Dalla ricorsione primitiva a un modello, Turing-completo, di computabilità

Eugenio G. Omodeo

Logica Matematica, a.a. 2021/2022

1 La famiglia $\mathfrak{P}$ delle funzioni ricorsive primitive

Definizione 1 *La collezione* $\mathfrak{P}$ *delle* **funzioni ricorsive primitive** *è il piú piccolo*[1] *insieme di funzioni (totali), ad argomenti e risultato in* $\mathbb{N}$*:*

- *cui appartengano tutte le* funzioni iniziali *(vedi sotto),*
- *che sia chiuso per* composizione *e* ricorsione primitiva *(v. prossime definizioni).*

Le nostre funzioni ***iniziali*** *sono: Le funzioni ovunque* nulle*, la funzione* successivo*:*

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \overset{\mathsf{O}_n}{\longmapsto} 0 \qquad (n = 0, 1) ,$$
$$x \overset{\mathsf{S}}{\longmapsto} x + 1 ,$$

e tutte le proiezioni *associate agli interi positivi:*

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \overset{\mathsf{I}_{n,k}}{\longmapsto} x_k \qquad (n \geqslant k \geqslant 1).$$

Definizione 2 *Siano:*

$$\begin{array}{ll} f & \text{una funzione a } k \text{ argomenti,} \\ g_1, \ldots, g_k & \text{funzioni ad } M \text{ argomenti.} \end{array}$$

Cosí si definisce la ***composizione*** h *di* f *con* $g_1, \ldots, g_k$ *:*

$$\langle x_1, \ldots, x_M \rangle \overset{h}{\longmapsto} f\big(g_1(x_1, \ldots, x_M), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_M)\big) .$$

[1] Cioè, minimo rispetto all'$\subseteq$.

Esempio. Tramite composizione, dalle funzioni iniziali si ottengono tutte le costanti e le funzioni a valore costante:

$$\overbrace{\mathsf{S}(\cdots\,\mathsf{S}(}^{c}\ \mathsf{O}_0(\,)\ \overbrace{)\,\cdots)}^{c}, \qquad \overbrace{\mathsf{S}(\cdots\,\mathsf{S}(}^{c}\ \mathsf{O}_1(\,\mathsf{I}_{n,1}(\,x_1,\ldots,x_n\,)\,)\ \overbrace{)\,\cdots)}^{c}\,.$$

Definizione 3 *La **ricorsione primitiva**, quando venga applicata ad f e g tali che*

f *sia una funzione n–adica*
(quando $n = 0$, ciò significa che f è una costante *)*

g *sia una funzione $n+2$ adica*

$\boxed{\text{produce}}$ *la funzione $n+1$ adica*

h *tale che:*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} h(\vec{x},0) & = & f(\vec{x}) \\ h(\vec{x},t+1) & = & g\big(\vec{x},t,h(\vec{x},t)\big) \end{array}}$$

(Qui $\vec{x} =_{\text{Def}} x_1,\ldots,x_n$)

Grazie al teorema cinese dei resti, vale questa proposizione (dimostrata in [1]):

Teorema 1 (Gödel–Davis) *Il grafo*

$$\{\ \langle a_1,\ldots,a_n,b\rangle\ :\ a_1\,,\ldots,\,a_n\,,\ b\in\mathbb{N}\ \ \&\ \ h(a_1,\ldots,a_n)=b\ \}$$

di una funzione ricorsiva primitiva h può sempre venir espresso tramite una formula aritmetica in cui i quantificatori universali compaiono solo limitati e nella quale possono figurare i connettivi proposizionali $\&$ e $\vee$ di congiunzione e disgiunzione mentre non vi figurano il connettivo $\neg$ di negazione né quello d'implicazione né quello di bi-implicazione. La quantificazione esistenziale è ammessa senza restrizioni, perché qui assumiamo come simboli primitivi tanto $\exists$ che $\forall$.

2 Specifica di alcune funzioni ricorsive primitive

In base alla definizione della collezione $\mathfrak{P}$ delle *funzioni ricorsive primitive*, le seguenti funzioni (cosí come infinite altre) appartengono a $\mathfrak{P}$:

Addizione
$$\begin{cases} x + 0 &= x \\ x + \mathsf{S}\, y &= \mathsf{S}(x + y) \end{cases}$$

Moltiplicazione
$$\begin{cases} x \cdot 0 &= 0 \\ x \cdot \mathsf{S}\, y &= x \cdot y \; + \; x \end{cases}$$

Fattoriale
$$\begin{cases} 0\,! &= 1 \\ (\mathsf{S}\, x)\,! &= (x\,!) \; \cdot \; (\mathsf{S}\, x) \end{cases}$$

Elevamento a potenza
$$\begin{cases} x^0 &= 1 \\ x^{\mathsf{S}\, y} &= x^y \; \cdot \; x \end{cases}$$

'Negato'
$$\mathsf{ng}\, x \;=\; 0^x$$

Segno, o 'asserito'
$$\mathsf{sg}\, x \;=\; 0^{0^x}$$

'Predecessore'
$$\begin{cases} \mathsf{pr}\; 0 &= 0 \\ \mathsf{pr}\; \mathsf{S}\, x &= x \end{cases}$$

'Sottrazione'
$$\begin{cases} x \dot{-} 0 &= x \\ x \dot{-} \mathsf{S}\, y &= \mathsf{pr}(x \dot{-} y) \end{cases}$$

Distanza
$$|x - y| \;=\; (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$$

Resto
$$\begin{cases} 0 \,\%\, y &= 0 \\ (\mathsf{S}\, x) \,\%\, y &= \mathsf{S}(x \,\%\, y) \; \cdot \; \mathsf{sg}\, |y - \mathsf{S}(x \,\%\, y)| \end{cases}$$

Al lettore il compito di spiegare nel dettaglio queste specifiche — anche per colmare un lieve divario che presentano rispetto alla definizione di $\mathfrak{P}$.

È vero che ogni polinomio diofanteo designa una funzione ricorsiva primitiva?

Esercizio 1 *Mostrare che è ricorsiva primitiva la biiezione di abbinamento*

$$\mathtt{c}(i, j) \;=\; \frac{\big(0 + 1 + \cdots + (i + j)\big) + 2\, i}{2}$$

di Cantor e che tali sono anche le funzioni iniettive

$$\mathtt{l}(k) \;=\; \frac{k - w \cdot (w + 1)}{2}\,, \qquad \mathtt{r}(k) \;=\; \frac{w \cdot (w + 3)}{2} - k\,, \quad \text{ove} \quad w \;=\; \frac{\big\lfloor -1 + \sqrt{1 + 8 \cdot k}\,\big\rfloor}{2}\,,$$

che sono quelle per cui vale: $\mathtt{c}\big(\mathtt{l}(k), \mathtt{r}(k)\big) = k$, *per ogni* $k \in \mathbb{N}$.

3 Dalla ricorsione primitiva alla ricorsione generale

Sia:

g una funzione *parziale* ad $M+1$ argomenti naturali, con risultato naturale,

situazione che denotiamo scrivendo che

$$g : \mathbb{N}^{M+1} \rightharpoonup \mathbb{N} .$$

Il significato di questa mezza freccia e della sottolineatura '*parziale*' che la precede è questo: il dominio D di g è incluso in una potenza cartesiana di $\mathbb{N}$, però non è detto che la ricopra per intero. Nello specifico $D \subseteq \mathbb{N}^{M+1}$, però forse $D \subsetneq \mathbb{N}^{M+1}$.

Cosí si definisce la *minimalizzazione*

$$\min_n [\, g(x_1 , \ldots , x_M , n) = 0 \,]$$

di g: si tratta della funzione

$$\langle x_1, \ldots, x_M \rangle \overset{h}{\longmapsto} n$$

che risulta definita quando 0 è un valore assunto da g, purché n sia tale che

- $g(\vec{x}, n) = 0$ ed inoltre (se $n > 0$)
- i valori $g(\vec{x}, 0), \ldots, g(\vec{x}, n-1)$ sono *tutti* definiti e diversi da 0.

Di qui in poi $\vec{x}$ sta per $x_1, \ldots, x_M$

Al lettore il compito di introdurre la forma un po' piú generale di minimalizzazione

$$\min_{n \geqslant \ell} [\, g(x_1 , \ldots , x_M , n) = 0 \,] ,$$

in termini intuitivi e curando che $\min_n[g(\vec{x} , n) = 0] = \min_{n \geqslant 0}[g(\vec{x} , n) = 0]$

A questo punto, in analogia con la definizione già data di $\mathfrak{P}$ e previa puntualizzazione—qui lasciata al lettore—su come vadano intese composizione e ricorsione (primitiva) qualora vengano applicate a funzioni parziali, possiamo introdurre le funzioni computabili:

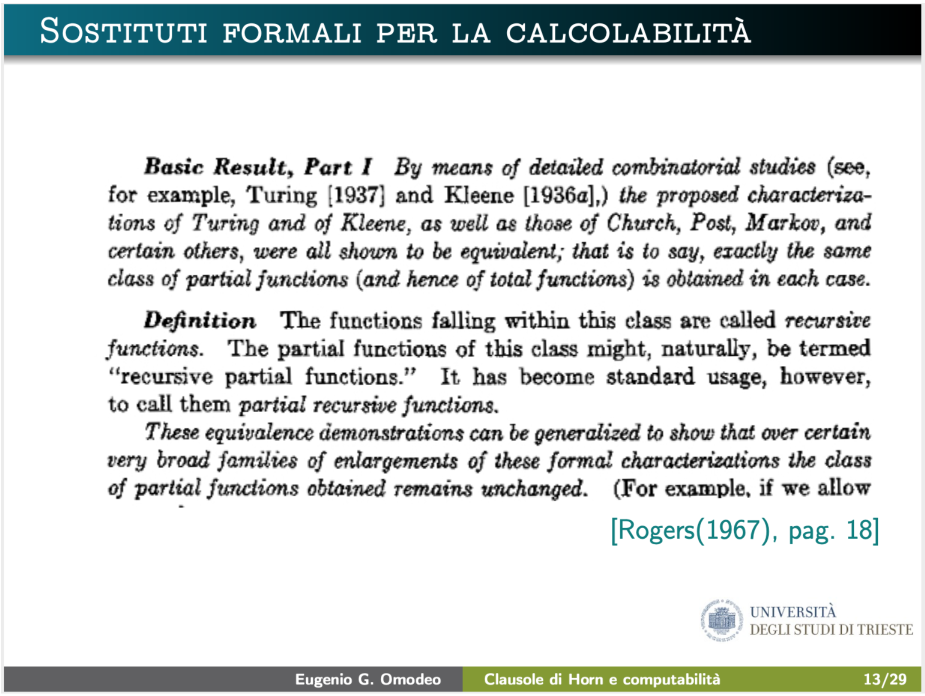
Definizione 4 *La collezione* $\mathfrak{C}$ *delle* FUNZIONI COMPUTABILI PARZIALI *è il piú piccolo insieme di funzioni parziali, ad argomenti e risultato in* $\mathbb{N}$*:*

- cui appartengano tutte le funzioni (ricorsive primitive) *iniziali* e che
- sia chiuso per *composizione*, *ricorsione* (primitiva), *minimalizzazione*.

Dalle definizioni scende subito che $\mathfrak{P} \subsetneq \mathfrak{C}$. Meno ovvio: in $\mathfrak{C} \setminus \mathfrak{P}$ vi sono funzioni totali; un esempio è la funzione di *Ackermann-Péter*, definita su $\mathbb{N}^2$ dalla seguente ricorsione:

$$\begin{aligned} A(0,n) &= n+1 , \\ A(m+1,0) &= A(m,1) , \qquad A(m+1,n+1) = A(m, A(m+1,n)) . \end{aligned}$$

(Vedi `https://en.wikipedia.org/wiki/Ackermann_function`).



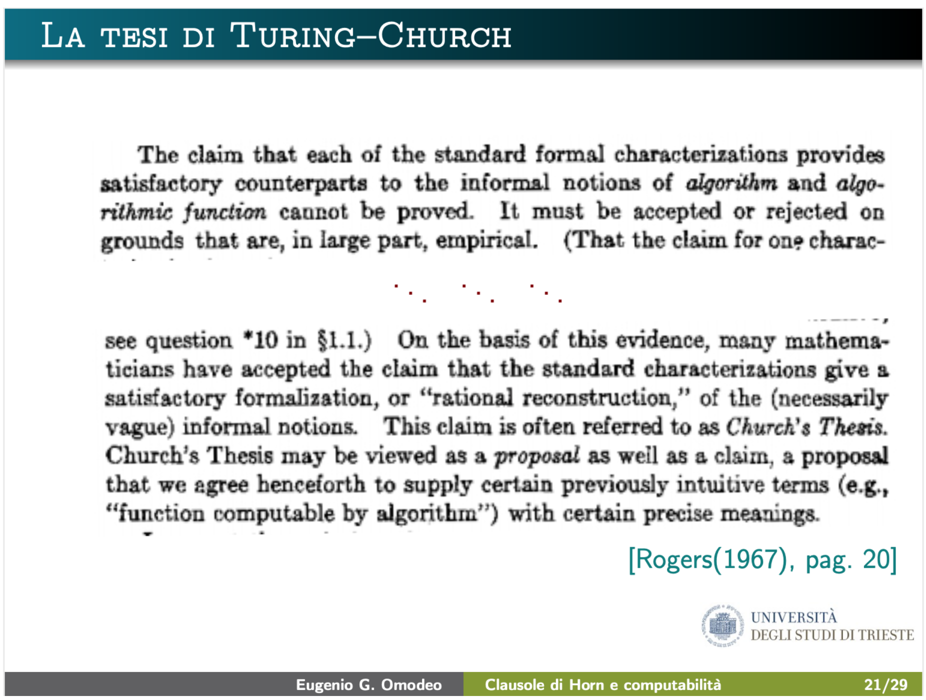
Sostituti formali per la calcolabilità

Basic Result, Part I *By means of detailed combinatorial studies* (see, for example, Turing [1937] and Kleene [1936a],) *the proposed characterizations of Turing and of Kleene, as well as those of Church, Post, Markov, and certain others, were all shown to be equivalent; that is to say, exactly the same class of partial functions* (*and hence of total functions*) *is obtained in each case.*

Definition The functions falling within this class are called *recursive functions.* The partial functions of this class might, naturally, be termed "recursive partial functions." It has become standard usage, however, to call them *partial recursive functions.*

These equivalence demonstrations can be generalized to show that over certain very broad families of enlargements of these formal characterizations the class of partial functions obtained remains unchanged. (For example, if we allow

[Rogers(1967), pag. 18]



La tesi di Turing–Church

The claim that each of the standard formal characterizations provides satisfactory counterparts to the informal notions of *algorithm* and *algorithmic function* cannot be proved. It must be accepted or rejected on grounds that are, in large part, empirical. (That the claim for one charac-

. . .

see question *10 in §1.1.) On the basis of this evidence, many mathematicians have accepted the claim that the standard characterizations give a satisfactory formalization, or "rational reconstruction," of the (necessarily vague) informal notions. This claim is often referred to as *Church's Thesis.* Church's Thesis may be viewed as a *proposal* as well as a claim, a proposal that we agree henceforth to supply certain previously intuitive terms (e.g., "function computable by algorithm") with certain precise meanings.

[Rogers(1967), pag. 20]

Riferimenti bibliografici

[1] Julia Robinson. Diophantine decision problems. In W. J. LeVeque, editor, *Studies in Number Theory*, volume 6 of *Studies in Mathematics*, pages 76–116. Mathematical Association of America, 1969.

[2] Hartley Rogers, Jr. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill, 1967.