SISTEMA MECCANICO a N PTI MATERIALI VINCOLATI (riassunto)

soggetto a r vincoli e descritto da n coordinate libere $\underbrace{q_1, \dots, q_n}_{\bar q}$ $(n = 3N - r)$

- Ogni valore che $\bar q$ può assumere individua un pto nello spazio delle configurazioni $Q \subset \mathbb{R}^{3N}$
- Ogni pto di Q corrisponde a una POSSIBILE config. del sistema.

- Al variare del tempo t, il sistema (genericam.) cambia configurazione

Descriviamo questo "moto" in Q con funz. del tempo

$$\bar q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$$

a ogni t corrisponde (gen.) un diverso pto in Q

↳ l'immagine di pto funzione in Q è una CURVA, chiamata TRAIETTORIA (o ORBITA)

Il vett. tg alla traiettoria al temp t_0 è dato da

$$\frac{d\bar q(t_0)}{dt} = (\dot q_1(t_0), \dots, \dot q_n(t_0)) \quad \text{(funz. di } t_0\text{)}$$

Diverse traiettorie possibili che passano al pto P nel temp t_0 danno diversi vettori tangenti $\in T_PQ$

- L'insieme dei vett. tg forma uno spazio vettoriale (T_PQ), le cui coordinate (= componenti dei vett.) sono chiamate $(\dot q_1, \dots, \dot q_n)$
- Lo stato del sistema è determinato da $2n$ numeri:

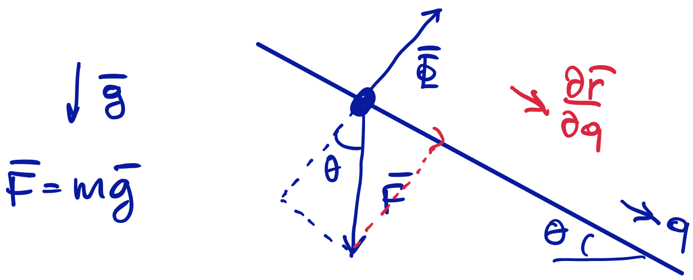
$$(\underbrace{q_1, \dots, q_n}_{\text{posizione in } Q \text{ di } P} ; \underbrace{\dot q_1, \dots, \dot q_n}_{\text{vett. tg a } Q \text{ in } P}) \rightsquigarrow \text{SPAZIO DEGLI STATI}$$

~ "FIBRATO TANGENTE TQ"

↳ Ci interessa trovare delle equazioni differenziali con incognite $q_h(t)$, che determinino il moto del sistema in Q.

EQUAZIONI DI LAGRANGE

Es. Piano inclinato



$\bar{F}$ forza attiva

$\bar{\Phi}$ reaz. vincolare

Proiettiamo l'eq. di Newton sulla direzione tg alla linea coordinata q:

$$\left[\bar{F} + \cancel{\bar{\Phi}} - m\bar{a}\right] \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q} = 0$$

$$mg\,\text{sen}\,\theta - m\ddot{q} = 0 \qquad (\ast)^{\text{VEDI ALLA FINE}}$$

Ora faremo lo stesso per un generico sistema di N pti vincolati.

Sistema olonomo a n gradi di lib., N pti materiali in $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N$ con masse $m_1, \dots, m_N$ soggetto alle forze attive $\bar{F}_i$ e reaz. vinc. $\bar{\Phi}_i$ ideali

Eq. Newton: $\quad m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i + \overset{\swarrow \text{ignote}}{\bar{\Phi}_i} \qquad i = 1, \dots, N$

↳ eq. diff. per le funz. $\bar{r}_i(t)$

Vincoli ideali: $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \qquad \forall h = 1, \dots, n$

$\uparrow$

$\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{q}, t)$

(*) VEDI ULTIMA PAG.

Proiettiamo le eq. di Newton sulle direzione tg a Q:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \bar{a}_i - \bar{F}_i - \cancel{\bar{\Phi}_i} \right) \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0$$

n equazioni nelle n incognite $q_h(t)$

$\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{q}, t) \qquad \dfrac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}, t)$ componiamo queste funzioni col moto $q_h(t)$

$\bar{r}_i(t) = \bar{r}_i(\bar{q}(t), t) \qquad \dfrac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}(t), t) \qquad \bar{v}_i(t) = \dfrac{d \bar{r}_i}{dt}(t)$

- $\displaystyle \bar{a}_i = \frac{d \bar{v}_i}{dt} \Rightarrow m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = m_i \frac{d \bar{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = m_i \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \right) - m_i \bar{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}$

- $\displaystyle \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}(t), t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_h}(\bar{q}(t), t)\, \dot{q}_k(t) + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t \partial q_h}(\bar{q}(t), t) =$

$$= \frac{\partial}{\partial q_h} \Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}}_{\bar{v}_i} \Bigg) = \frac{\partial}{\partial q_h} \bar{v}_i(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$$

- $\displaystyle m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = m_i \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \right) - m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_h}$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i(\bar{q}, t)}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \bar{r}_i(\bar{q}, t)}{\partial t} \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_h}$$

$$\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_h} = \begin{cases} 1 & \text{se } l = h \\ 0 & \text{se } l \neq h \end{cases} = \delta_{lh}$$

$$\left[(x,y) \quad f(x,y) = x \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \right]$$

$$= \cancel{\sum_{l=1}^{m}} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{\cancel{l}\,h}} \cancel{\delta_{lh}} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}$$

$$- m \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = m_i \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_h} \right) - m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_h}$$

$$= m_i \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \bar{v}_i^2 \right) - \frac{1}{2} m_i \frac{\partial}{\partial q_h} \bar{v}_i^2$$

$$- \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \bar{v}_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_h} \bar{v}_i^2 \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{v}_i^2 \right)}_{= T(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)} - \frac{\partial}{\partial q_h} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{v}_i^2 \right)}_{= T}$$

[T è una funz. $: \mathbb{R}^{2m+1} \to \mathbb{R}$

$(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \mapsto T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$]

$$- \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = - Q_h \quad \text{(forze generalizzate)}$$

Prop. Dato il sistema come sopra. Allora le funzioni $q_h(t)$ soddisfano le EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_h} T(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t) - \frac{\partial T}{\partial q_h}(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t) = Q_h(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t)}$$

Corollario Se le forze attive sono forze derivanti da un'en. potenziale $V(\bar q, t)$ allora le eq. di Lagrange diventano

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t) = 0}$$

dove $L(\bar q, \dot{\bar q}, t) = T(\bar q, \dot{\bar q}, t) - V(\bar q, t)$

$\uparrow$
LAGRANGIANA

$L : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

Dim. $\frac{\partial V}{\partial \dot q_h} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_h}(T - V) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h}$

Inoltre $Q_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_h} = \frac{\partial T}{\partial q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \frac{\partial T}{\partial q_h} + Q_h$ //

ES) Osc. armonico $L = \frac{1}{2} m \dot q^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 = T - V$

Eq. Lag. $\frac{\partial L}{\partial \dot q} = m \dot q \qquad \frac{\partial L}{\partial q} = -m\omega^2 q$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}(q(t), \dot q(t)) - \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot q(t)) = \frac{d}{dt}(m \dot q(t)) + m\omega^2 q(t) = m \ddot q(t) + m\omega^2 q(t)$$

Formalismo Lagrangiano può essere applicato anche a problemi che esulano la meccanica; in questi casi, generalm. L non ha la forma $T-V$.
Se invece L è della forma $T-V$ il sistema è detto SIST. LAGRANGIANO NATURALE.

Eq. di LAGRANGE sono EQ. DIFF. del 2° ord nelle incognite $q_1(t), \dots, q_m(t)$.

$$T(\bar q, \dot{\bar q}, t) = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{m} a_{hk}(\bar q, t)\,\dot q_h \dot q_k}_{T_2} + \underbrace{\sum_{h=1}^{m} b_h(\bar q, t)\,\dot q_h}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2} c(\bar q, t)}_{T_0}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_\ell} = \frac{1}{2}\sum_{h,k} a_{hk}\frac{\partial}{\partial \dot q_\ell}(\dot q_h \dot q_k) + \sum_h b_h \underbrace{\frac{\partial \dot q_h}{\partial \dot q_\ell}}_{=\delta_{h\ell}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_h \sum_k a_{hk}(\delta_{h\ell}\,\dot q_k + \dot q_h\,\delta_{k\ell}) + \sum_h b_h \delta_{h\ell}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\cancel{k}=1 \to h}^{m} a_{\ell \cancel{k} \to h}\,\dot q_{\cancel{k} \to h} + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{m} \underbrace{a_{h\ell}}_{=a_{\ell h}}\,\dot q_h + b_\ell$$

cambio nome all'indice

$=a_{\ell h}$ perchè la matrice cinetica è SIMMETRICA

$$= \sum_{h=1}^{m} a_{\ell h}(\bar q, t)\,\dot q_h + b_\ell(\bar q, t)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\ell} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{h=1}^{m} a_{\ell h}(\bar q(t), t)\,\dot q_h(t) + b_\ell(\bar q(t), t)\right]$$

$$= \sum_{h,m} \frac{\partial a_{\ell h}}{\partial q_m}\dot q_m \dot q_h + \boxed{\sum_h a_{\ell h}\,\ddot q_h} + \sum_k \frac{\partial b_\ell}{\partial q_k}\dot q_k + \sum_h \frac{\partial a_{\ell h}}{\partial t}\dot q_h + \frac{\partial b_\ell}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_e} = \frac{1}{2}\sum_{hk} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_e}\dot q_h \dot q_k + \sum_k \frac{\partial b_k}{\partial q_e}\dot q_k + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial q_e}$$

Eq. di Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_e} - \frac{\partial T}{\partial q_e} = Q_e$ può essere scritte

$$\sum_h a_{eh}\ddot q_h + g_e(\bar q, \dot{\bar q}, t) = Q_e$$

$$\sum_{h=1}^{n} a_{eh}\ddot q_h = Q_e - g_e$$

matrice cinetica è INVERTIBILE

$$\mathcal{Q}\ddot{\bar q} = \bar Q - \bar g \qquad (\ddot x = f(x,\dot x, t))$$

$$\ddot{\bar q} = \mathcal{Q}^{-1}(\bar Q - \bar g) = \bar f(\bar q, \dot{\bar q}, t) \qquad (*)$$

$\hookrightarrow$ Eq. diff. del 2° ord. in forma NORMALE

Prop. Dato un sist. olonomo di N pti materiali a n gradi di libertà, con assegnato dato iniziale $(\bar r_i^{(0)}, \bar v_i^{(0)})$ compatibili con il vincolo, allora le eq. di Lagrange $(*)$ determinano UNIVOCAMENTE le $\bar r_i(t)$ $i=1,\dots,N$ e ci permettono di trovare le reaz. vincolari $\bar\Phi_i$.

Dim. $\bar r_i = \bar r_i(\bar q, t)$ $\qquad \bar v_i = \bar v_i(\bar q, \dot{\bar q}, t)$

Dati $\bar r_i^{(0)}$ e $\bar v_i^{(0)}$ compatibili col vincolo $\rightarrow$

$\rightarrow q_h^{(0)}, \dot q_h^{(0)}$

Teor. di es. e unic.

Eq. $(*)$ eq. 2° ord. in $q_h(t) \rightarrow \bar q(t)$ sono determinate univocam. da $\bar q^{(0)}, \dot{\bar q}^{(0)}$

$\rightarrow \underline{\bar r_i(t) = \bar r_i(\bar q(t), t)} \Rightarrow \bar a_i = \frac{d^2 \bar r_i}{dt^2} \Rightarrow \bar\Phi_i = m\bar a_i - \bar F_i$ //

(*) Proiezione di un vettore $\bar{V}$ su base $\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}$ di T_pQ

In $\mathbb{R}^{3N}$ c'è sp. $\perp$ a T_pQ che è di dim $r = 3N - n$.
Prendiamo base $\bar{u}_a^{\perp}$ $a = 1, \dots, r$. Allora $\bar{V} \in \mathbb{R}^{3N}$ può essere espresso nel seguente modo:

$$\bar{V} = \sum_{k=1}^{n} V_k \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_k} + \sum_{a=1}^{r} V_a^{\perp} \bar{u}_a^{\perp}$$

qte sono, propriamente parlando, le proiezioni di $\bar{V}$ sulla base $\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}$.

Vediamo cosa otteniamo facendo il prodotto scalare con $\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}$:

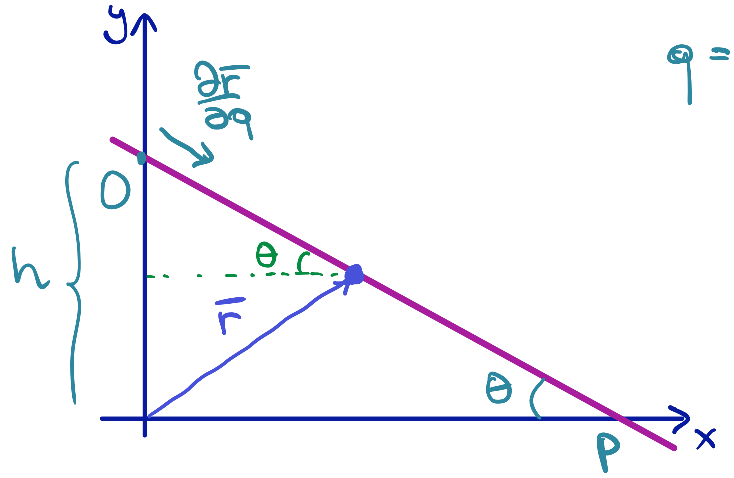
$$\bar{V} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_k} V_k}_{} + 0$$

Questa NON è in generale la componente h-esima del vettore $\bar{V}$ rispetto alla base $\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}$ (lo sarebbe se $\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h}$ fosse una base orto-normale, cosa che in generale funz. $\bar{w}(\bar{q}, t)$ non avviene).

Tuttavia $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_k} V_k = 0 \quad \forall h = 1, \dots, n \iff V_h = 0 \quad \forall h = 1, \dots, n$

Qto avviene perché la metrica $a_{hk} \equiv \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_k}$ è invertibile.

(a)



q = distanza da $O = (0, h)$

$$\begin{cases} x = q\cos\theta \\ y = h - q\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} q\cos\theta \\ h - q\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix}$$

$$0 = \left(\bar{F} + \cancel{\bar{\Phi}} - m\bar{a}\right)\cdot\frac{\partial \bar{r}}{\partial q} = \left(F_x - m a_x,\ F_y - m a_y\right)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix} =$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{q}\cos\theta \\ -\ddot{q}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix}$$

$$= -m\ddot{q}\cos^2\theta + mg\,\mathrm{sen}\,\theta - m\ddot{q}\,\mathrm{sen}^2\theta =$$

$$= mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \ddot{q} \quad //$$