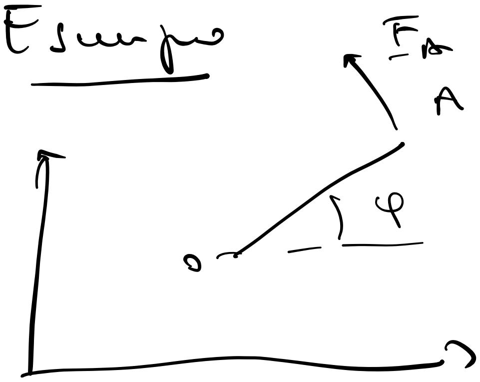
[FORMA DIFFERENZIALE CHIUSA]

Si vede facilmente: se $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$

$$\frac{\partial}{\partial q_j} Q_i = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(-\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(-\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i} Q_j \longrightarrow \text{condizione necessaria}$$

Esempio



$$\underline{F}_A = -F \sin\varphi\, \underline{e}_1 + F\cos\varphi\, \underline{e}_2$$

$$\underline{M}(O) = F L\, \underline{e}_3$$

$$LV_{\text{rispetto primo}} = \underline{F} \cdot \delta \underline{x}_0 + (\underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3)\, \delta\varphi$$

→ le forze generalizzate sono

$$Q_{x_0} = -F\sin\varphi$$

$$Q_{y_0} = F\cos\varphi$$

$$Q_\varphi = FL$$

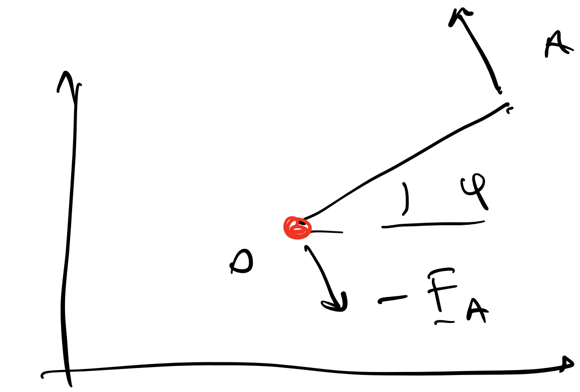
è conservativo

$$\frac{\partial Q_{x_0}}{\partial y_0} = \frac{\partial Q_{y_0}}{\partial x_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} Q_{x_0} = -F\cos\varphi \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial x_0} = 0$$

↳ non è conservativo.

Esempio



$\underline{F}_A$ applicata in A

$\underline{F}_O = -\underline{F}_A$ in O

$$LV = \underline{R}\cdot\delta\underline{x}_0 + \underbrace{[\underline{M}(O)\cdot\underline{e}_3]}_{FL}\,\delta\varphi$$

$$Q_{x_0} = \underline{R}\cdot\underline{e}_1 = (\underline{F}_A - \underline{F}_A)\cdot\underline{e}_1 = 0$$

$$Q_{y_0} = \underline{R} \cdot \underline{e}_2 = 0$$

$$Q_\varphi = \underline{M}(O) \cdot \underline{e}_3 = FL$$

$$LV = FL\,\delta\varphi = d\,(FL\varphi)$$

$$\exists\ V = -FL\varphi$$

$$\begin{cases} Q_{x_0} = -\dfrac{\partial V}{\partial x_0} = 0 \\ Q_{y_0} = -\dfrac{\partial V}{\partial y_0} = 0 \\ Q_\varphi = -\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = FL \end{cases}$$

Può capitare che anche se le singole forze non sono conservative, il lavoro virtuale sia il differenziale di una funzione.

Caso importante: sistemi ad un solo grado di libertà, soggetti a sole forze posizionali:

$$LV = \underline{Q(q)\,\delta q} \overset{?}{=} d(-V)$$

scelgo $V = -\int Q$

Non è più vero per più gradi di libertà

$\left(Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad \forall\, i = 1 \dots l \right)$ 1 incognita V e l condizioni

---

Forze conservative $\Rightarrow$ $LV = -dV$

$\rightarrow$ max e min di V

Equilibrio $\longrightarrow$ Statica

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Prendiamo un sistema materiale S

all' equilibrio.

$\Rightarrow$ per il principio di inerzia $\underline{F}_P = 0$

$\forall P$ ($\underline{F}_P$ forza <u>totale</u> agente

in P, nel sistema Σ')

$$\Rightarrow \sum_{P \in S}' \underline{F}_P = 0$$

$$\underline{M}(O) = \sum_{P \in S}' (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge \underline{F}_P = 0$$

polo fissato a piacere

Forze $\Longrightarrow$ interne & esterne

Principio di azione e reazione : le

forze interne sono a due a due

coppie di braccio nullo

Quindi :

$$\underline{R}^{(i)} = \sum_{P \in S} \underline{F}_P^{(i)} = 0$$ risultante delle forze interne

$$\underline{M}^{(i)}(O) = 0$$ momento risultante delle forze interne rispetto ad O

Quindi per le forze esterne:

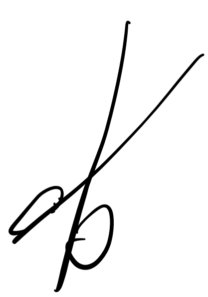
S in equilibrio $\Rightarrow \begin{cases} \underline{R}^{(e)} = \underline{0} \\ \underline{M}^{(e)}(O) = \underline{0} \end{cases}$ equazioni cardinali della statica

condizione necessaria

E.C.S. $\rightarrow$ sono equazioni di bilancio

valgono se il sistema è in equilibrio

Ad esempio



forbici

se dall'esterno applichiamo una coppia di braccio nullo $\Rightarrow$ soddisfo ECS

Eccezione $\longrightarrow$ il corpo rigido

Infatti per il corpo rigido

$$ECS \equiv PLV$$

$$LV_{\text{rigido}} = \underline{R} \cdot \delta \underline{x}_0 + \underline{M}(O) \cdot \underline{\chi}$$

$$= \underline{R}^{(est)} \cdot \delta \underline{x}_0 + \underline{M}^{(est)}_{(O)} \cdot \underline{\chi}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{R}^{(est)} = 0 \\ \underline{M}^{(est)}_{(O)} = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{cases} R^{(e)} = 0 \\ \underline{M}^{e}(O) = 0 \end{cases} \not\Rightarrow \quad \underline{F}_P = \underline{0} \quad \forall P \right)$$

2D eq. cardinali sono 3

3D " " " 6

<u>Commento</u>: se $\underline{M}^e(O) = 0$, allora

$\underline{M}(O') = 0$ se vale $\underline{R}^{(e)} = 0$

$$\underline{M}(O) = \sum_{p\in S}{}' (\underline{x}_p - \underline{x}_o) \wedge \underline{F}_p =$$

$$= \sum_{p\in S}{}' \left[\underline{x}_p - \underline{x}_o + \underline{x}_{o'} - \underline{x}_{o'} \right] \wedge \underline{F}_p$$

$$= \sum{}' \left[\underline{x}_p - \underline{x}_{o'} \right] \wedge \underline{F}_p + \sum_p \left[\underline{x}_{o'} - \underline{x}_o \right] \wedge \underline{F}_p$$

$$= \underline{M}(O') + (\underline{x}_{o'} - \underline{x}_o) \wedge \sum_p \underline{F}_p$$

$$= \underline{M}(O') + (\underline{x}_{o'} - \underline{x}_o) \wedge \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\underline{R}^{(e)}}$$

$\longrightarrow$ ECS necessarie ma non sufficiente.