SISTEMI DINAMICI

Biforcazioni per sistemi dinamici continui in 1 dimensione

Prendiamo $\dot{x} = f(x; \mu)$ e supponiamo $f(x^*; \mu^*) = 0$ per (x^*, μ^*)

Per capire la stabilità possiamo ad esempio linearizzare:

$x(t) = x^* + \eta(t)$

$$\dot{\eta} = \boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*, \mu^*}} \cdot \eta$$

Siccome $f(x^*; \mu^*) = 0$, se anche

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*, \mu^*} \neq 0 \rightarrow$$ il Teorema della funzione implicita garantisce l'$\exists$ di $x = x(\mu)$, tale che $f(x(\mu), \mu) = 0$

per μ vicini a μ^*, con $x(\mu^*) = x^*$.

Per continuità rispetto ai parametri per μ sufficientemente vicino a μ^*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(\mu); \mu) \neq 0$$

Punti fissi iperbolici permangono iperbolici per piccole variazioni dei parametri; in particolare il carattere della stabilità non cambia

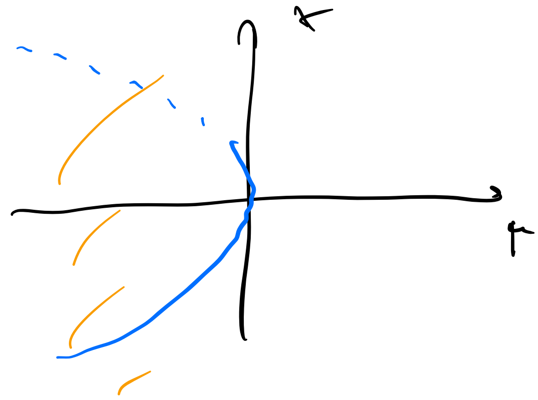
Per convenzione $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$

Biforcazione : cambio qualitativo del flusso passando attraverso $(0, 0)$

Biforcazione Tangente abbiamo

da un'unica curva di punti fissi $\mu(x)$. Passa per $(0,0)$ ed è parametrizzata da x.

Ha le proprietà



1. È tangente alla linea $\mu = 0$ nel punto $x=0$

$$\left.\frac{d\mu}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

2. Giace interamente da un lato rispetto a $\mu = 0$

$$\left.\frac{d^2\mu}{dx^2}\right|_{x=0} \neq 0 \qquad \left(\begin{array}{l} \text{è} > 0 \\ \text{oppure} < 0 \end{array} \right)$$

Consideriamo: $\dot{x} = f(x;\mu)$

con $f(0,0) = 0$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$

[= punto critico non iperbolico]

Se $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0$, allora $\exists!$

$\mu = \mu(x)$ tale che $\mu(0) = 0$

(e per x otteniamo piccolo $f(x, \mu(x)) = 0$)

$f(x^*, \mu^*) = 0$
$f(x, \mu(x)) = 0$

Sotto quali condizioni

$$\left.\frac{d\mu}{dx}\right|_0 = 0 \qquad \left.\frac{d^2\mu}{dx^2}\right|_0 \neq 0 \quad ?$$

Partiamo da $f(x, \mu(x)) = 0$

$$\frac{d}{dx} f(x, \mu(x)) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{d\mu}{dx}$$

$$\left.\frac{d\mu}{dx}\right|_0 = \frac{-\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} \; {=0}}{\left.\dfrac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} \; {\neq 0}} = 0$$

Allora 1. è verificata. Andiamo a vedere 2. $\Rightarrow$ $\dfrac{d^2}{dx^2} f(x, \mu(x))$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x, \mu(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{d\mu}{dx}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x \partial \mu}\frac{d\mu}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x \partial \mu}\frac{d\mu}{dx}$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{d^2\mu}{dx^2} = 0$$

Andiamo a calcolare in $(0,0)$

ricordando $\left.\frac{d\mu}{dx}\right|_0 = 0$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} + \left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} \left.\frac{d^2\mu}{dx^2}\right|_0 = 0$$

$$\left.\frac{d^2\mu}{dx^2}\right|_0 = \frac{-\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}}{\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)}} \quad \neq 0 \, ?$$

$\neq 0$

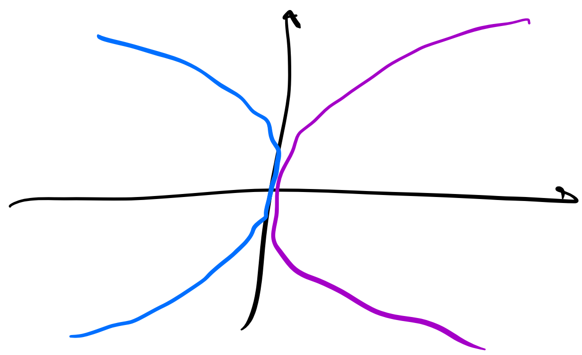
Richiediamo $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} \neq 0$

Abbiamo dimostrato che per avere

una biforcazione tangente occorre

$$\left.\begin{aligned} &f(0,0) = 0 \\ &\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{punto critico non iperbolico}$$

e $$\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0 \,, \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} \neq 0$$

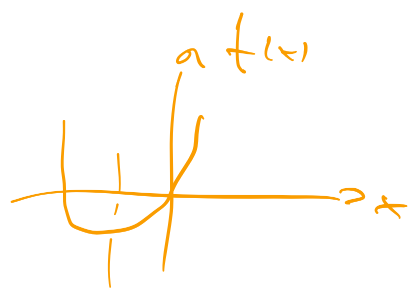


Se pensiamo di sviluppare in serie

$$f(x,\mu) = \underbrace{a_0 \mu + a_1 x^2}_{} + a_2 \mu x + a_3 \mu^2 + \dots$$

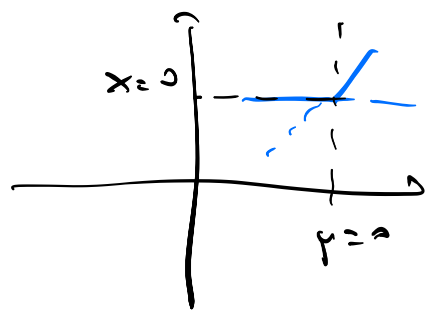
$$\dot{x} = \mu \pm x^2$$

$$\mu \pm x^2 \pm \mu x$$



Biforcazione Transcritica

Struttura vicino al



punto di biforcazione:

1. due curve di punti fissi $(0,0)$

$$\begin{cases} x = \mu \\ x = 0 \end{cases}$$

2. entrambe esistono da tutti e due i lati di $\mu = 0$

3. la stabilità lungo ogni curva cambia attraversando $\mu = 0$

Solite condizioni: $\dot{x} = f(x;\mu)$

con $f(0,0) = 0$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$

(= punto critico non iperbolico).

$\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} = ?$ $= 0$!

Imponiamo di avere una curva di punti fissi in $x = 0$

$\Rightarrow$ $\dot{x} = f(x;\mu) = x\, F(x;\mu)$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\[2ex] \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$F(0,0) = 0$ e

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{(0,0)}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)}$$

Adesso vogliamo $y(x)$ (che non coincide con $x=0$) e sia presente da entrambi i lati rispetto a $y=0$

Assumiamo che $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,0)} \neq 0$ $\left(= \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} \right)$

$$\left.\frac{d\mu}{dx}\right|_{(0,0)} = \frac{-\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,0)}}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial \mu}\right|_{(0,0)}} =$$

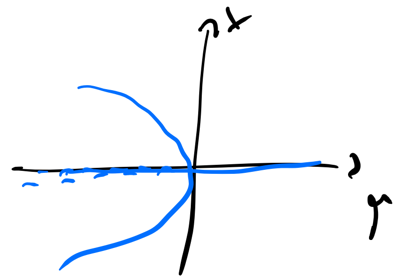
$$= \frac{-\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}}{\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right|_{(0,0)}} \qquad \begin{matrix} \neq 0 \\ \\ \neq 0 \end{matrix}$$

Riassumendo

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} = 0 \,, \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} \neq 0 \qquad \dot{x} = \mu x \pm x^2$$

Biforcazione a forchetta



1. due curve di punti fissi che passano per $(0,0)$

$$\begin{cases} x=0 \\ \mu = x^2 \end{cases}$$

2. $x=0$ esiste da entrambi i lati di $\mu=0$

$\mu = x^2$ esiste solo da un lato

3. punti fissi su $x=0$ hanno stabilità diverse ai lati opposti di $\mu=0$, i punti fissi su $\mu = x^2$ hanno tutti la stessa stabilità.

Come sempre: $\dot{x} = f(x, \mu)$ con

$f(0,0) = 0$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$ punto fisso non iperbolico

2 curve di punti fissi $\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} = 0$

Vogliamo $x=0$ curva di punti fissi

$\dot{x} = x\, F(x; \mu)$ con

$$F(x,\mu) = \begin{cases} \dfrac{f(x,\mu)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,\mu)} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Vogliamo $F(0,0) = 0$, e che ci sia una secondo curva di punti fissi: $\left.\dfrac{\partial F}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0$

$\hookrightarrow$ $\exists\ \mu(x)$ tale che $F(x,\mu(x)) = 0$

Imponiamo che $\mu = \mu(x)$ sia T.C.

$$\left.\frac{d}{dx}\mu\right|_0 = 0 \quad , \quad \left.\frac{d^2\mu}{dx^2}\right|_0 \neq 0$$

$$\left.\frac{d\mu}{dx}\right|_0 = \frac{-\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,0)}}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial \mu}\right|_{(0,0)}} = \frac{-\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}}{\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right|_{(0,0)}} = 0$$

$$\left.\frac{d^2\psi}{dx^2}\right|_0 = \frac{-\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial \mu}\right|_{(0,0)}} = \frac{-\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{(0,0)}}{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right|_{(0,0)}}$$

$\neq 0$

Per riassumere
$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0 \end{cases}$$

con $\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = 0$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0 \qquad \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{(0,0)} \neq 0$$

$\hookrightarrow$ qualitativamente $\dot{x} = \mu x \pm x^3$