SISTEMI DINAMICI

Sistemi dinamici discreti

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad \underset{t=0}{f(x_0)} = \underset{t=1}{x_1}$

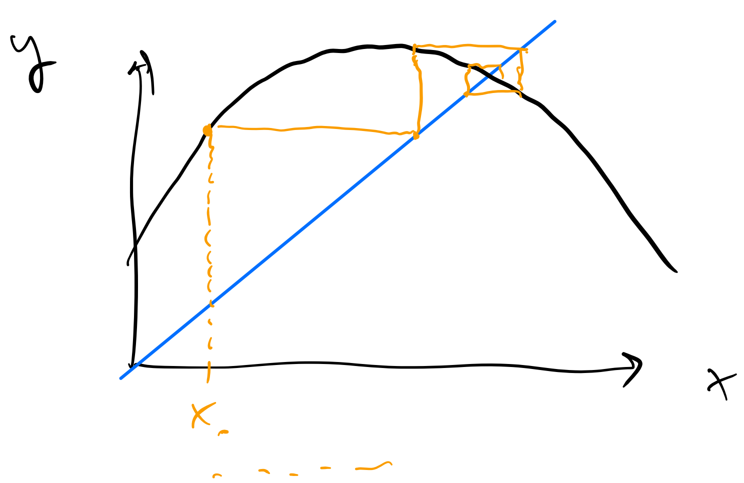
$$x_n = f^n(x_0)$$

Punto fisso : $f(x^*) = x^*$

n- ciclo $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n}(x^*) = x^*$

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ si ripetono sotto l'azione di f

Iterazione grafica :



$y = x$

$y = f(x)$

Un punto x^* è detto pozzo (sink) o attrattivo se possiamo trovare un intorno $U \ni x^*$ t.c. se $y \in U$ allora $f^n(y) \in U$ $\forall$ n e

$$f^n(y) \xrightarrow[n \to \infty]{} x^*$$

Viceversa: per un punto fisso repulsivo (sorgente) tutte le traiettorie lasciano U dopo abbastanza iterazioni.

<u>Teorema</u> Consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e assumiamo x^* sia punto fisso.

Allora

1. se $|f'(x^*)| < 1$ $\to$ attrattivo
2. se $|f'(x^*)| > 1$ $\to$ repulsivo
3. se $|f'(x^*)| = 1$ $\to$ nessuna informazione

Dim: Allora $|f'(x^*)| = \nu < 1$.

Scegliamo k tale che $\nu < k < 1$.

Siccome f' è continua, possiamo trovare un δ t.c. $|f'(x)| < k$

$\forall x \in I = [x^* - \delta, x + \delta]$

Allora (Teorema del valor medio) $x \in I$, possiamo trovare un c tra x e x^* t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = \frac{f(x) - x^*}{x - x^*}$$

Siccome $c \in I$, $|f'(c)| < k$

e quindi

$$|f(x) - x^*| < k\, |x - x^*|$$

Siccome $k < 1 \Rightarrow f(x) \in I$

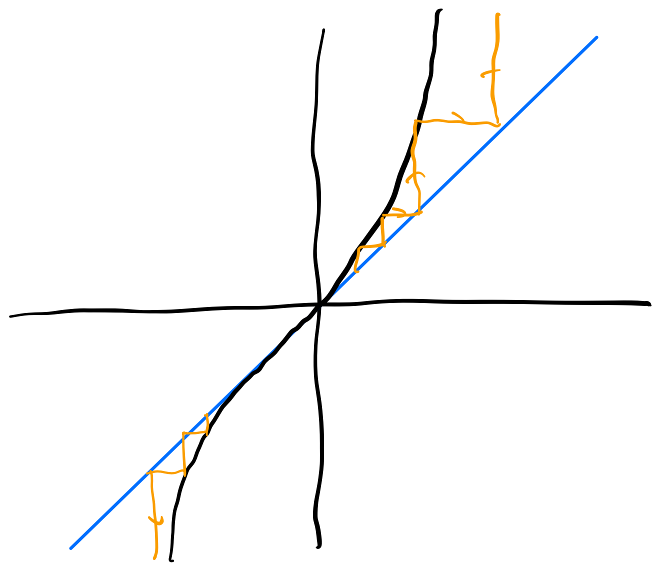
Iterando questo argomento n volte

$$| f^n(x) - x^* | < k^n | x - x^* |$$

e quindi $f^n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} x^*$

2. allo stesso modo

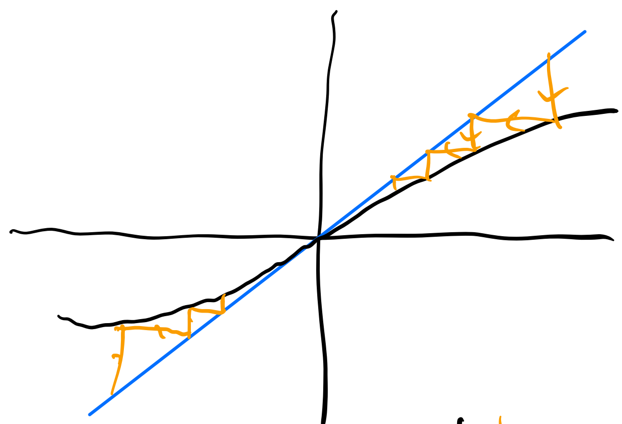
3. Tre esempi



— $f(x) = x + x^3$

ha una sorgente in 0

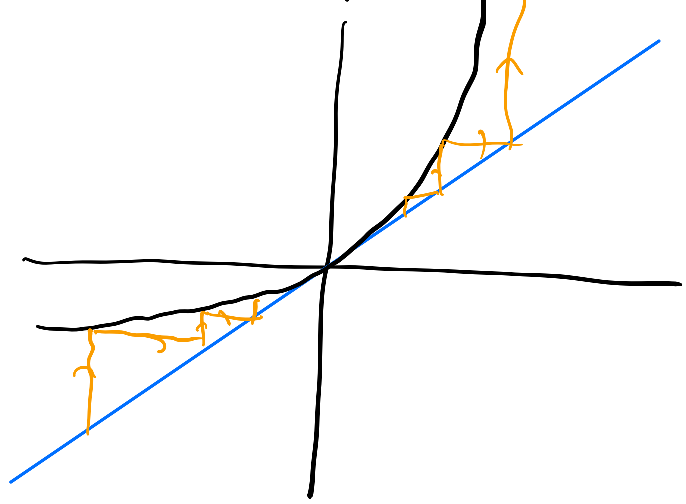
$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1$



— $g(x) = x - x^3$

ha un pozzo

$g(0) = 0 \quad g'(0) = 1$



— $h(x) = x + x^2$

$h(0) = 0$

$h'(0) = 1$

Notiamo posiamo fare un'analisi lineare:

$$x^* + \eta_{n+1} = x_{n+1} = f(x^* + \eta_n) =$$
$$= f(x^*) + f'(x^*)\,\eta_n$$

$$\Rightarrow \quad \eta_{n+1} = f'(x^*)\,\eta_n$$

Anche nel caso discreto possiamo avere biforcazioni

1) Saddle node $\rightarrow$ cambia il numero di punti fissi

Teorema

Sia f_λ famiglia ad un parametro di funzioni (dipende in maniera liscia da λ). Sia x^* un punto fisso per λ^*: $f_{\lambda^*}(x^*) = x^*$

Supponiamo che $f'_{\lambda^*}(x^*) \neq 1$.

Allora $\exists$ due intervalli $I \ni x^*$, $J \ni \lambda^*$

e una funzione differenziabile

$p: J \to I$ t.c. $p(\lambda^*) = x^*$

e $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$

__Dim__ Segue dal Teorema della

funzione implicita per

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$$

$$G(x^*, \lambda^*) = 0$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x^*, \lambda^*} = f'_{\lambda^*}(x^*) - 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \exists\ p(\lambda^*) = x^*$, $G(p(\lambda), \lambda) = 0$

$\to$ f_λ può avere una biforcazione

che cambia il numero di punti fissi

quando ha un punto fisso con

derivate uguale ad 1.

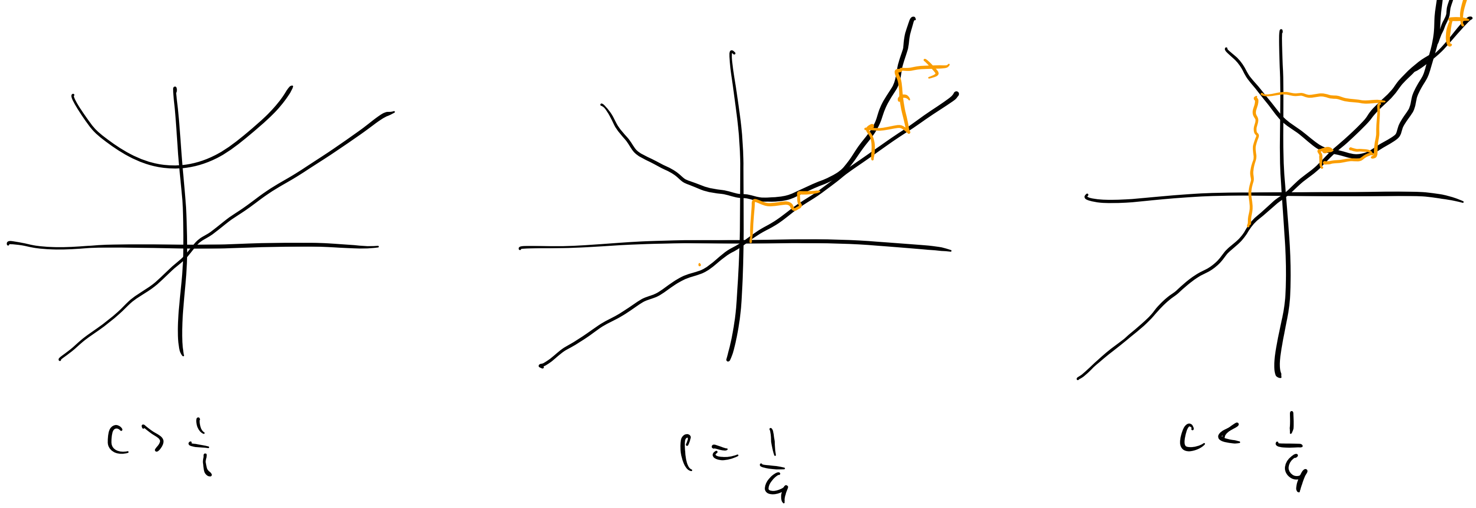
Esempi

•) $f_c(x) = x^2 + c$ c parametro

Punti fissi : $x^2 + c = x$

$$x_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4c}}{2}$$

- no punti fissi per $c > \frac{1}{4}$
- un punto fisso per $c = \frac{1}{4}$ $x = \frac{1}{2}$, $f'(\frac{1}{2}) = 1$
- due punti fissi per $c < \frac{1}{4}$



•) $f_c(x) = cx + x^3$ $c = 1$, $f_1(0) = 0$, $f_1'(0) = 1$

$\rightarrow$ punti fissi 0 e $\pm\sqrt{1-c}$

2) Period doubling:

$f' = -1$ cambia il carattere.

Esempio $f_\lambda(x) = \lambda x$ (vicino a $\lambda = -1$)

Vediamo $x = 0$ è un punto fisso, ed è attrattivo per $-1 < \lambda < 1$. Quando $|\lambda| > 1$ è repulsivo $\rightarrow$ passando per $\lambda = -1$ è cambiato il carattere del punto fisso, appare una famiglia di 2 cicli

per $\lambda = -1$
$$f(2) = -2 \rightarrow f(-2) = 2$$
$$f(3) = -3 \rightarrow f(-3) = 3$$

Modello logistico discreto

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) \qquad \lambda > 0$$

per semplicità $x \in I = [0,1]$

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x) \qquad \lambda x(1-x) = x$$
$$\lambda x - \lambda x^2$$

ha due punti fissi: $x = 0$ e

$$x_\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

$$f'_\lambda(x) = \lambda(1-2x)$$: $x = 0$ è

attrattivo in I, per $0 < \lambda < 1$,

repulsivo per $\lambda > 1$

$$f_\lambda(1) = 0$$

il secondo $x_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ → attrattivo

per $1 < \lambda < 3$, repulsivo per $\lambda > 3$

$\underline{\lambda = 4}$ → Vediamo come è fatto

il sistema

Prima cosa: $f'_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\lambda(1-2x)\right\}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 0$

$\forall \lambda \to x = \frac{1}{2}$ è un max di f

$\lambda = 4 \quad f_{\lambda=4}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad , \quad f^2_{\lambda=4}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$

Quindi: $f_4\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = I$

$$f_4\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = I$$

In particolare, devono esistere

$y_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ $\qquad$ $y_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$f_{\lambda=4}(y_0) = f_{\lambda=4}(y_1) = \frac{1}{2}$$

Notiamo che $f_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$$f^2_{\lambda=4}(y_0) = 1$$

$$f^2_{\lambda=4}(y_1) = 1$$

Inoltre $f^2_{\lambda=4}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Allora: $f_4^2([0, y_0]) = f_4^2\left(\left[y_0, \frac{1}{2}\right]\right) = I$

$$f_4^2\left(\left[\frac{1}{2}, y_1\right]\right) = f_4^2([y_1, 1]) = I$$

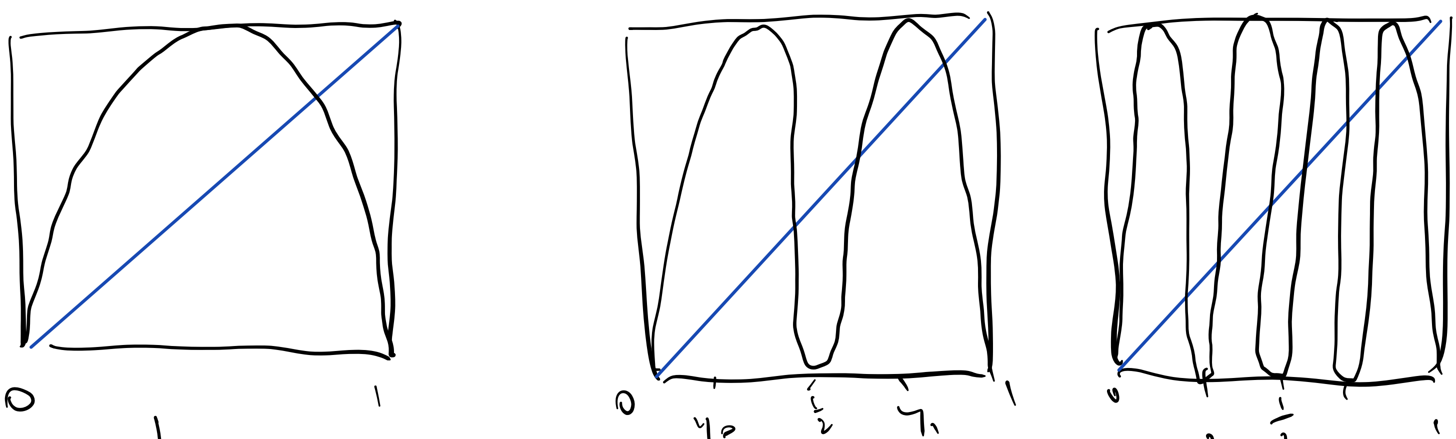
Al secondo step: $2^2 = 4$ intervalli

che vengono mandati in I

Si vede che l'n-esima iterazione

$f^n_{\lambda=4}$ mappa 2^n intervalli in tutto

I



f_4

2 punti fissi

$0, \frac{3}{4}$

f^2

4 punti fissi

$0, \frac{3}{4}$ due 2-cicli di f

f^3

8 punti fissi

$0, \frac{3}{4}$ 4 3-cicli di f

Orbit diagram