CAPITOLO 6

Metodi di integrazione

1. Introduzione

Tanto per cominciare, ricordiamo i fatti principali che abbiamo visto sugli integrali indefiniti:

— data una funzione f, una funzione F è una *primitiva di f* o un INTEGRALE INDEFINITO DI f se $F' = f$, la famiglia di primitive di una funzione f si indica con il simbolo

$$\int f(x)\,dx;$$

— se la funzione f è definita in un intervallo, tutte le primitive di f sono uguali a meno di una costante additiva, cioè, data F primitiva di f,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad C \in \mathbb{R};$$

— se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, comunque si fissa $\alpha \in [a,b]$, tutte le primitive di f sono della forma

$$\int_\alpha^x f(t)\,dt + C \qquad C \in \mathbb{R};$$

— infine, se siamo capaci di determinare una primitiva F di una funzione data f, allora è possibile calcolare il valore dell'integrale definito con un'operazione sconvolgentemente banale: calcolare la differenza di F agli estremi dell'intervallo, ossia

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{se} \quad F' = f. \tag{1.1}$$

Approfondiamo la questione espressa dall'ultimo punto... corriamo prima di tutto a rivedere come abbiamo calcolato il valore di alcuni integrali definiti a partire dalla definizione e poi torniamo qui a vedere questa formula. La differenza salta all'occhio: la notevole fatica fatta per calcolare un integrale a partire dalla definizione è completamente azzerata dalla nuova tecnica, almeno quando è nota la primitiva. Ad esempio, dato che $(\ln t)' = 1/t$,

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0,693147181\ldots.$$

Provate un po' ad arrivare alla stessa conclusione usando direttamente la definizione di integrale definito... Naturalmente abbiamo solo spostato il problema: calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \mathrm{sen} x \, \cos x \, dx,$$

è banale se conosco una primitiva della funzione $\mathrm{sen} x \cos x$, ma come faccio a trovarla?

In questo Capitolo ci dedichiamo al problema di determinare *esplicitamente* primitive F di una funzione data f, per lo meno per certe classi di funzioni con una struttura non troppo complicata.

A partire dalle operazioni elementari (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione) e dalle funzioni trigonometriche ed esponenziali, formando inverse e composte di queste funzioni, è possibile costruire una classe molto ampia di funzioni che possiamo descrivere come "funzioni elementari". Per quanto riguarda l'operazione di derivazione, abbiamo visto che *la derivata di una funzione elementare è essa stessa una funzione elementare* ed il calcolo concreto della derivata è possibile tramite un certo numero di ricette: le formule di derivazione.

Al contrario, per l'integrazione, non è possibile arrivare alla stessa conclusione: non c'è un algoritmo generale che permetta di esprimere le primitive di una funzione assegnata tramite funzioni elementari.

Il problema è risolto in certe situazioni dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale che afferma

$$F'(x) = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \int f(x)\, dx = F(x) + \text{costante},$$

cioè *ad ogni regola di derivazione corrisponde una regola di integrazione.* Ad esempio, dato che $D(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}) = x^\alpha$, si ha

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{costante} \qquad \forall\, \alpha \neq -1.$$

Allo stesso modo si ottengono altre formule di integrazione elementare:

$$\int \mathrm{sen} x\, dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\, dx = \mathrm{sen} x + C,$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C, \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\,tg} x + C, \qquad \int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C = \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x} + C, \qquad \int \frac{dx}{\mathrm{sen}^2 x} = -\cot x + C = -\frac{\cos x}{\mathrm{sen} x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arc\,sen} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C.$$

Inoltre, grazie alla linearità dell'integrale, anche combinazioni lineari di funzioni di cui si conosce la primitiva, possono essere integrate esplicitamente. Ad esempio,

$$\int (1 + 2x + 3e^x)\, dx = \int 1\, dx + 2\int x\, dx + 3\int e^x\, dx = x + x^2 + 3e^x + C.$$

Si può essere soddisfatti: per un buon numero di funzioni è possibile conoscere la famiglia delle primitive. Ma come la mettiamo per

$$\int \mathrm{sen} x\, \cos x\, dx \quad ?$$

Per determinare esplicitamente una primitiva di una funzione assegnata si usano (sostanzialmente) quattro ingredienti:

— la conoscenza di un certo numero di formule di integrazione elementari, dedotte a partire dalle ben note regole di derivazione;
— l'integrazione per sostituzione e l'integrazione per parti, che discendono da formule di derivazione: il primo discende derivazione di funzione composta, il secondo da quella della funzione prodotto;
— infine, il quarto ingrediente è l'esperienza. Più ci si esercita nel calcolo esplicito di primitive, più si viene a conoscenza di piccoli accorgimenti che variano da caso a caso.

In effetti si pone un'altra domanda: c'è garanzia di riuscire sempre a determinare una primitiva di una funzione elementare che sia essa stessa una funzione elementare? La risposta è "no": *non è vero che tutti gli integrali delle funzioni elementari si possono scrivere in termini di funzioni elementari* (la dimostrazione di questo fatto non è banale!) E' indispensabile sottolineare, ancora una volta, che *le primitive di funzioni monotone e di funzioni continue esistono sempre, anche nel caso in cui non siano esprimibili come funzioni elementari*. Quindi in questo caso l'integrale genera *nuove funzioni* diverse da quelle elementari, che talvolta sono molto importanti. Ad esempio, non è possibile esprimere in forma elementare la primitiva di e^{-x^2}. La primitiva però esiste ed è una funzione utilizzata nel calcolo delle probabilità e in statistica, indicata col simbolo $\mathrm{Erf}(x)$.

2. Metodo di sostituzione

La formula di derivazione di funzioni composte afferma che

$$\Big(F(\phi(x))\Big)' = F'(\phi(x))\phi'(x),$$

quindi $F(\phi(x))$ è una primitiva di $F'(\phi(x))\phi'(x)$, cioè

$$\int F'(\phi(x))\phi'(x)\,dx = F(\phi(x)) + C. \tag{2.1}$$

Con questa semplice osservazione, possiamo già risolvere il problema di cui si diceva: qual è una primitiva di $\mathrm{sen}x\cos x$? Se $\phi(x) = \mathrm{sen}x$ e $F(t) = \frac{1}{2}\,t^2$, allora

$$F'(\phi(x)) = \mathrm{sen}x, \quad \phi'(x) = \cos x$$

e quindi

$$\int \mathrm{sen}x\,\cos x\,dx = \int F'(\phi(x))\phi'(x)\,dx = F(\phi(x)) + C = \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2 x + C.$$

Adesso l'integrale definito è calcolato con facilità:

$$\int_0^1 \mathrm{sen}x\,\cos x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2 x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2 1.$$

Definendo $f(x) := F'(x)$, la formula (2.1) si può riscrivere come

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \qquad \text{(formula di sostituzione, I versione)} \tag{2.2}$$

Questa formula esprime come si trasforma l'espressione dell'integrale passando dalla variabile di integrazione x alla nuova variabile $t = \phi(x)$. L'operazione da compiere si può ricordare mnemonicamente così: oltre a scrivere t al posto di $\phi(x)$, si deve sostituire formalmente $\phi'(x)\,dx$ con dt,

$$t = \phi(x) \qquad \Rightarrow \qquad \text{“}dt = \phi\prime(x)\,dx\text{”}.$$

(L'uso delle virgolette “ ” sta a sottolineare che non è stato dato senso ai simboli dt e dx e che la regola sopra scritta è solo formale). Se $F' = f$, cioè se si conosce una primitiva di f, l'integrale a destra in (2.2) è pari a $F(t) + C$ con $C \in \mathbb{R}$ e, per trovare la primitiva della funzione di partenza $f(\phi(x))\phi'(x)$ basta sostituire al posto di t la funzione $\phi(x)$ del cambio di variabile:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\phi(x)) + C.$$

Ad esempio, ponendo $t = x^2$,

$$\int 2x\text{sen}(x^2)\,dx = \int \text{sen}(t)\,dt = -\cos t + C = -\cos(x^2) + C.$$

La domanda naturale è: *come individuare una decomposizione della funzione integranda del tipo $f(\phi(x))\phi'(x)$?* Un metodo generale non c'è: occorre esercizio, esperienza ed anche una certa dose di fortuna... Più si sperimenta e più si impara ad accorgersi delle funzioni che si integrano in questo modo.

Anche per gli integrali definiti esiste una formula di sostituzione del genere della (2.2). Integrando in $[\alpha, \beta]$ la relazione $F'(\phi(x))\phi'(x)$,

$$\int_\alpha^\beta F'(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (F(\phi(x))'\,dx = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)).$$

Ponendo $a = \phi(\alpha)$ e $b = \phi(\beta)$,

$$F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt.$$

Quindi otteniamo la formula

$$\int_a^b F'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F'(\phi(x))\phi'(x)\,dx,$$

che, chiamando come prima $f := F'$, può essere riscritta come

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\phi'(x)\,dx \qquad \text{(formula di sostituzione, II versione)}. \tag{2.3}$$

Nel caso degli integrali definiti si devono cambiare anche gli estremi compatibilmente con la formula che collega x con t, cioè $t = \phi(x)$.

Esempio 2.1. Per calcolare

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt,$$

vale la pena porre $t = \ln x$. Dato che $\phi(x) = \ln x$, ne segue $\phi'(x) = 1/x$ e quindi

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{x}{1+x^2}\,\frac{1}{x}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{1+x^2}.$$

Rimangono da calcolare α e β:

$$\begin{cases} 0 = \phi(\alpha) = \ln\alpha \\ 1 = \phi(\beta) = \ln\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \phi^{-1}(0) = e^0 = 1 \\ \beta = \phi^{-1}(1) = e^1 = e. \end{cases}$$

In definitiva

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt = \int_1^e \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}e - \text{arc tg}1 = \text{arc tg}e - \frac{\pi}{4}.$$

Esempi. Sia ϕ una funzione derivabile. Calcoliamo

$$\int \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}\, du.$$

Ponendo $x = \phi(u)$, si ha $dx = \phi'(u)\, du$, quindi

$$\int \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}\, du = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C = \ln|\phi(u)| + C.$$

Ad esempio,

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| + C, \qquad \int \mathrm{tg}x\, dx = -\int \frac{-\mathrm{sen}x}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + C.$$

Allo stesso modo, ponendo $x = \phi(u)$,

$$\int [\phi(u)]^\alpha\, \phi'(u)\, du = \int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \frac{1}{\alpha+1}\, [\phi(u)]^{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1.$$

Ad esempio,

$$\int \mathrm{sen}^k x\, \cos x\, dx = \frac{1}{k+1}\, \mathrm{sen}^{k+1} x + C.$$

La formula di sostituzione è sempre conveniente nel caso di funzioni composte di cui l'ultima sia lineare: ponendo $x = au + b$

$$\int f(au+b)\, du = \frac{1}{a} \int f(x)\, dx.$$

Non è detto che l'integrale di destra sia risolvibile, ma l'espressione è comunque più semplice. Vediamo un esempio di questo genere

$$\int \frac{1}{\cos^2(2u+3)}\, du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{1}{2}\mathrm{tg}x + C = \frac{1}{2}\mathrm{tg}(2u+3) + C.$$

Un'altra espressione per la formula di sostituzione. Spesso ci si trova a lavorare con espressioni della forma

$$\int h(\phi(u))\, du,$$

dove l'integrando è una funzione composta $h(\phi(u))$, *senza il fattore moltiplicativo* $\phi'(u)$. E' possibile applicare la sostituzione $x = \phi(u)$? E, in caso affermativo, in che modo? Se la funzione ϕ è invertibile tutto fila liscio, occorre solo un po' di pazienza. Sia ψ la funzione inversa di ϕ,

$$\psi := \phi^{-1}$$

e chiamiamo $f(u) := h(\phi(u))$. Allora, con il cambio di variabile $u = \phi(x)$,

$$\int h(\phi(u))\, du = \int f(u)\, du = \int f(\psi(x))\psi'(x)\, dx = \int h(x)\psi'(x)\, dx.$$

dato che $f(\psi(x)) = h(\phi(\psi(x))) = h(x)$. Guardando il primo e l'ultimo termine:

$$\int h(\phi(u))\,du = \int h(x)\,\psi'(x)\,dx. \qquad \text{(formula di sostituzione, III versione).}$$

Nel caso di integrali definiti occorre cambiare gli estremi di integrazione coerentemente con la nuova variabile introdotta:

$$\int_a^b h(\phi(u))\,du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} h(x)\,\psi'(x)\,dx. \qquad \text{(formula di sostituzione, IV versione).}$$

Esercizio 2.2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (1+e^x)^2\,dx.$$

Soluzione. Poniamo $t = 1 + e^x$, allora $x = \ln(t-1)$ e $dx = \frac{1}{t-1}\,dt$. Quindi

$$\int (1+e^x)^2\,dx = \int \frac{t^2}{t-1}\,dt.$$

Dato che $\frac{t^2}{t-1} = t + 1 + \frac{1}{t-1}$,

$$\begin{aligned}\int (1+e^x)^2\,dx &= \int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = \frac{1}{2}t^2 + t + \ln|t-1| + C \\ &= \frac{1}{2}(1+e^x)^2 + 1 + e^x + x + C = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C.\end{aligned}$$

Si sarebbe anche potuto procedere scrivendo la funzione integranda nella forma $(1+e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$.

Esercizio 2.3. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \cos^2 x\,dx.$$

Soluzione. Dato che $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$,

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int \Big(\cos(2x) + 1\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{2}x.$$

Ponendo $t = 2x$,

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{sen}t + C = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2x) + C = \mathrm{sen}x\cos x + C.$$

Quindi

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,(\mathrm{sen}x\cos x + x) + C.$$

Esercizio 2.4. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx.$$

Soluzione. Procedendo come sopra l'integrale può essere riscritto nella forma

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \Big(\cos(2x) + 1\Big)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(2x)\, dx + \frac{\pi}{4}.$$

Poniamo nell'integrale $t = 2x$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos t\, dt = \frac{1}{2}\mathrm{sen}t\,\Bigg|_0^{\pi} = 0.$$

Quindi il valore dell'integrale è $\pi/4$.

Esercizio 2.5. Fissato $a > 0$, calcolare gli integrali (indefinito e definito)

$$\int x\sqrt{x^2 - a^2}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^a x\sqrt{x^2 - a^2}\, dx.$$

Soluzione. Moltiplichiamo e dividiamo per 2 e poniamo $t = x^2 - a^2$:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2 - a^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int 2x(x^2 - a^2)^{1/2}\, dx = \frac{1}{2}\int t^{1/2}\, dt \\ &= \frac{t^{3/2}}{3} + C = \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{3} + C.\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'integrale definito basta calcolare la differenza di una primitiva tra i due estremi di integrazione

$$\int_0^a x\sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

3. Integrazione per parti

Il secondo metodo, ampiamente usato per l'integrazione esplicita, deriva dalla formula di derivazione del prodotto $(fg)' = f'g + fg'$. Integrando ed usando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale:

$$f(x)g(x) = \int g(x)\, f'(x)\, dx + \int g'(x)\, f(x)\, dx$$

o, equivalentemente,

$$\int g'(x)\, f(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, dx \quad \text{(integrazione per parti)} \tag{3.1}$$

Ecco spiegato perché si parla di *integrazione per parti*: l'integrale della funzione $g'f$ viene trasformato in una parte integrata, il termine fg, sommato all'integrale della funzione gf'. Il metodo è vantaggioso se per il termine gf' si conosce un metodo di integrazione.

Per gli integrali definiti, la formula (3.1) diviene

$$\begin{aligned}\int_a^b g'(x)\,f(x)\,dx &= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Vediamo una classe di esempi di integrali risolvibili tramite la formula (3.1). Partiamo da un caso semplice

$$\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int (x)'\,e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C.$$

Anche nel caso della funzione x^2e^x si può procedere in modo analogo, iterando due volte l'applicazione della formula di integrazione per parti,

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= \int x^2(e^x)'\,dx = x^2e^x - 2\int x\,e^x\,dx = x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x\,dx\right] \\ &= x^2e^x - 2\left[(x-1)e^x + C\right] = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.\end{aligned}$$

E' chiaro a questo punto che è possibile, iterando n volte l'uso della formula, risolvere integrali del tipo

$$\int p(x)e^x\,dx \qquad\qquad p \quad \text{polinomio di grado } n,$$

In modo analogo è possibile calcolare anche integrali della forma

$$\int p(x)e^{\alpha x}\,dx \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

(basta osservare che $e^{\alpha x} = \frac{1}{\alpha}\big(e^{\alpha x}\big)'$). Ad esempio,

$$\begin{aligned}\int x^2e^{3x}\,dx &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} \\ &\quad - \frac{2}{9}\left(xe^{3x} - \int e^{3x}\,dx\right) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right)e^{3x} + C\end{aligned}$$

Allo stesso modo si calcolano

$$\int x\mathrm{sen}x\,dx = \int x(-\cos x)'\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = \mathrm{sen}x - x\cos x + C;$$

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\mathrm{sen}x)'\,dx = x\mathrm{sen}x - \int \mathrm{sen}x\,dx = \cos x + x\mathrm{sen}x + C.$$

In generale iterando il procedimento un numero opportuno di volte si calcolano gli integrali

$$\int p(x)\mathrm{sen}(ax)\,dx, \qquad \int p(x)\cos(ax)\,dx \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

dove p è un polinomio.

Sempre tramite l'integrazione per parti, si risolvono anche

$$\int p(x) \ln x \, dx \qquad\qquad p \quad \text{polinomio.}$$

Calcoliamo l'integrale di $\ln x$:

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = \int (x)' \ln x \, dx = x \ln x - \int x (\ln x)' \, dx$$
$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C.$$

Analogamente,

$$\int x \ln x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} x^2\right)' \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

In generale, dato $k \in \mathbb{N}$,

$$\int x^k \ln x \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x - \frac{1}{k+1} \int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \left(\ln x - \frac{1}{k+1}\right) + C.$$

Esercizio 3.1. Calcolare gli integrali indefiniti

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx, \qquad \int x \operatorname{arc\,tg} x \, dx.$$

Soluzione. Procediamo come visto in precedenza per $\ln x$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \int (x)' \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \dots$$

Per calcolare l'ultimo integrale, moltiplichiamo e dividiamo per due, in modo da ricondurci alla forma $\int \phi'(x)/\phi(x) \, dx$

$$\dots = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Analogamente, per il secondo integrale

$$\int x \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx.$$

Consideriamo separatamente l'integrale a secondo membro:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \, dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Quindi

$$\int x \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \frac{1}{2} \left[(x^2+1) \operatorname{arc\,tg} x - x\right] + C.$$

Adesso usiamo l'integrazione per parti in un modo leggermente diverso: iterando l'applicazione di (3.1) torniamo all'integrale originale, ottenendo in questo modo un'equazione per la primitiva. In questo modo risolviamo integrali della forma

$$\int e^{ax}\mathrm{sen}(bx)\,dx, \qquad \int e^{ax}\cos(bx)\,dx.$$

Ad esempio,

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\mathrm{sen}(3x)\,dx &= \frac{1}{3}\int e^{2x}(-\cos(3x))'\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x)e^{2x} + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx \\ &= -\frac{1}{3}\cos(3x)e^{2x} + \frac{2}{9}\int e^{2x}(\mathrm{sen}(3x))'\,dx \\ &= \frac{1}{9}\left(2\mathrm{sen}(3x) - 3\cos(3x)\right)e^{2x} - \frac{4}{9}\int e^{2x}\mathrm{sen}(3x)\,dx.\end{aligned}$$

Guardando il primo e l'ultimo termine

$$\int e^{2x}\mathrm{sen}(3x)\,dx = \frac{1}{9}\big(2\mathrm{sen}(3x) - 3\cos(3x)\big)e^{2x} - \frac{4}{9}\int e^{2x}\mathrm{sen}(3x)\,dx.$$

da cui, esplicitando rispetto all'integrale richiesto,

$$\int e^{2x}\mathrm{sen}(3x)\,dx = \frac{1}{13}\big(2\mathrm{sen}(3x) - 3\cos(3x)\big)e^{2x} + C.$$

In generale si ottengono le formule

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\mathrm{sen}(bx)\,dx &= \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\mathrm{sen}(bx) - b\cos(bx)\right)e^{ax} + C, \\ \int e^{ax}\cos(bx)\,dx &= \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\cos(bx) - b\mathrm{sen}(bx)\right)e^{ax} + C.\end{aligned}$$

Formula ricorsive. Alcune famiglie di integrali (dipendenti da un parametro discreto $n \in \mathbb{N}$), possono essere risolte in modo iterativo, cioè si risolve l'integrale per $n = 1$, e poi si mostra come l'integrale al passo $n-$esimo si possa ricondurre al calcolo dell'integrale $(n-1)-$esimo. Vediamo un paio di esempi. Calcoliamo

$$I_n = \int \mathrm{sen}^{2n}x\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Allo stesso modo si può calcolare $\int \cos^{2n} x\,dx$. Calcoliamo I_1:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx &= \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x\,dx = \int \operatorname{sen} x\,(-\cos x)'\,dx \\ &= -\operatorname{sen} x\cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x\cos x + \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx \\ &= x - \operatorname{sen} x\cos x - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx.\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto una relazione del tipo $I_1 = x - \operatorname{sen} x\cos x - I_1$, quindi

$$I_1 = \int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x\cos x) + C.$$

Per $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}I_{n+1} &= \int \operatorname{sen}^{2n+1} x \operatorname{sen} x\,dx = \int \operatorname{sen}^{2n+1} x\,(-\cos x)'\,dx \\ &= -\operatorname{sen}^{2n+1} x\,\cos x + (2n+1)\int \operatorname{sen}^{2n} x\,\cos^2 x\,dx \\ &= -\operatorname{sen}^{2n+1} x\,\cos x + (2n+1)\int \operatorname{sen}^{2n} x(1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx \\ &= -\operatorname{sen}^{2n+1} x\,\cos x + (2n+1)I_n - (2n+1)I_{n+1}.\end{aligned}$$

Quindi $I_{n+1} = -\operatorname{sen}^{2n+1} x\,\cos x + (2n+1)I_n - (2n+1)I_{n+1}$, da cui si deduce

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left\{(2n+1)I_n - \operatorname{sen}^{2n+1} x\cos x\right\} + C.$$

Ad esempio, per $n = 1$,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = I_2 &= \frac{1}{2}\left(3I_1 - \operatorname{sen}^3 x\cos x\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\left(3x - 3\operatorname{sen} x\cos x - 2\operatorname{sen}^3 x\cos x\right) + C.\end{aligned}$$

* **Cenni sulle derivate deboli.** Passiamo ad un esercizio di stile diverso.

Esempio 3.2. Verificare che

$$\int_{-1}^{1} \phi(x)\operatorname{sgn} x\,dx = -\int_{-1}^{1} \phi'(x)\,|x|\,dx \qquad \forall\phi \text{ derivabile in } [-1,1], \quad \phi(\pm1) = 0.$$

Soluzione. Calcoliamo separatamente i due integrali. Dalla definizione della funzione $\operatorname{sgn} x$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \phi(x)\operatorname{sgn} x\,dx &= \int_{-1}^{0} \phi(x)\operatorname{sgn} x\,dx + \int_{0}^{1} \phi(x)\operatorname{sgn} x\,dx \\ &= -\int_{-1}^{0} \phi(x)\,dx + \int_{0}^{1} \phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Per il secondo integrale, usando l'additività e l'integrazione per parti,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \phi'(x)\,|x|\,dx &= -\int_{-1}^{0} \phi'(x)\,x\,dx + \int_{0}^{1} \phi'(x)\,x\,dx \\ &= -\phi(x)\,x\Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \phi(x)\,dx + \phi(x)\,x\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Dato che

$$\phi(x)\,x\Big|_{-1}^{0} = \phi(0)\cdot 0 - \phi(-1)(-1) = 0, \qquad \phi(x)\,x\Big|_{0}^{1} = \phi(1)\cdot 1 - \phi(0)\cdot 0 = 0,$$

vale la conclusione. ∎

L'esercizio precedente suggerisce che anche se la funzione $|x|$ non è derivabile in 0 è possibile scrivere la formula di integrazione per parti sostituendo al posto della derivata della funzione $|x|$ la funzione $\operatorname{sgn} x$. Questa idea è quella che sta alla base della definizione di derivabilità in un senso più generale di quello che abbiamo visto fin ora.

Definizione 3.3. Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ data. Una funzione $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è la *derivata debole* (o *distribuzionale*) di f in $[a,b]$ se

$$\int_a^b \phi(x)\,g(x)\,dx = -\int_a^b \phi'(x)\,f(x)\,dx \qquad \forall \phi \text{ derivabile in } [a,b], \quad \phi(a)=\phi(b)=0.$$

In questo senso, l'esercizio precedente mostra che $\operatorname{sgn} x$ è la derivata debole di $|x|$ in $[-1,1]$. Chiaramente se f ammette derivata (classica) in $[a,b]$, allora ammette anche derivata distribuzionale in $[a,b]$ e questa è proprio la funzione f'. Infatti, integrando per parti si ha

$$\int_a^b \phi(x)\,f'(x)\,dx = \phi(x)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b \phi'(x)\,f(x)\,dx = -\int_a^b \phi'(x)\,f(x)\,dx,$$

dato che $\phi(a)=\phi(b)=0$ implica $\phi(x)f(x)\Big|_a^b = 0$.

4. Integrazione di funzioni razionali

Affrontiamo ora il problema di integrare funzioni razionali, cioè vogliamo scrivere in termini di funzioni elementari

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \qquad P, Q \text{ polinomi.}$$

Si dimostra che questo problema ha sempre soluzione, cioè è sempre possibile esprimere le primitive di una qualsiasi funzione razionale in termini di funzioni elementari.

In concreto è possibile completare il calcolo a patto di saper fattorizzare il polinomio a denominatore Q nel prodotto di termini irrudicibili, cioè polinomi di primo grado (con molteplicità opportuna) e polinomi di secondo grado irriducibili (con molteplicità opportuna). In questo Paragrafo vedremo come si integrino funzioni razionali nel caso in cui il polinomio Q sia di grado al più due.

Denominatore Q di grado 1. Sia $Q(x) = a(x - x_0)$ con $a, x_0 \in \mathbb{R}$. Se P è un polinomio di grado $p \geq 1$, tramite l'algoritmo di divisione dei polinomi, si determinano un polinomio P_1 di grado $p - 1$ e una costante $r \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{r}{a(x - x_0)}.$$

Quindi l'integrale si può decomporre nella somma di due integrali

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_1(x)\,dx + \frac{r}{a}\int \frac{dx}{x - x_0}.$$

Il polinomio P_1 è integrabile esplicitamente, grazie alla formula

$$\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

Anche l'altro integrale è risolubile esplicitamente:

$$\frac{r}{a}\int \frac{dx}{x - x_0} = \frac{r}{a}\int \frac{(x - x_0)'}{x - x_0}\,dx = \frac{r}{a}\ln|x - x_0| + C.$$

Vediamo un esempio. Calcoliamo

$$\int \frac{x^5 + 1}{x - 2}\,dx.$$

Dato che

$$\frac{x^5 + 1}{x - 2} = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 + \frac{33}{x - 2},$$

si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5 + 1}{x - 2}\,dx &= \int \left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 + \frac{33}{x - 2}\right)dx \\ &= \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + 16x + 33\ln|x - 2| + C.\end{aligned}$$

Denominatore Q di grado 2. Supponiamo che Q sia un polinomio di grado 2. In questo caso Q è scrivibile nella forma

$$Q(x) = a(x^2 + 2bx + c) \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Se il polinomio a numeratore P ha grado $p \geq 2$, allora è possibile applicare l'algoritmo di divisione di polinomi e riscrivere la funzione razionale come somma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

dove P_1 è un polinomio di grado $p-2$ e R è un polinomio di grado minore o uguale a 1. L'integrale della funzione razionale è la somma di due integrali

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_1(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Il primo dei due integrali è risolubile esplicitamente per via elementare. Consideriamo il secondo. Supponiamo che il resto R sia di grado 1 e scriviamolo nella forma $R(x) = \alpha(x+\beta)$ con $\alpha \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Si tratta di calcolare

$$\int \frac{\alpha(x+\beta)}{a(x^2+2bx+c)}\,dx = \frac{\alpha}{a}\int \frac{x+\beta}{x^2+2bx+c}\,dx.$$

Come primo passo, "costruiamo" a numeratore la derivata del denominatore. Moltiplichiamo e dividiamo per due e, successivamente, sommiamo e sottraiamo $2b$

$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha(x+\beta)}{a(x^2+2bx+c)}\,dx &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{2x+2\beta}{x^2+2bx+c}\,dx\\ &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(2x+2b)+2(\beta-b)}{x^2+2bx+c}\,dx = \cdots .\end{aligned}$$

L'integrale finale può essere riscritto come somma dei due integrali di cui il primo è della forma $\int \phi'(x)/\phi(x)\,dx$; quindi

$$\begin{aligned}\cdots &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(x^2+2bx+c)'}{x^2+2bx+c}\,dx + \frac{2\alpha(\beta-b)}{2a}\int \frac{dx}{x^2+2bx+c}\\ &= \frac{\alpha}{2a}\ln|x^2+2bx+c| + \frac{2\alpha(\beta-b)}{2a}\int \frac{dx}{x^2+2bx+c}.\end{aligned}$$

Rimane quindi da risolvere l'integrale

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+c}. \tag{4.1}$$

Nel caso in cui R sia di grado 0 ci si riconduce direttamente a questa situazione. La risoluzione dell'integrale (4.1) varia a seconda di quante radici reali abbia il denominatore, cioè a seconda che sia $b^2 > c$, $b^2 = c$ o $b^2 < c$. Trattiamo i tre casi separatamente. Ci ricondurremo (sostanzialmente) ai seguenti integrali elementari

$$\begin{aligned}\text{Caso I}: &\qquad b^2 > c \qquad \longrightarrow \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\\ \text{Caso II}: &\qquad b^2 = c \qquad \longrightarrow \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,\\ \text{Caso III}: &\qquad b^2 < c \qquad \longrightarrow \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.\end{aligned}$$

Caso I. $b^2 > c$. In questo caso il denominatore ha due radici reali

$$x^2 + 2bx + c = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -b \pm \sqrt{b^2 - c}.$$

Indicando le radici con x_1 e x_2, il polinomio si fattorizza:

$$x^2 + 2bx + c = (x - x_1)(x - x_2).$$

Decomponiamo la funzione integranda nella forma

$$\frac{1}{x^2 + 2bx + c} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2},$$

dove $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ sono due costanti da determinare. La somma delle due frazioni a secondo membro è uguale a

$$\frac{(A_1 + A_2)x - (A_1 x_2 + A_2 x_1)}{x^2 + 2bx + c},$$

quindi le costanti A_1, A_2 sono le soluzioni del sistema lineare(1)

$$A_1 + A_2 = 0, \qquad A_1 x_2 + A_2 x_1 = -1.$$

Individuati i valori di A_1 e A_2, l'integrale è risolto, infatti

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} &= A_1 \int \frac{dx}{x - x_1} + A_2 \int \frac{dx}{x - x_2} \\ &= A_1 \ln|x - x_1| + A_2 \ln|x - x_2| + C.\end{aligned}$$

Esercizio 4.1. Calcolare

$$\int \frac{x^3}{x^2 - x - 2}\, dx.$$

Soluzione. Tramite la divisione di polinomi $\frac{x^3}{x^2-x-2} = x + 1 + \frac{3x+2}{x^2-x-2}$. Quindi

$$\int \frac{x^3}{x^2 - x - 2}\, dx = \int \left(x + 1 + \frac{3x + 2}{x^2 - x - 2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + 3 \int \frac{x + \frac{2}{3}}{x^2 - x - 2}\, dx.$$

Per risolvere l'integrale a secondo membro, moltiplichiamo e dividiamo per 2 e, successivamente, sommiamo e sottraiamo -1

$$\begin{aligned}3 \int \frac{x + \frac{2}{3}}{x^2 - x - 2}\, dx &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x - 1) + 1 + \frac{4}{3}}{x^2 - x - 2}\, dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}\, dx + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{3}{2} \ln|x^2 - x - 2| + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x - 2}.\end{aligned}$$

Dato che le radici del polinomio $x^2 - x - 2$ sono -1 e 2, esistono A e B tali che

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}.$$

(1) Il determinante di questo sistema è $x_1 - x_2$ che, nel caso $b^2 > c$ è diverso da zero.

Il sistema lineare soddisfatto da A e B è: $A+B=0$, $A-2B=1$, quindi $A=\frac{1}{3}$ e $B=-\frac{1}{3}$. Quindi

$$\int \frac{dx}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{3}\frac{dx}{x+1} = \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C.$$

In conclusione, l'integrale richiesto è

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2-x-2}\,dx &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}\ln|x-2| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{7}{6}\ln|x-2| + \frac{7}{6}\ln|x+1| + C\\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

Caso II. $b^2=c$. In questa situazione, si tratta di risolvere

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+b^2}.$$

Questo integrale è immediato, infatti

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+b^2} = \int \frac{dx}{(x+b)^2} = -\frac{1}{x+b} + C.$$

Esercizio 4.2. Calcolare

$$\int \frac{x(x+3)}{(x-1)^2}\,dx.$$

Soluzione. Tramite la divisione di polinomi $\frac{x(x+3)}{(x-1)^2} = 1 + \frac{5x-1}{x^2-2x+1}$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x(x+3)}{(x-1)^2}\,dx &= x + 5\int \frac{x-\frac{1}{5}}{x^2-2x+1}\,dx = x + \frac{5}{2}\int \frac{(2x-2)+2+\frac{2}{5}}{x^2-2x+1}\,dx\\ &= x + \frac{5}{2}\ln|(x-1)^2| + 6\int \frac{dx}{(x-1)^2} = x + 5\ln|x-1| - \frac{6}{x-1} + C\end{aligned}$$

Caso III. $b^2<c$. In questo caso il polinomio è irriducibile. L'obiettivo è di ricondursi, con un opportuno cambiamento di variabili, all'integrale elementare

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Chiamiamo $\nu := \sqrt{c-b^2} > 0$ e riscriviamo in maniera opportuna il denominatore

$$x^2+2bx+c = x^2+2bx+b^2+(c-b^2) = (x+b)^2+\nu^2 = \nu^2\left\{\left(\frac{x+b}{\nu}\right)^2+1\right\}.$$

Ponendo $t = (x+b)/\nu$

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{\nu^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+b}{\nu}\right)^2} = \frac{1}{\nu}\int \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= \frac{1}{\nu}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{\nu}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+b}{\nu}\right) + C.$$

Dalla definizione di ν si deduce che

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right) + C.$$

Esercizio 4.3. Calcolare

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+2}\,dx.$$

Soluzione. Come al solito, ricostruiamo a numeratore la derivata del denominatore:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-2+\frac{2}{3}}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+2| + \int \frac{dx}{x^2-2x+2}.$$

L'ultimo integrale può essere risolto come sopra

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{dx}{1+(x-1)^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t + C = \operatorname{arc\,tg}(x-1) + C.$$

Quindi

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+2| + \operatorname{arc\,tg}(x-1) + C.$$

5. Breve campionario incompleto

Tanto per allargare un po' la panoramica sulla casistica possibile, prendiamo in considerazione qualche altro esempio.

Esempio 1. Supponiamo di voler calcolare

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$$

dove R è una funzione razionale dei suoi argomenti. Dalle relazioni

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{e} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad\qquad \text{dove} \quad t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right),$$

ponendo $t = \operatorname{tg}(x/2)$ o, equivalentemente, $x = 2\operatorname{arc\,tg} t$, dato che $dx = 2/(1+t^2)dt$, l'integrale si trasforma in

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt,$$

Ad esempio,

$$\int \frac{dx}{\text{sen}x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\text{tg}(x/2)| + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2\,dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)\,dt = \ln\left|\frac{1+\text{tg}(x/2)}{1-\text{tg}(x/2)}\right| + C.$$

Esempio 2. Abbiamo un problema: calcolare l'area dell'ellisse

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}\,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\} \qquad a, b > 0.$$

Per evidenti ragioni si simmetria, l'area $\mathcal{A}(\Omega)$ di Ω è pari al valore dell'integrale definito

$$\mathcal{A}(\Omega) = 4b\int_0^a \sqrt{1-(x^2/a^2)}\,dx.$$

Introduciamo la variabile t definita da $x = a\cos t$, da cui $dx = -a\text{sen}t\,dt$:

$$\mathcal{A}(\Omega) = 4ab\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\cos^2 t}\,\text{sen}t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t\,dt = 2ab\,[t - \text{sen}t\cos t]_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

Quindi l'area della regione delimitata dall'ellissi di semiassi a e b è πab.

Allo stesso modo è possibile integrare funzioni del tipo

$$R(x, \sqrt{1-(x^2/a^2)})$$

con R funzione razionale dei suoi argomenti. Infatti

$$\int R(x, \sqrt{1-(x^2/a^2)})\,dx = -a\int R(a\cos t, \text{sen}t)\text{sen}t\,dt.$$

dove $x = a\cos t$, e il secondo membro è razionale in sen$t$ e $\cos t$.

Esempio 3. Torniamo al caso dell'integrazione di funzioni razionali $\frac{P(x)}{Q(x)}$, e supponiamo che Q abbia solo radici reali *distinte*, cioè

$$Q(x) = a(x-x_1)\cdots(x-x_n) \qquad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad \text{con } x_i \ne x_j \quad \text{se} \quad i \ne j.$$

Supponiamo che il grado di P sia minore del grado di Q (altrimenti basta utilizzare il solito algoritmo della divisione di polinomi), e sfruttiamo la fattorizzazione di Q per riscrivere la funzione razionale come somma di funzioni razionali più semplici. Cerchiamo n costanti $A_1, \dots, A_n$ tali che

$$\frac{P(x)}{a(x-x_1)\cdots(x-x_n)} = \frac{1}{a}\left(\frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}\right).$$

Per determinare le costanti $A_1, \dots, A_n$ si può imporre l'uguaglianza dei due membri ottenendo un sistema lineare. Equivalentemente si può moltiplicare per $x - x_1$ entrambi i membri

$$\frac{P(x)}{a(x-x_2)\cdots(x-x_n)} = \frac{1}{a}\left\{A_1 + \frac{A_2(x-x_1)}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n(x-x_1)}{x-x_n}\right\}.$$

e successivamente porre $x = x_1$, ottenendo il valore di A_1

$$A_1 = \frac{P(x_1)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

Analogamente per $A_2, \dots, A_n$. Determinate le costanti A_i,

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx &= \frac{1}{a}\int\left(\frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}\right)dx \\ &= \frac{1}{a}\left(A_1 \ln|x-x_1| + \cdots + A_n \ln|x-x_n|\right) + C.\end{aligned}$$

Per digerire la tecnica, calcoliamo

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Dato che il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, non occorre applicare l'algoritmo di divisione di polinomi. Passiamo subito alla decomposizione: cerchiamo $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x+3}.$$

Moltiplichiamo per $x+1$ e calcoliamo in $x = -1$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = A_1 + \frac{A_2(x+1)}{x+2} + \frac{A_3(x+1)}{x+3} \qquad \Longrightarrow \qquad A_1 = \frac{1}{2}.$$

Analogamente

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A_1(x+2)}{x+1} + A_2 + \frac{A_3(x+2)}{x+3} \qquad \Longrightarrow \qquad A_2 = -1.$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A_1(x+3)}{x+1} + \frac{A_2(x+3)}{x+2} + A_3 \qquad \Longrightarrow \qquad A_3 = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}\right| + C.\end{aligned}$$

Esempio 4. Vediamo come si procede per decomporre una funzione razionale

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

nella somma di frazioni parziali, sotto l'ipotesi che $Q(x)$ abbia coefficienti reali.

Passo 1. Se il grado di P è maggiore o uguale al grado di Q, si fa la divisione di polinomi P/Q che permette di scrivere $P(x) = P_1(x)Q(x) + R(x)$ dove $P_1(x)$ è il risultato della divisione e R è il resto. Quindi abbiamo

$$\frac{P}{Q} = N + \frac{P_1}{Q}.$$

Notare che adesso il grado di P_1 è strettamente minore del grado di Q, e il termine $N(x)$ è molto facile da integrare. Da adesso in poi possiamo supporre il grado di P strettamente minore del grado di Q.

Passo 2. Si fattorizza il denominatore $Q(x)$. Questo passo naturalmente non si può portare a termine sempre (perché non sempre è possibile calcolare esplicitamente le radici di un polinomio!). Supponiamo di essere riusciti a fattorizzare Q nella fomra seguente:

$$Q(x) = (x - r_1)^{n_1} \dots (x - r_k)^{n_k} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_\ell x + q_\ell)^{m_\ell}$$

dove tutti i p_j, q_j, r_j sono reali, i fattori sono tutti distinti, e i termini $x^2+p_jx+q_j$ sono irriducibili sui reali cioè hanno discriminante < 0. (In realtà non è difficile dimostrare che tutti i polinomi a coefficienti reali si possono fattorizzare in questo modo! però non sempre è possibile determinare i valori di q, a, b, c esplicitamente).

A questo punto possiamo già scrivere la forma della decomposizione in frazioni parziali: per ogni fattore del tipo $(x - r)^n$ dobbiamo aggiungere i termini

$$\frac{A_1}{x - q} + \frac{A_2}{(x - q)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - q)^n};$$

mentre per ogni fattore del tipo $(x^2 + px + q)^m$ dobbiamo aggiungere i termini

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_m x + B_m}{(x^2 + px + q)^m}.$$

Esempi:

$$\frac{2 - x - x^2}{(x - 2)^2(x + 3)} = \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{(x - 2)^2} + \frac{B_1}{x + 3}$$

$$\frac{x^3 - 4}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 3)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 3}$$

Passo 3. Si calcolano i coefficienti della decomposizione in frazioni parziali raccogliendo e uguagliando i numeratori. Per il primo esempio del passo 2 abbiamo

$$\frac{2-x-x^2}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A_1(x-2)(x+3)+A_2(x+3)+B_1(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)}$$

e quindi vogliamo

$$2-x-x^2 = A_1(x-2)(x+3)+A_2(x+3)+B_1(x-2)^2.$$

Ponendo $x=2$ si ottiene $-4=5A_2$ da cui $A_2=-\frac{4}{5}$. Ponendo $x=-3$ si ottiene $-4=25B_1$ da cui $B_1=-\frac{4}{25}$. Infine uguagliando i coefficienti di x^2 si ottiene $-1=A_1+B_1$ da cui $A_1=-B_1-1=-\frac{21}{25}$:

$$\frac{2-x-x^2}{(x-2)^2(x+3)} = -\frac{21}{25(x-2)} - \frac{4}{5(x-2)^2} - \frac{4}{25(x+3)}.$$

Invece per il secondo esempio del passo 2 abbiamo

$$\frac{x^3-4}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \\ = \frac{A_1(x-1)(x^2+2x+3)+A_2(x^2+2x+3)+(Bx+C)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}$$

e anche qui uguagliamo i numeratori. Ponendo $x=1$ abbiamo $-3=6A_2$ da cui $A_2=-\frac{1}{2}$. Ponendo $x=0$ si ottiene $-4=-3A_1+3A_2+C$ da cui $C-3A_1=-\frac{5}{2}$. Ponendo $x=2$ si ottiene $4=11A_1+11A_2+2B+C$ da cui $2B+C+11A_1=\frac{19}{2}$. Uguagliando i coefficienti di x^3 si ottiene $1=A_1+B$. Da queste tre relazioni si possono ricavare A_1,B,C e si ottiene $A_1=\frac{5}{6}$, $B=\frac{1}{6}$, $C=0$ ossia

$$\frac{x^3-4}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \frac{5}{6(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{x}{6(x^2+2x+3)}.$$

Naturalmente, dopo aver decomposto in frazioni parziali, dobbiamo integrare i vari termini. Per le frazioni del tipo $\frac{A}{(x-r)^n}$ questo è facilissimo; un po' meno facile integrare i termini del tipo $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, che perö abbiamo studiato in dettaglio nelle sezioni precedenti; infine, non è difficile integrare anche i termini del tipo $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$ con $m>1$, ma il procedimento è più lungo e qui preferiamo omettere i dettagli.

Vediamo un esempio concreto: calcoliamo la primitiva

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)}dx.$$

Decomponiamo: si ha

$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

da cui

$$x^2 = A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2;$$

ponendo $x = \pm 1$ si ottiene $C = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{2}$, e uguagliando i coefficienti di x^2 si ottiene $A + C = 1$ da cui $A = \frac{3}{4}$:

$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{3}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{4(x-1)}.$$

A questo punto si ha subito

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)} dx = \frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln(x-1) + C.$$

Esempio 5. Se calcoliamo la derivata di $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ otteniamo

$$F'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

e queto vuol dire che

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

Come nel caso della formula $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, il calcolo precedente dà lo stesso risultato anche se si parte da $F(x) = \ln(-x - \sqrt{x^2+1})$, quindi la formula precedente si può anche scrivere nella forma più generale

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln| + \sqrt{x^2+1}| + C.$$

Si noti che un conto simile applicato a $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ (oppure applicato a $\ln(-x - \sqrt{x^2-1})$) dà

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

e quindi otteniamo anche

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C.$$

Tabella degli integrali elementari

(C indica una costante arbitraria)

funzione f	primitiva $\int f\,dx$	funzione f	primitiva $\int f\,dx$
0	C	$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\mathrm{sen} x$	$-\cos x + C$	$\cos x$	$\mathrm{sen} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arc\,tg} x + C$	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg} x + C$	$\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$	$-\cot x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arc\,sen} x + C$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2+1}\rvert + C$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert + C$

Qualche altro integrale

funzione f	primitiva $\int f\,dx$	funzione f	primitiva $\int f\,dx$
$\ln x$	$x(\ln x - 1) + C$	$\mathrm{arc\,tg} x$	$x\,\mathrm{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
$\mathrm{sen}^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \mathrm{sen} x \cos x) + C$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \mathrm{sen} x \cos x) + C$
$\mathrm{arc\,sen} x$	$x\,\mathrm{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$	$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$