# SISTEMA DI N PUNTI MATERIALI VINCOLATI

$$\bar{w} = (w_1, \dots, w_{3N}) = (\underbrace{x_1, y_1, z_1}_{\bar{r}_1}, \underbrace{x_2, y_2}_{\bar{r}_2}, \dots, \underbrace{x_N, y_N, z_N}_{\bar{r}_N})$$

$w_j \quad j = 1, \dots, 3N$

Vincoli:

$$f^{(s)}(\bar{w}, t) = 0 \qquad s = 1, \dots, r$$

Gradi di libertà:

$$n = 3N - r$$

Forma parametrica:

$$w_j = w_j(q_1, \dots, q_n, t) \qquad j = 1, \dots, 3N \qquad (*)$$

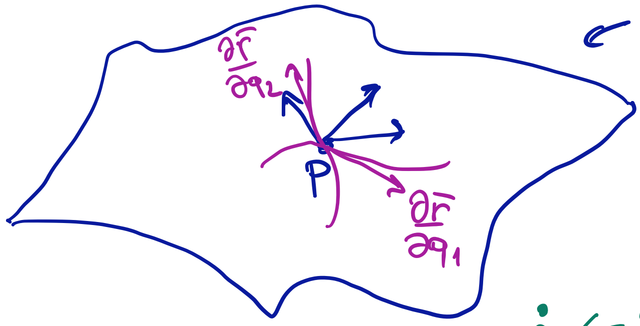
Def. Sistema di N pti materiali costituisce un SISTEMA OLONOMO locale a $n$ gradi di libertà ($n \leq 3N$), se la configurazione $\bar{w} \in \mathbb{R}^{3N}$ è espressa localmente nella forma parametrica $(*)$, con funzioni $w_j$ che soddisfano $\mathrm{rk}\left(\frac{\partial w_j}{\partial q_h}\right) = n$ $\quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_n}$ sono lin. indip. e formano una base per lo spazio tangente $T_P Q$.

Un moto è descritto dalle funz. $q_h(t) \quad h = 1, \dots, n$

Velocità: vett. tg a una traiettoria; dato un vett. tg riesco sempre a trovare una traiettoria che ha quello come velocità $\Longrightarrow$

$\Rightarrow T_P Q = \{$ spazio delle possibili velocità che una traiettoria può avere passando per P $\}$

Per esempio, pto vincolato su superficie




$\bar v \in T_P Q$
$$\bar v = \sum_{h=1}^{n} \overset{\dot q_h}{\cancel{v_h}} \frac{\partial \bar w}{\partial q_h}$$

$\dot q_h$ ← coordinate del vettore $\bar v$ in $T_P Q$ (rispetto la base $\frac{\partial \bar w}{\partial q_h}$)

Andiamo a vedere punto per punto; prendiamo pto i-esimo e definiamo "velocità virtuale"

$$\bar v_i^* = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_h} \dot q_h \qquad \bar v = (\bar v_1^*, \bar v_2^*, \dots, \bar v_N^*)$$

Se voglio determinare lo STATO del sistema (vincolato) (cioè le posizioni e le velocità di ogni singolo pto) devo dare le $2n$ coordinate

$$(q_1, \dots, q_n, \dot q_1, \dots, \dot q_n)$$

Se ora voglio un moto $\bar w(t)$, questo è descritto da $n$ funzioni $q_1(t), \dots, q_n(t)$

$$\bar w(t) = \bar w(q_1(t), \dots, q_n(t)) \qquad \text{(vincolo fisso)}$$

$$\bar v(t) = \frac{d\bar w}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar w}{\partial q_h} \cdot \dot q_h(t)$$

$\dot q_h(t)$ ← è la derivata temporale delle funz. $q_h(t)$

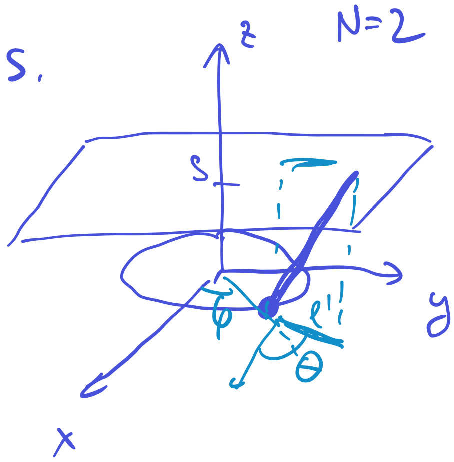
Se il vincolo non è fisso allora

$$\bar w = \bar w(q_1, \dots, q_m; t)$$

↳ velocità è $\bar v = \frac{d\bar w(t)}{dt} = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar w}{\partial q_h} \dot q_h(t) + \frac{\partial \bar w}{\partial t}$

$$\bar w(t) = \bar w(q_1(t), \dots, q_m(t); t)$$

ES. $N=2$




Relazioni vincolari: $r=4$

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0 & f^{(1)} \\ z_1 = 0 & f^{(2)} \\ (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (\underbrace{z_1 - z_2}_{s^2})^2 = l^2 & \\ z_2 = s & f^{(4)} \end{cases}$$

$$(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 - l'^2 = 0 \quad f^{(3)}$$

$$l'^2 = l^2 - s^2 \qquad l > s$$

$$m = 3N - r = 6 - 4 = 2$$

$$\nabla f^{(1)} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla f^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla f^{(3)} = \begin{pmatrix} 2(x_1-x_2) \\ 2(y_1-y_2) \\ 0 \\ 2(x_2-x_1) \\ 2(y_2-y_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla f^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lin. indip.

Descriz. parametrica

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\varphi \\ y_1 = R\sin\varphi \\ z_1 = 0 \\ x_2 = R\cos\varphi + l'\cos\theta \\ y_2 = R\sin\varphi + l'\sin\theta \\ z_2 = s \end{cases} \quad \leftarrow \bar w = \bar w(\varphi, \theta)$$

$$\frac{\partial \bar w}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \\ -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \bar w}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -l'\sin\theta \\ l'\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{indip.}$$

# Vincoli ideali (dinamico)

Vincoli sono realizzati da FORZE (reazioni vincolari)

$$m\bar{a}_i = \bar{F}_i + \bar{\Phi}_i \qquad i=1,\dots,N$$

Il nostro scopo è ottenere $n$ equazioni (indip. dalle reaz. vincolari)

nelle $n$ incognite $q_h(t)$ $h=1,\dots,n$ (funzioni)

**Def.** Si dice che un sist. olonomo di $N$ pti materiali è soggetto a VINCOLI IDEALI se l'insieme delle reaz. vincolari $\bar{\Phi}_1,\dots,\bar{\Phi}_N$ è caratterizzato dalla cond.:

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \delta\bar{r}_i = 0 \qquad \forall\, \delta\bar{r}_i$$

$\leftarrow$ reaz. vincolari devono compiere lavoro (virtuale) nullo

Siccome $\delta\bar{r}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\delta q_h$, la condiz. diventa

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\cdot \delta q_h = \sum_{h=1}^{n} \delta q_h \left( \sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \right) = 0 \qquad \forall\, \delta q_h$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \qquad h=1,\dots,n \qquad (*)$$

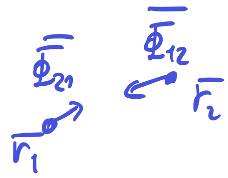
$\longrightarrow$ $n$ eq. indipendenti

[ $a\alpha + b\beta = 0$ $\forall$ scelta di $a$ e $b$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$ . ]

Esempio tipico di vincoli ideali: pti vincolati a una superficie liscia $\rightarrow$ qui la condizione $(*)$ è banalm. soddisfatta purché $\bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \quad \forall i$

ES.) Vincolo di rigidità: realizzato da forze interne che soddisfano la 3ª legge di Newton




$N=2 \qquad \|\bar{r}_1 - \bar{r}_2\|^2 = \text{cost.} \quad (\bullet)$

reaz. vinc.: $\bar{\Phi}_{12}, \bar{\Phi}_{21}$ t.c. $\bar{\Phi}_{12} = -\bar{\Phi}_{21}$

Deriviamo $(\bullet)$ rispetto a $\frac{\partial}{\partial q_h}$

$$\frac{\partial}{\partial q_h}\Big( (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \cdot (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \Big) = 0$$

$$2(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \cdot \left( \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h} \right) = 0$$

Verifichiamo che il vincolo è ideale:

$$\bar{\Phi}_{21} \cdot \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} + \bar{\Phi}_{12} \cdot \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h} = \bar{\Phi}_{21} \cdot \left( \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h} \right) \propto$$

$$\propto (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \cdot \left( \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h} \right) = 0 \quad //$$

# ENERGIA CINETICA

$$\bar{q} = (q_1, \dots, q_m) \qquad \dot{\bar{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$$

Prendiamo un moto

$$\bar{r}_i(t) = \bar{r}_i(\bar{q}(t), t)$$

(Parametrizzazione del sistema vincolato è data dalle funzioni $\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{q}, t)$ )

$$\bar{v}_i(t) = \frac{d}{dt}\bar{r}_i(t) = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}(t), t) \cdot \dot{q}_h(t) + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(\bar{q}(t), t)$$

le velocità possibili sono

$$\bar{v}_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}, t)) \cdot \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(\bar{q}, t) \qquad (*)$$

$$\equiv \bar{v}_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

funzione di $\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t$

**Prop.** Dato un sist. olonomo di $N$ pti materiali a $n$ gradi di lib. e sia l'en. cinetica data da

$$T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \|\bar{v}_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)\|^2 \qquad T: \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$$

Allora si ha che

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad , \text{ dove}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{m} a_{hk}(\bar{q}, t)\, \dot{q}_h \dot{q}_k \qquad a_{hk}(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$$

$$T_1 = \sum_{h=1}^{m} b_h(\bar{q}, t)\, \dot{q}_h \qquad b_h(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} c(\bar{q}, t) \qquad c(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

dove $a = (a_{hk})$ è una matrice SIMMETRICA

e strettam. DEFINITA POSITIVA

**Dim.** $T(\bar q, \dot{\bar q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \| \bar v_i(\bar q, \dot{\bar q}, t) \|^2$  $\bar v_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_h}(\bar q, t) \cdot \dot q_h + \frac{\partial \bar r_i}{\partial t}(\bar q, t)$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left( \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_h} \dot q_h + \frac{\partial \bar r_i}{\partial t} \right) \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_k} \dot q_k + \frac{\partial \bar r_i}{\partial t} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[ \sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_k} \dot q_h \dot q_k + 2 \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar r_i}{\partial t} \dot q_h + \frac{\partial \bar r_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar r_i}{\partial t} \right]$$

$$a_{hk}(\bar q, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_k}$$

- simm. $a_{hk} = a_{kh}$
- def. positiva

[ Matrice $a$ è strett. def. pos. se $\forall$ vett. $\bar u \neq 0$ ho che
$(a \bar u) \cdot \bar u > 0$ ; in componenti:

$$\sum_h \Big( \underbrace{\sum_k a_{hk} u_k}_{} \Big) u_h = \sum_{hk} a_{hk} u_h u_k > 0$$ ]

verifichiamolo per la nostra $a$

$$\sum_{hk} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_k} u_h u_k$$  $\bar P_i \equiv \sum_h \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_h} u_h$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \| \bar P_i \|^2 > 0 \quad //$$

La matrice $a$ è detta MATRICE CINETICA

- Siccome $a$ è str. def. pos. $\rightsquigarrow$ $\det a > 0$

$\Rightarrow$ $a$ è INVERTIBILE

• Se $\bar{r}_i$ è una funz. delle sole $q_h$ (INDIP. da $t$) $\forall i$ allora $T_1 = 0$ e $T_0 = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $T$ è una FORMA QUADRATICA OMOGENEA (def. pos.) nelle $\dot{q}_h$.

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{m} a_{hk}(\bar{q},t)\, \dot{q}_h \dot{q}_k$$

ES) Pto materiale in coord. cilindriche

$$F(\bar{q}): \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = \zeta \end{cases} \qquad q_1\ q_2\ q_3 \leftrightarrow r\ \varphi\ \zeta$$

$$\bar{v}(\bar{q},\dot{\bar{q}}): \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z} = \dot{\zeta} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\Big[(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + \dot{\zeta}^2\Big] =$$

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$$= \frac{1}{2}m\Big[\dot{r}^2\underline{\cos^2\varphi} + r^2\dot{\varphi}^2\underline{\sin^2\varphi} - 2\cancel{r\dot{r}\dot{\varphi}}\cos\varphi\sin\varphi + \dot{r}^2\underline{\sin^2\varphi} + r^2\dot{\varphi}^2\underline{\cos^2\varphi} + 2\cancel{r\dot{r}\dot{\varphi}}\sin\varphi\cos\varphi + \dot{\zeta}^2\Big]$$

$$= \frac{1}{2}m\Big[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\zeta}^2\Big] =$$

$a(\bar{q},t)$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{r} & \dot{\varphi} & \dot{\zeta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & & \\ & mr^2 & \\ & & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{r}\\ \dot{\varphi}\\ \dot{\zeta}\end{pmatrix}$$

ES) coordinate POLARI.

## FORZE GENERALIZZATE

Prop. Sia $\bar{F}_i$ la forza (attiva) sull'i-esimo pto materiale. Allora il "lavoro virtuale" dato da $\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i$, corrispondente agli spostam. virtuali $\delta\bar{r}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\delta q_h$, è espresso in termini di coord libere come

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i = \sum_{h=1}^{n} Q_h \,\delta q_h \quad \text{con} \quad Q_h = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}$$

$$h = 1, \dots, n$$

$Q_1, \dots, Q_n$ sono dette FORZE GENERALIZZATE

In particolare, per forze $\bar{F}_i$ puramente posizionali ~~conserv~~ in cui $\exists\, V = V(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, t)$ t.c. $\bar{F}_i = -\bar{\nabla}_i V$ si ha

$$Q_h(\bar{q}, t) = -\frac{\partial \tilde{V}(\bar{q}, t)}{\partial q_h} \qquad h = 1, \dots, n \qquad (\#)$$

dove $\tilde{V}(\bar{q}, t) \equiv V(\bar{r}_1(\bar{q}, t), \dots, \bar{r}_N(\bar{q}, t), t)$

Dim (#) : $Q_h = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = -\sum_{i=1}^{N} \bar{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} =$

$$\bar{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_h} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_h}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial q_h} \tilde{V}(\bar{q}, t) \quad //$$