**Esercizio.** Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\, p \rightarrow q \rightarrow r \,) \rightarrow (\, p \rightarrow q \,) \rightarrow p \rightarrow r$$

**Esercizio.** Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\, p \rightarrow q \rightarrow r\,) \rightarrow (\, p \rightarrow q\,) \rightarrow p \rightarrow r$$

$*$ TAVOLE DI VERITÀ: 8 righe da sviluppare ( provateci! )

**Esercizio.** Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\,p \rightarrow q \rightarrow r\,) \rightarrow (\,p \rightarrow q\,) \rightarrow p \rightarrow r$$

$*$ ***reductio ad absurdum:***

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
( & p & \rightarrow & ( & q & \rightarrow & r & ) & ) & \rightarrow & ( & ( & p & \rightarrow & q & ) & \rightarrow & ( & p & \rightarrow & r & ) & ) \\
 & & & & & & & & & 0 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & {\scriptstyle 1} & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

**Esercizio.** Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(p \to q \to r) \to (p \to q) \to p \to r$$

∗ ***reductio ad absurdum:***

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
( & p & \to & ( & q & \to & r & ) & ) & \to & ( & ( & p & \to & q & ) & \to & ( & p & \to & r & ) & ) \\
 & & 1 & & & & & & & 0 & & & & & & & 0 & & & & & & \\
 & & {\scriptstyle 2} & & & & & & & {\scriptstyle 1} & & & & & & & {\scriptstyle 2} & & & & & &
\end{array}$$

**Esercizio.** Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\,p \to q \to r\,) \to (\,p \to q\,) \to p \to r$$

$*$ ***reductio ad absurdum:***

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
( & p & \to & ( & q & \to & r & ) & ) & \to & ( & ( & p & \to & q & ) & \to & ( & p & \to & r & ) & ) \\
 & & 1 & & & & & & & 0 & & & & 1 & & & 0 & & & 0 & & & \\
 & & {\scriptstyle 2} & & & & & & & {\scriptstyle 1} & & & & {\scriptstyle 3} & & & {\scriptstyle 2} & & & {\scriptstyle 3} & & &
\end{array}$$

**Esercizio.** Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\,p \rightarrow q \rightarrow r\,) \rightarrow (\,p \rightarrow q\,) \rightarrow p \rightarrow r$$

$*$ ***reductio ad absurdum:***

| ( | $p$ | $\rightarrow$ | ( | $q$ | $\rightarrow$ | $r$ | ) | ) | $\rightarrow$ | ( | ( | $p$ | $\rightarrow$ | $q$ | ) | $\rightarrow$ | ( | $p$ | $\rightarrow$ | $r$ | ) | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | | | | | | 0 | | | | 1 | | | 0 | | 1 | 0 | 0 | | |
| | | 2 | | | | | | | 1 | | | | 3 | | | 2 | | 4 | 3 | 4 | | |

**Esercizio.** Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\, p \rightarrow q \rightarrow r \,) \rightarrow (\, p \rightarrow q \,) \rightarrow p \rightarrow r$$

∗ ***reductio ad absurdum:***

| ( | $p$ | $\rightarrow$ | ( | $q$ | $\rightarrow$ | $r$ | ) | ) | $\rightarrow$ | ( | ( | $p$ | $\rightarrow$ | $q$ | ) | $\rightarrow$ | ( | $p$ | $\rightarrow$ | $r$ | ) | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | | | | | | 0 | | | | 1 | 1 | | 0 | | 1 | 0 | 0 | | |
| | | 2 | | | | | | | 1 | | | | 3 | 5 | | 2 | | 4 | 3 | 4 | | |

**Esercizio.** Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\,p \rightarrow q \rightarrow r\,) \rightarrow (\,p \rightarrow q\,) \rightarrow p \rightarrow r$$

$*$ ***reductio ad absurdum:***

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
( & p & \rightarrow & ( & q & \rightarrow & r & ) & ) & \rightarrow & ( & ( & p & \rightarrow & q & ) & \rightarrow & ( & p & \rightarrow & r & ) & ) \\
 & & 1 & & & 0 & & & & 0 & & & & 1 & 1 & & 0 & & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & {\scriptstyle 2} & & & {\scriptstyle 6} & & & & {\scriptstyle 1} & & & & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 5} & & {\scriptstyle 2} & & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 4} & &
\end{array}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

**Esercizio.** Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\,p\rightarrow q\rightarrow r\,)\rightarrow(\,p\rightarrow q\,)\rightarrow p\rightarrow r$$

∗ ***reductio ad absurdum:***

| ( | $p$ | $\rightarrow$ | ( | $q$ | $\rightarrow$ | $r$ | ) | ) | $\rightarrow$ | ( | ( | $p$ | $\rightarrow$ | $q$ | ) | $\rightarrow$ | ( | $p$ | $\rightarrow$ | $r$ | ) | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | | | 0 | | | | 0 | | | | 1 | 1 | | 0 | | 1 | 0 | 0 | | |
| | 7 | 2 | | | 6 | | | | 1 | | | | 3 | 5 | | 2 | | 4 | 3 | 4 | | |

**Esercizio.** Stabilire che il seguente enunciato è una tautologia:

$$(\,p \to q \to r\,) \to (\,p \to q\,) \to p \to r$$

∗ ***reductio ad absurdum:***

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ( | $p$ | $\to$ | ( | $q$ | $\to$ | $r$ | ) | ) | $\to$ | ( | ( | $p$ | $\to$ | $q$ | ) | $\to$ | ( | $p$ | $\to$ | $r$ | ) | ) |
| | $\underline{\underline{0}}$ | 1 | | | 0 | | | | 0 | | | | 1 | 1 | | 0 | | $\underline{\underline{1}}$ | 0 | 0 | | |
| | 7 | 2 | | | 6 | | | | 1 | | | | 3 | 5 | | 2 | | 4 | 3 | 4 | | |

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

**Esercizio.** Stabilire che i seguenti due enunciati sono tautologie:

$$p \rightarrow q \rightarrow p$$
$$(\, p \rightarrow q \rightarrow r\,) \rightarrow \big((\, p \rightarrow s\,) \rightarrow q'\big) \rightarrow (\, p \rightarrow q \rightarrow r\,)$$

**Esercizio.** Stabilire che i seguenti due enunciati sono tautologie:

$$p \rightarrow q \rightarrow p$$
$$(p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow s) \rightarrow q') \rightarrow (p \rightarrow q \rightarrow r)$$

∗ OSSERVAZIONE: il 2º enunciato è '*istanza*' del primo che possiamo dimostrare tautologico per *reductio ad absurdum:*

$$\begin{array}{cccccc} p & \rightarrow & ( & q & \rightarrow & p & ) \\ \underline{\underline{1}} & 0 & & 1 & 0 & \underline{\underline{0}} & \\ 2 & 1 & & 3 & 2 & 3 & \end{array}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

**Esercizio.** Stabilire che i seguenti due enunciati sono tautologie:

$$p \rightarrow q \rightarrow p$$
$$(p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow s) \rightarrow q') \rightarrow (p \rightarrow q \rightarrow r)$$

∗ OSSERVAZIONE: il 2° enunciato è '*istanza*' del primo che possiamo dimostrare tautologico per *reductio ad absurdum:*

$$\begin{array}{cccccc} p & \rightarrow & ( & q & \rightarrow & p & ) \\ \underline{\underline{1}} & 0 & & 1 & 0 & \underline{\underline{0}} & \\ 2 & 1 & & 3 & 2 & 3 & \end{array}$$

∗ PERTANTO: anche il 2° è una tautologia

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Forse *qualunque* tautologia è *derivabile* (i.e., ottenibile) a partire da

- pochi schemi *tauto*logici, tramite
- istanziazione di tali schemi e
- impieghi della regola MP ( *modus ponens* ):

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha\\ \alpha \rightarrow \gamma\end{array}}{\gamma} \quad \text{o anche} \quad \frac{\begin{array}{c}\alpha \rightarrow \gamma\\ \alpha\end{array}}{\gamma}$$

Questi gli *assiomi logici* proposti da Willard Van Orman Quine nel 1938:

$$(\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$$

$$\alpha \rightarrow \bullet \rightarrow \alpha$$

$$\big((\alpha \rightarrow \bullet) \rightarrow \alpha\big) \rightarrow \alpha$$

$$\mathbf{f} \rightarrow \bullet$$

Stabilire che il calcolo che ha questi assiomi è *corretto* ('*sound*') richiede la verifica che sono davvero tautologie

# Assiomi tautologici ( scelta di Church, 1956 )

| | |
|---|---|
| i. | $\big(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\big) \rightarrow \big((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)\big)$ |
| ii. | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ |
| iii. | $\big((\alpha \rightarrow f) \rightarrow (\beta \rightarrow f)\big) \rightarrow \big(\beta \rightarrow \alpha\big)$ |

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

## Un modo di definire le dimostraz. proposizionali

Diremo che la sequenza

$$\delta \quad = \quad \langle \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_h \rangle$$

è una $\boxed{\textbf{\textit{dimostrazione} di } \vartheta \text{ da } A}$ quando:

1) $\delta_h = \vartheta$;

2) per ogni $i = 0, \ldots, h$, accade che $\delta_i$ sia un enunciato di $\mathbb{P}$ che o:
   - ⋆ appartiene ad $A$, oppure
   - ⋆ ricade in uno dei tre schemi del lucido precedente, oppure
   - ⋆ è *preceduto* da due enunciati $\delta_{j_0}$ e $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \rightarrow \delta_i)$, nel senso che $j_0 < i$ e $j_1 < i$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

## Esempio di dimostrazione

Dimostriamo in 9 passi l'enunciato $f \rightarrow p$ da $\emptyset$, come segue:

| | | Ax. | | | Prem. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $f \rightarrow (f \rightarrow f)$ | [ii] | | | |
| 2. | $(f \rightarrow (f \rightarrow f)) \rightarrow ((f \rightarrow f) \rightarrow (f \rightarrow f))$ | [i] | 3. | $(f \rightarrow f) \rightarrow (f \rightarrow f)$ | [1, 2] |
| 4. | $((f \rightarrow f) \rightarrow (f \rightarrow f)) \rightarrow (f \rightarrow f)$ | [iii] | 5. | $f \rightarrow f$ | [3, 4] |
| 6. | $(f \rightarrow f) \rightarrow ((p \rightarrow f) \rightarrow (f \rightarrow f))$ | [ii] | 7. | $(p \rightarrow f) \rightarrow (f \rightarrow f)$ | [5, 6] |
| 8. | $((p \rightarrow f) \rightarrow (f \rightarrow f)) \rightarrow (f \rightarrow p)$ | [iii] | 9. | $f \rightarrow p$ | [7, 8] |

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

# Uno schema 'totipotente'

Questo lo schema d'assioma proposto da Jan Łukasiewicz nel 1936 ( e 'sdoganato' da Larry Wos nel 1999 )

$$\Big(\big(\beta \rightarrow \bullet\big) \rightarrow \Big(((\alpha \rightarrow \mathbf{f}) \rightarrow \gamma \rightarrow \mathbf{f}) \rightarrow \bullet\Big) \rightarrow \alpha\Big) \rightarrow \bullet \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma \rightarrow \beta$$

Basta da solo!! ( Un altro 'solitario' leggermente piú semplice fu scoperto da Carey Arthur Meredith nel 1952 )

Il primo risultato di *completezza* ( i.e., "ogni tautologia è derivabile dagli assiomi logici") dovuto ad Emil Leon Post, è del 1920