Integrali definiti (nel senso di Riemann)

Problema: cos'è l'area di una figura piana? come calcolarla?

- Graficamente $\rightarrow$ concetto intuitivo ed evidente.
- Tecnicamente $\rightarrow$ ci sono definizioni e formule ad hoc per le figure elementari.

Ma in generale?

La questione è uno dei problemi alla base della nascita del calcolo integrale.

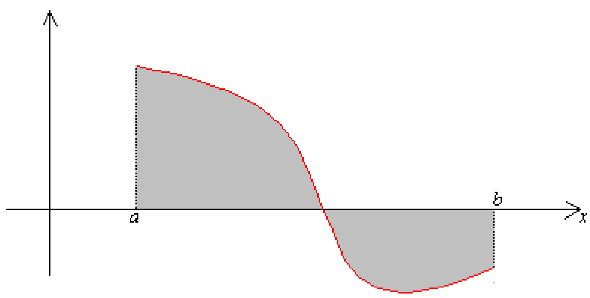
La tratteremo per figure che siano *trapezoidi di una funzione su un intervallo.*

Supponiamo che $f : \operatorname{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione limitata su un intervallo limitato $[a, b]$.

Definizione. *Si chiama trapezoide di f su $[a, b]$ l'insieme*

$$\mathcal{T}_{f,a,b} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ 0 \leq y \leq f(x) \ \textit{oppure}\ f(x) \leq y \leq 0\right\},$$

ossia la parte di piano contenuta nella striscia verticale $a \leq x \leq b$ e delimitata dalle curve $y = 0$ e $y = f(x)$.



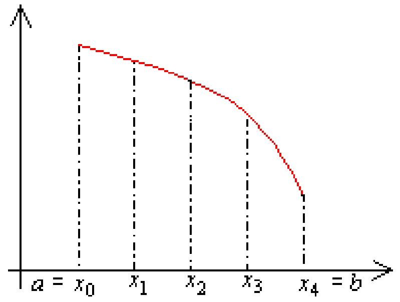
Ci proponiamo di definire l'area di $\mathcal{T}_{f,a,b}$ nel caso di $f(x) \geq 0$ su $[a, b]$ (almeno per ora) e lo faremo tramite approssimazioni con aree di figure elementari (rettangoli).

Visualizzeremo quindi il discorso per $f \geq 0$, ma il procedimento può essere attuato anche se f cambia segno su $[a, b]$ (vedremo poi l'interpretazione geometrica di tale caso).

$\boxed{1}$ Consideriamo una qualsiasi **suddivisione** σ *dell'intervallo* $[a, b]$:

$$\sigma : a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Si tratta di una famiglia di $n+1$ punti di $[a, b]$ (non necessariamente equispaziati), con $x_0 = a$ e $x_n = b$.



Tramite σ, l'intervallo $[a, b]$ viene suddiviso in n sottointervalli $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$, su ciascuno dei quali f è limitata e quindi dotata di inf e sup *finiti*:

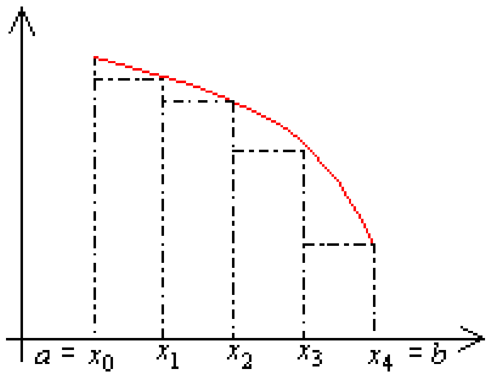
$$m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{ed} \quad M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

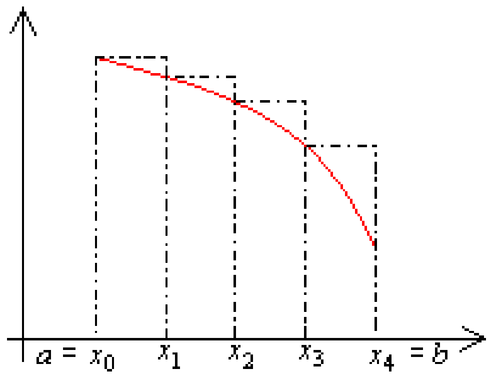
Chiaramente risulta $m_i \leq M_i$ per ogni i.

$\boxed{2}$ Chiamiamo **somma integrale inferiore** e **somma integrale superiore** *di* f *relative alla suddivisione* σ i numeri

$$s_\sigma := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S_\sigma := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

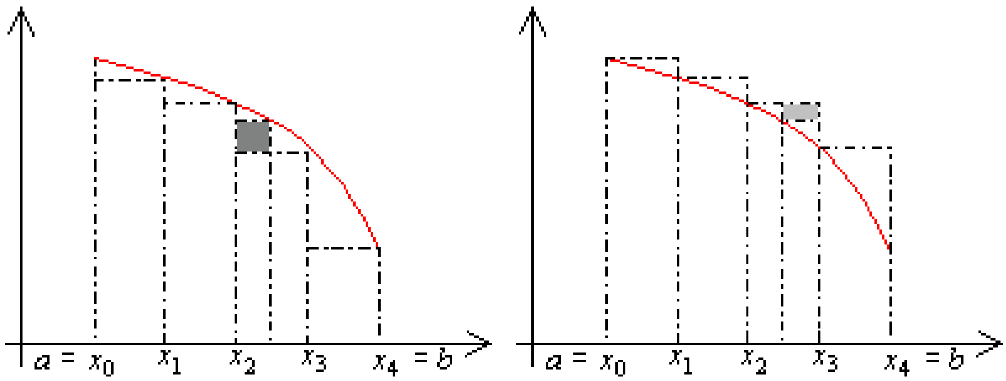




La differenza $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ è la lunghezza del sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$ dato da σ, quindi s_σ ed S_σ sono somme di aree di rettangoli con basi Δx_i ed altezze m_i o M_i.
Chiaramente risulta $s_\sigma \leq S_\sigma$, in quanto $m_i \leq M_i$ per ogni i.

$\boxed{3}$ I numeri s_σ ed S_σ dipendono dalla particolare suddivisione σ considerata (infatti, cambiando σ, cambiano i valori Δx_i, m_i, M_i che definiscono le somme integrali).

È facile verificare che: *aggiungendo punti ad una suddivisione* σ (ossia, come si dice, ***raffinandola***) *le somme inferiori non diminuiscono e quelle superiori non aumentano.*



$\boxed{4}$ Di conseguenza, se σ_1 e σ_2 sono suddivisioni diverse, allora il ***raffinamento comune*** a σ_1 e σ_2, cioè *la suddivisione* $\sigma_1 \cup \sigma_2$ *ottenuta unendo tutti i punti di* σ_1 *e* σ_2, è tale che

$$s_{\sigma_1} \le s_{\sigma_1 \cup \sigma_2} \le S_{\sigma_1 \cup \sigma_2} \le S_{\sigma_2}$$

(dove $s_{\sigma_1 \cup \sigma_2} \le S_{\sigma_1 \cup \sigma_2}$ perché somme relative alla stessa suddivisione). Dunque risulta

$$s_{\sigma_1} \le S_{\sigma_2}\,, \quad \forall \sigma_1, \sigma_2,$$

il che dimostra che: *ogni somma inferiore è* $\le$ *di ogni somma superiore, quand'anche tali somme siano relative a suddivisioni diverse.*

$\boxed{5}$ Dunque ogni somma superiore è un maggiorante dell'insieme delle somme inferiori e ogni somma inferiore è un minorante dell'insieme delle somme superiori, da cui segue[1]

$$\sup_{\sigma} s_{\sigma} \leq \inf_{\sigma} S_{\sigma}$$

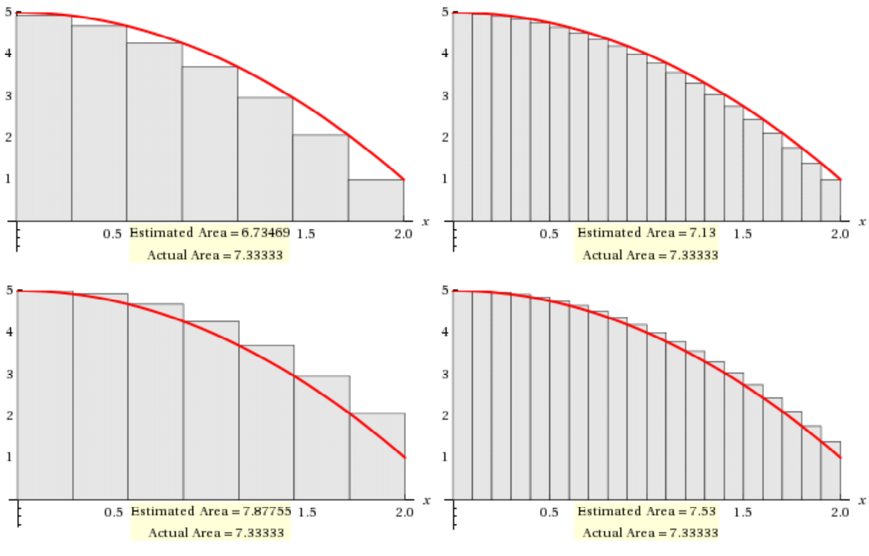
(dove σ varia nell'insieme di tutte le possibili suddivisioni di $[a,b]$). I numeri reali

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_{\sigma} s_{\sigma} \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_{\sigma} S_{\sigma}$$

si chiamano **integrale inferiore** *di* f *su* $[a,b]$ ed **integrale superiore** *di* f *su* $[a,b]$ e dipendono solo più dalla funzione f e dall'intervallo $[a,b]$ su cui la si considera.

[1] Il ragionamento preciso è il seguente: poiché ogni somma superiore S_{σ} è un maggiorante dell'insieme delle somme inferiori, di cui $\sup_{\sigma} s_{\sigma}$ è il minimo dei maggioranti, risulta $\sup_{\sigma} s_{\sigma} \leq S_{\sigma}$. Ciò vale per ogni somma superiore S_{σ} e quindi $\sup_{\sigma} s_{\sigma}$ è un minorante dell'insieme delle somme superiori. Poiché $\inf_{\sigma} S_{\sigma}$ è il massimo dei maggioranti di tale insieme, si ottiene $\sup_{\sigma} s_{\sigma} \leq \inf_{\sigma} S_{\sigma}$.

Osserviamo che integrale inferiore e superiore sono le migliori approssimazioni per difetto e per eccesso di ciò che si vorrebbe definire, cioè l'area di $\mathcal{T}_{f,a,b}$ per $f \geq 0$.



Ma in generale si ha solo

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

e *può effettivamente accadere che la disuguaglianza sia stretta* (vedremo un esempio). In tal caso, nessun valore reale compreso tra integrale inferiore e superiore può essere preso più ragionevolmente degli altri come definizione di area di $\mathcal{T}_{f,a,b}$.

$\boxed{6}$ **Definizione.** *Diciamo che f è **integrabile su** $[a, b]$ (**nel senso di Riemann**) se*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx\ .$$

*In tal caso, il valore comune degli integrali inferiore e superiore è chiamato **integrale definito di f su** $[a, b]$ (**nel senso di Riemann**) ed è denotato con il simbolo*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

$\boxed{7}$ **Definizione.** *Se f è integrabile su $[a, b]$ ed $\underline{f(x) \geqslant 0 \text{ su } [a, b]}$, si definisce*

$$\text{area}\left(\mathcal{T}_{f,a,b}\right) := \int_a^b f(x)\, dx.$$

*Se f non è integrabile su $[a, b]$, diciamo che $\mathcal{T}_{f,a,b}$ **non è dotato di area**.*

Esempio (intergrale di funzioni costanti). Sia $f(x) = k$ per ogni $x \in [a, b]$. Per qualsiasi suddivisione σ di $[a, b]$ risulta $m_i = M_i = k$ per ogni i e quindi

$$s_\sigma = S_\sigma = k \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = k(x_n - x_0) = k(b - a) \qquad (\leftarrow \text{indipendente da } \sigma).$$

Allora $\underline{\int_a^b} k\, dx = \overline{\int_a^b} k\, dx = k(b - a)$ e pertanto risulta

$$\int_a^b k\, dx = k(b - a) \qquad \left(\text{casi particolari: } \int_a^b 0\, dx = 0,\ \int_a^b 1\, dx = b - a\right).$$

Si noti l'accordo con il significato di area se $k \geq 0$.

Classi di funzioni integrabili

Non tutte le funzioni limitate sono integrabili.

Esempio (funzione di Dirichlet). Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

In conseguenza della densità di $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, per qualsiasi suddivisione σ di $[0,1]$ risulta $m_i = 0$ e $M_i = 1$ per ogni i (ogni sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$ contiene punti in cui f vale 0 e punti in cui f vale 1). Allora $\forall \sigma$ si ha

$$s_\sigma = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0 \qquad \text{e} \qquad S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1,$$

da cui segue $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = 0$ e $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = 1.$

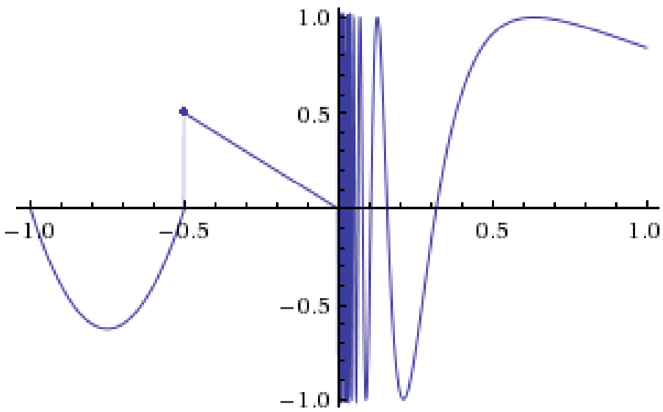
Stabilire se una funzione è integrabile su un intervallo tramite la definizione non è agevole. È quindi utile il seguente risultato di integrabilità.

Teorema. *Sono integrabili su* $[a,b]$ *tutte le funzioni*

1) *limitate su* $[a,b]$ *e continue su* $[a,b]$ *privato eventualmente di un numero finito di punti;*

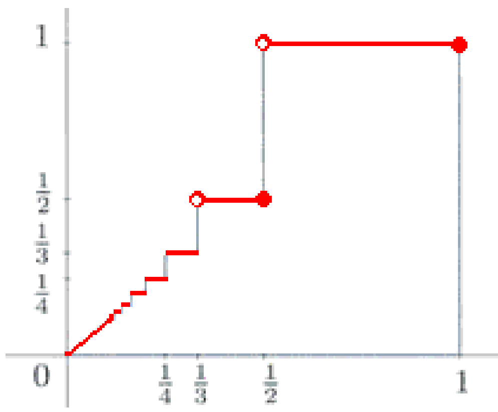
2) *monotone su* $[a,b]$*;*

3) *continue su* $[a,b]$ ($\Rightarrow$ limitate per Weierstrass, caso particolare di 1)).



limitata su $[-1,1]$ e discontinua in $-\frac{1}{2}$ e 0

(non monotona)



monotona su $[0,1]$

(con infinite discontinuità)

Proprietà dell'integrale di Riemann

- Indicheremo con $\mathcal{R}([a,b])$ l'insieme delle funzioni integrabili su $[a,b]$, cioè

$$\mathcal{R}([a,b]) := \{f : \operatorname{dom} f \to \mathbb{R} : f \text{ è integrabile su } [a,b]\}.$$

- La definizione di $\int_a^b f(x)\,dx$ con $a<b$ si estende mediante le seguenti **convenzioni**:

se $f \in \mathcal{R}([a,b])$, *si pone*

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx} \quad e \quad \boxed{\int_c^c f(x)\,dx := 0 \quad \textit{per ogni } c \in [a,b]}.$$

Le seguenti proprietà hanno una visualizzazione immediata in termini di area per funzioni ≥ 0, ma valgono per funzioni di segno qualsiasi.

$\boxed{\mathbf{1}}$ *Se* $c \in (a,b)$, *allora* $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *se e solo se* $f \in \mathcal{R}([a,c])$ *e* $f \in \mathcal{R}([c,b])$.

Conseguenza: *se* $f \in \mathcal{R}([a,b])$, *allora* f *è integrabile su ogni sottointervallo di* $[a,b]$ *e* (viste le convenzioni) *il numero reale* $\int_s^t f(x)\,dx$ *ha significato per ogni* $t,s \in [a,b]$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (**additività rispetto al dominio**) *Se* f *è integrabile su un intervallo* I, *allora*

$$\forall a,b,c \in I, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

La formula si estende facilmente ad un numero finito qualsiasi di punti $c_1, ..., c_n \in I$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ *Se* $f = g$ *in tutti i punti di* $[a, b]$ *tranne eventualmente un numero finito, allora* $f \in \mathcal{R}([a, b])$ *se e solo se* $g \in \mathcal{R}([a, b])$*; in tal caso*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dunque è possibile modificare arbitrariamente una funzione in un numero finito di punti senza alterarne integrabilità e integrale.

$\boxed{\mathbf{4}}$ *Se* $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, *allora* $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g \in \mathcal{R}([a, b])$ *per ogni* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e risulta*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

(**linearità dell'integrale definito**).

$\boxed{\mathbf{5}}$ (**disuguaglianza triangolare integrale**) *Se* $f \in \mathcal{R}([a, b])$, *allora* $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ *e risulta*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Osserviamo che, mentre l'integrabilità di f implica quella di $|f|$, può accadere che $|f|$ sia integrabile senza che lo sia f. Ad esempio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è integrabile su $[0, 1]$ (v. ragionamento sulla funzione di Dirichlet), mentre $|f|$ è la funzione costantemente uguale ad 1 (integrabile).

$\boxed{6}$ (**positività**) *Se* $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *ed* $f \geq 0$, *allora* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Se $f \in C([a,b])$ *ed* $f \geq 0$, *allora* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Longleftrightarrow f$ *è identicamente nulla su* $[a,b]$.

$\boxed{7}$ (**monotonia rispetto all'integrando**) *Se* $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, *allora* $f \leq g$ *su* $[a,b]$ *implica*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

$\boxed{8}$ (**monotonia rispetto al dominio**) *Se* $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *ed* $f \geq 0$, *allora* $[a',b'] \subseteq [a,b]$ *implica*

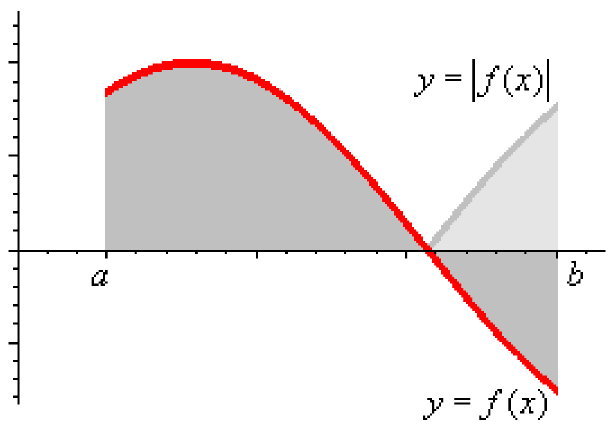
$$\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$

Significato geometrico dell'integrale e aree

Per $f \in \mathcal{R}([a,b])$ con $f \geq 0$ su $[a,b]$, abbiamo definito $\operatorname{area}(\mathcal{T}_{f,a,b}) := \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Consideriamo ora il caso generale di $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *con segno qualsiasi*. Poiché l'area (in senso intuitivo) di una figura piana non cambia simmetrizzandola rispetto ad una retta, si definisce

$$\boxed{\operatorname{area}(\mathcal{T}_{f,a,b}) := \int_a^b |f(x)|\,dx}.$$



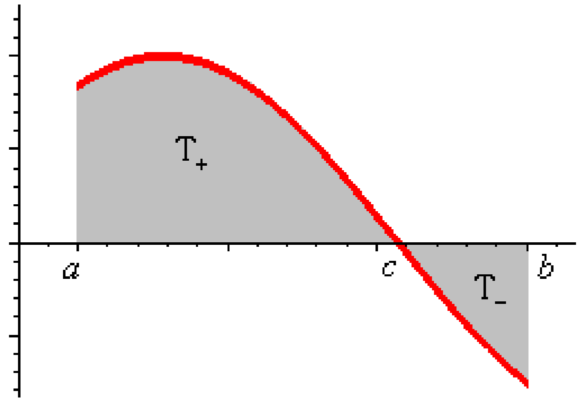
In particolare: se $f \leq 0$ su $[a,b]$, allora

$$\operatorname{area}(\mathcal{T}_{f,a,b}) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Qual è allora il significato geometrico di $\int_a^b f(x)\,dx$ se f cambia segno?

Ad esempio, per la funzione in figura si ha:

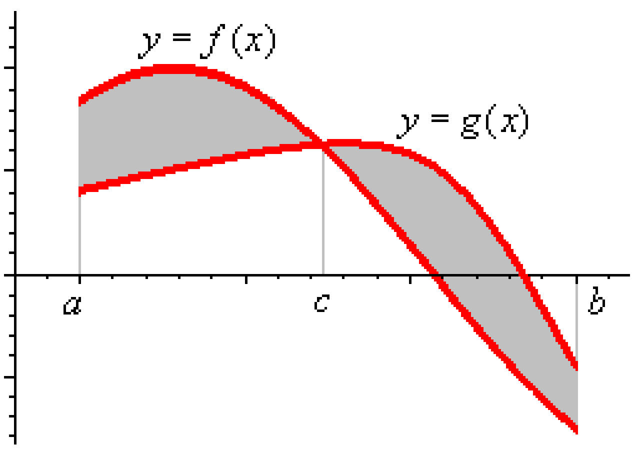
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\\ &= \int_a^c |f(x)|\,dx - \int_c^b |f(x)|\,dx\\ &= \mathrm{area}\left(\mathcal{T}_+\right) - \mathrm{area}\left(\mathcal{T}_-\right).\end{aligned}$$



In generale: se $f \in \mathcal{R}([a,b])$ ha segno costante sugli intervalli di una suddivisione di $[a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ è la cosiddetta ***area con segno*** di $\mathcal{T}_{f,a,b}$, cioè la differenza tra le aree delle parti di $\mathcal{T}_{f,a,b}$ che stanno sopra l'asse x e le aree delle parti che stanno sotto.

Infine, indicando con $\mathcal{T}_{f,g,a,b}$ la parte di piano contenuta nella striscia $a \leq x \leq b$ e delimitata dai grafici di due funzioni $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, si definisce

$$\boxed{\mathrm{area}\left(\mathcal{T}_{f,g,a,b}\right) := \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx}.$$



In figura, risulta: $\mathrm{area}\left(\mathcal{T}_{f,g,a,b}\right) =$

$$= \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx.$$