

# SOLUZIONI DI EQUILIBRIO, STABILITÀ E PICCOLE OSCILLAZIONI

Consideriamo sistema con VINCOLI INDIPENDENTI DAL TEMPO  $\bar{T} = \bar{T}_2(q)$   
 $\rightarrow T = T_2 \quad (b_h = 0 = c)$

Eq. di Lagrange  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$  possono essere scritte come

$$\ddot{q} = \bar{f}(\bar{q}, \dot{q})$$

$$\bar{f} = Q^{-1}(\bar{Q} - \bar{g})$$

$$g_h = \sum_{jk} \left( \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_h} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$\ddot{q}_h = f_h(q, \dot{q}) \iff \begin{cases} \dot{q}_h = \eta_h & (*) \\ \dot{\eta}_h = f_h(\bar{q}, \eta) \end{cases} \iff \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$$

sist. autonomo di eq. d'ff. del 1° ordine

Def.  $\bar{q}^*$  è una CONFIGURAZIONE (o punto) DI EQUILIBRIO

in le eq. di Lagrange  $\bar{c} \equiv (\bar{q}^*, 0)$  è pto di equil.

in il sistema (\*), ovvero se  $f_h(\bar{q}^*, 0) = 0 \quad h=1, \dots, n$

Prop. Pto  $\bar{q}^*$  è di EQUIL. in le eq. di Lagr.  $\iff Q_h(\bar{q}^*, 0) = 0 \quad h=1, \dots, n$

Dim.  $\bar{f} = Q^{-1}(\bar{Q} - \bar{g})$  e  $\bar{g}$  è omogenea in  $\dot{q}$

$$\bar{f}(\bar{q}^*, 0) = 0 \iff \underset{\text{invertibile}}{Q^{-1} \bar{Q}}|_{(\bar{q}^*, 0)} = 0 \iff \bar{Q}(\bar{q}^*, 0) = 0 //$$

Se le forze sono f.c.  $Q_h = - \frac{\partial V}{\partial q_h}$  allora vale

Prop. Conf.  $\bar{q}^*$  è di equil.  $\iff \frac{\partial V}{\partial q_h}(\bar{q}^*) = 0 \quad h=1, \dots, n$   
 $\leftarrow \bar{q}^*$  è pto staz. in  $V$

Def.  $\bar{q}^*$  è confg. di equil. **STABILE** se  $\bar{c} = (\bar{q}^*, 0)$  è stabile p il sistema (\*)

↳ comunque si prende un intorno  $U$  di  $\bar{q}^*$  e  $\epsilon > 0$ ,  
 $\exists$  intorno  $V$  di  $\bar{q}^*$  e  $\exists \delta > 0$  t.c. ogni moto con  
 dato iniziale  $(\bar{q}^0, \dot{\bar{q}}^0)$  con  $\bar{q}^0 \in V$  e  $T(\bar{q}^0, \dot{\bar{q}}^0) < \delta$   
 resta indefinitamente in  $U$  con ev. cioè  $T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) < \epsilon$

Teorema di Lagrange-Dirichlet, sia dato un sist. Lagrangiano  
 con  $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) - V(\bar{q})$  con  $T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(\bar{q}) \dot{q}_h \dot{q}_k$ .  
 Se l'eu potenziale  $V$  ha un MINIMO STRETTO  
 in  $\bar{q}^*$ , allora  $\bar{q}^*$  è un pto di equil. STABILE.

Dim. Se  $\bar{q}^*$  è min. di  $V \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial q_h}(\bar{q}^*) = 0 \quad \forall h=1, \dots, n \Rightarrow \bar{q}^*$  è di EQUIL.

L'eu.  $E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + V(\bar{q})$  è una buona funz. di Lyap.

- in un intorno di  $\bar{c} = (\bar{q}^*, 0)$  risulta  $E > V(\bar{q}^*)$

-  $E(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$  è una cost. del moto  $\Rightarrow \mathcal{L}_{\dot{\bar{q}}} E = 0$  //

- Teorema di LD si estende ai casi più comuni di forze  
 dip. da velocità (es. Forze di Coriolis)

$$V = V_0(\bar{q}) + V_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \quad \text{con } V_1 \text{ lineare in } \dot{\bar{q}}$$

↳ la dim del teorema rimane valida se prendiamo come  
 funz. di Lyapunov  $E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + V_0(\bar{q})$

- se ci sono forze dissipative la stab. rimane ma solo per tempi positivi.

# LINEARIZZAZIONE di un sist. Lagrangiano

si riferisce alle eq. d'ill. (eq. di Lagrange)

Studiamo le soluz. delle eq. di Lagrange attorno a pt. di equil. stab

$$|q_c(t) - q_c^*| \ll 1 \quad |\dot{q}_c(t)| \ll 1 \quad \leftarrow \text{durante tutto il moto}$$

ci permetteremo di trascurare

potenz. di grado superiore in  $\|\bar{q}(t) - \bar{q}^*\|$  e  $\|\dot{\bar{q}}(t)\|$ .

$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) - V(\bar{q}) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{h,m} \tilde{a}_{hm}(\bar{q}) \dot{q}_h \dot{q}_m$$

Supponiamo che  $(\bar{q}^*, 0)$  sia punto di equil. (stab)

Per semplicità ridefiniamo le coordinate  $\bar{q} = \bar{q}(\bar{q})$  t.c.

nelle nuove coord. il pt. di equil. sia in  $\bar{q} = 0$ :

$$\bar{q} = \bar{q} - \bar{q}^*$$

In pte nuove coordinate, il pt. di equil. è in  $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = (0, 0)$

$$\|\bar{q}(t)\| \ll 1 \quad \|\dot{\bar{q}}(t)\| \ll 1$$

$$L = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) - V(\bar{q}) \quad \leftarrow \text{espandiamo attorno a } (0, 0)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h,k} a_{hk}(\bar{q}) \dot{q}_h \dot{q}_k$$

$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = L(0, 0) + \sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_m}(0, 0) q_m + \sum_{m=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}(0, 0) \dot{q}_m + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m,k} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q_m \partial q_k}(0, 0) q_m q_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_m \partial \dot{q}_k}(0, 0) \dot{q}_m \dot{q}_k + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q_m \partial \dot{q}_k}(0, 0) q_m \dot{q}_k \right) + \dots$$

$$+ O(q^3, q^2\dot{q}, q\dot{q}^2, \dot{q}^3)$$

$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = - \overset{\text{cost.}}{V(0)} - \sum_m \frac{\partial V(0)}{\partial q_m} q_m = 0 \text{ per } \bar{q} \text{ è di equil.}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{m,k=1}^m \frac{\partial^2 V(0)}{\partial q_m \partial q_k} q_m q_k + \frac{1}{2} \sum_{m,k=1}^m a_{mk}(0) \dot{q}_m \dot{q}_k + \dots$$

↑  
termini di grado 3 in  $q$  e  $\dot{q}$   
quindi più piccoli rispetto ai  
termini precedenti ( $\|\bar{q}\| \ll 1$ ,  $\|\dot{\bar{q}}\| \ll 1$ )

Otteniamo una lagrangiana quadratica che bene approssima la lagr. di partenza in un intorno della configurazione di equilibrio.

$$\hat{L} = \frac{1}{2} \sum_{h,k} a_{hk}(0) \dot{q}_h \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{h,k} \underbrace{\frac{\partial^2 V(0)}{\partial q_h \partial q_k}}_{\equiv B_{hk}} q_h q_k$$

$$\rightarrow \hat{L} = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} \cdot A \dot{\bar{q}} - \frac{1}{2} \bar{q} \cdot B \bar{q}$$

↓  
Eq di Lagrange (buona approssimazione in moti vicini a pt. equil.)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_l} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{h=1}^m A_{lh} \dot{q}_h \right) = \sum_{h=1}^m A_{lh} \ddot{q}_h$$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_l} = - \sum_{h=1}^m B_{lh} q_h \quad \rightsquigarrow \sum_{h=1}^m (A_{lh} \ddot{q}_h + B_{lh} q_h) = 0 \quad l=1, \dots, m$$

$$A \ddot{\bar{q}} + B \bar{q} = 0 \quad (*)$$

⇒ le eq. di Lap. di  $\hat{L}$  sono EQ. DIFF. LINEARI

- Avremmo ottenuto le eq. lineari (\*) linearizzando le eq. di Lap. di  $L$ , cioè

$$\begin{cases} \dot{q} = \bar{q} \\ \ddot{q} = \bar{f}(q, \dot{q}) \end{cases} \leftarrow \text{lineari. } \bar{f} \Rightarrow (*)$$

Risolviamo  $A\ddot{q} + B\dot{q} = 0$  (\*)  $\leftarrow$  eq. LIN. OMOG. : solut. gen. è comb. lin. di 2m solut. indep.

Cerchiamo solut. particolari della forma

metto in (\*)  $\left\{ \begin{array}{l} \bar{q}(t) = \tau(t) \bar{u} \quad \bar{u} \in \mathbb{R}^n \\ \ddot{\tau}(t) A \bar{u} + \tau(t) B \bar{u} = 0 \end{array} \right.$

$$\ddot{\tau}(t) A \bar{u} + \tau(t) B \bar{u} = 0$$

$\leftarrow$  possibile solo se  $A\bar{u}$  e  $B\bar{u}$  sono vettori paralleli

cioè se

$$B\bar{u} = \lambda A\bar{u} \quad (\neq)$$

$$\ddot{\tau} = -\lambda \tau$$

↑  
2 soluzioni indipendenti

$\bar{u}^{(i)} \quad i=1, \dots, m$

Per avere 2m solut. indep. di (\*)  $\rightsquigarrow$  cercare m solut. indep. di (\neq)

→ eq. agli autovalori per B data da

$$\det(B - \lambda A) = 0 \quad \rightsquigarrow \text{valori di } \lambda_i$$

↑ matrice def. pos. e simm.

A è matrice simm. e stretta. def. pos.

⇒ ∃ matrice  $\tilde{U}$  (invertibile) t.c.

$$\tilde{U}^T A \tilde{U} = \mathbb{1}$$

$$\tilde{O}^T A \tilde{O} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \alpha_i > 0$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{L^T}_{\tilde{U}^T} \underbrace{\tilde{O}^T A \tilde{O}}_{\mathbb{1}} \underbrace{L}_{\tilde{U}} = L^T (\alpha_1 \dots \alpha_n) L = \mathbb{1}$$

$$B\bar{u} = \lambda A\bar{u} \Leftrightarrow \tilde{U}^T B \tilde{U} \tilde{U}^{-1} \bar{u} = \lambda \tilde{U}^T A \tilde{U} \tilde{U}^{-1} \bar{u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\tilde{U}^T B \tilde{U}) \bar{w} = \lambda \bar{w} \quad \bar{w} \equiv \tilde{U}^{-1} \bar{u}$$

Si può dim. che  $\tilde{U}^T B \tilde{U}$  è simmetrica → possiamo diagonalizzarla con una matrice ortogonale  $O$  ( $OO^T = \mathbb{1}$ )

$$\leadsto O^T \tilde{U}^T B \tilde{U} O = B_{\text{diag.}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

→ abbiamo trovato una matrice  $U \equiv \tilde{U} O$  ( $U^T = O^T \tilde{U}^T$ )

t.c.  $U^T B U = B_{\text{diag.}}$

$$U^T A U = \mathbb{1} \quad (O^T \tilde{U}^T A \tilde{U} O = O^T \mathbb{1} O = \mathbb{1})$$

$$\Rightarrow U^{-T} = A U$$

$$B U = U^{-T} U^T B U = U^{-T} B_{\text{diag.}} = A U B_{\text{diag.}}$$

$$\underbrace{B \cdot U}_{\downarrow} = A \cdot U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$U = (\bar{u}^{(1)} \quad \bar{u}^{(2)} \quad \dots \quad \bar{u}^{(n)})$$

$$(B\bar{u}^{(1)} \quad B\bar{u}^{(2)} \quad \dots \quad B\bar{u}^{(n)}) = (A\bar{u}^{(1)} \quad A\bar{u}^{(2)} \quad \dots \quad A\bar{u}^{(n)}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 A\bar{u}^{(1)} \quad \lambda_2 A\bar{u}^{(2)} \quad \dots \quad \lambda_n A\bar{u}^{(n)})$$

Le colonne di  $U$  soddisfano

$$B \bar{u}^{(i)} = \lambda_i A \bar{u}^{(i)} \quad i=1, \dots, m$$

→ le colonne di  $U$  sono gl. autovettori di  $B$   
rispetto agli autovalori  $\lambda_i$ .

$B$  simmetrica →  $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$B$  def. positiva →  $\lambda_i \geq 0$

Autovett.  $u_j^{(i)} = U_{ji}$

↖  
la componente  $j$ -esima  
del vettore  $i$ -esimo

## MODI NORMALI DI OSCILLAZIONE

Ci restringiamo al caso di interesse: EQ. STAB. ( $\bar{q}^*$  è MIN di  $V$ )

$$\Rightarrow B \left( B_{kk} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_k}(\bar{q}^*) \right) \text{ è DEF. POSITIVA}$$

$$\Rightarrow \lambda_i = \omega_i^2 > 0 \quad i=1, \dots, m$$

Es. in  $\tau(t)$  è  $\ddot{\tau}(t) = -\omega_i^2 \tau(t)$  ← osz. arm.

$$\Rightarrow \tau_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad \leftarrow \text{relativa a } \bar{u}^{(i)}$$

Soluz. generale

$$\bar{q}(t) = \sum_{i=1}^m A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \bar{u}^{(i)}$$

combinat. lin.  
delle  $2m$   
soluz. partic.

Sottocaso  $A_k = 1$   $A_{i \neq k} = 0$

$$q_h(t) = U_{hk} \cos(\omega_k t + \varphi_k) \Leftrightarrow \bar{q}(t) = \cos(\omega_k t + \varphi_k) \bar{u}^{(k)}$$

→ soluzioni PERIODICHE (armoniche) in cui le  $q_h(t)$  hanno PERIODO E FASE uguali ( $\forall h=1, \dots, m$ ) e sono dette **MODI NORMALI DI OSCILLAZIONE**

→ Soluz. gen. è comb. lineare dei modi norm. di oscill.

Le frequenze dei modi normali sono dette **FREQUENZE delle PICCOLE OSCILLAZIONI**

$$\hat{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} \cdot A \dot{\bar{q}} - \frac{1}{2} \bar{q} \cdot B \bar{q}$$

↓ faccio cambio di coord.  $\bar{q} = U \bar{x}$

$$\hat{L}'(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = \hat{L}(U \dot{\bar{x}}, U \bar{x}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{x}} \cdot \overbrace{U^T A U}^{\mathbb{1}} \dot{\bar{x}} - \frac{1}{2} \bar{x} \cdot \overbrace{U^T B U}^{B \text{diag.}} \bar{x}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^2$$

pto eq. stab

$$= \sum_{i=1}^m \left[ \frac{1}{2} \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \omega_i^2 x_i^2 \right] \quad (*)$$

$x_i$  sono dette **COORDINATE NORMALI**

↑ somma di  $m$  oscillatori armonici **DISACCOUPLATI!**

Ep. di Lagr. sono

$$\ddot{x}_i = -\omega_i^2 x_i \quad i=1, \dots, m$$

⇒ Qualsiasi sist. Lagrangiano linearizzato attorno a pt ep. stab. è equivalente a un sist. di n oscill. armonici disaccoppiati.

## Linearizzazione e stabilità

Guardando le ep. disaccoppiate, si vede subito che l'origine è pt ep. stab. per il sistema linearizzato se  $\lambda_i > 0 \forall i$ , mentre è INSTAB. se  $\exists i$  t.c.  $\lambda_i \leq 0$ .

Le proprietà di stabilità dell'ep. lin. non si trasportano sempre al sistema originario non-lineare. Ciò può avvenire per sist.

Lagrangiani conservativi nei seguenti casi:

- se  $\lambda_i > 0 \forall i \Rightarrow$  pt ep. STAB anche per sist. non-lineare
- se  $\exists \lambda_i < 0 \Rightarrow$  " " INSTAB " " " "

Ma se almeno un  $\lambda_i$  è nullo, non si può dire nulla di definitivo (bisogna prendere in considerazione le potenze successive nell'espansione di  $L$ ).