Matrici equivalenti e matrici simili

matrici simili: 2 matrici quadrate A, B del medesimo ordine n si dicono simili quando esiste una matrice invertibile T tale che

$$A = T^{-1} B T$$

proprietà delle matrici simili $\Longleftrightarrow$ 2 matrici simili hanno gli stessi autovalori (con la medesima molteplicità)

Inoltre hanno stesso rang, determinante e traccia

Esercizio

Matrici diagonalizzabili e non diagonalizzabili

Consideriamo le seguenti 2 matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hanno gli stessi autovalori, con la medesima molteplicità:

$\lambda_1 = -1$ autovalore semplice

${}_2\lambda_3 = 0$ autovalore doppio

Verifica — **Matrice A_1**

$$\det[\lambda I - A_1] = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & (\lambda+1) & -2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

sviluppo il determinante lungo questa riga $\Rightarrow$

$$p_{A_1}(\lambda) = (-1)^{3+3} \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & (\lambda+1) \end{vmatrix} + \dots \Rightarrow$$

$$p_{A_1}(\lambda) = (-1)^{3+3} \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & (\lambda+1) \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ (\lambda+1) & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\left[\lambda(\lambda+1) - 1 \cdot 0\right]$$

$$= \lambda^2(\lambda+1)$$

$$p_{A_1}(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$$

autovalore doppio $\lambda = 0$

autovalore semplice $\lambda = -1$

Matrice A_2: polinomio caratteristico

$$p_{A_2}(\lambda) = \det(\lambda I - A_2) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & (\lambda+1) & -2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

anche stavolta conviene sviluppare lungo la 3^a riga

$$P_{A_2}(\lambda) = (-1)^{3+3} \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & (\lambda+1) \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ (\lambda+1) & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \left[\lambda(\lambda+1) - 0\right] + 0 + 0$$

$$P_{A_2}(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$$

autovalore doppio $\lambda = 0$

autovalore singolo $\lambda = -1$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_{A_1}(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_{A_2}(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$$

NB A_1 è diagonalizzabile

A_2 NON è diagonalizzabile

Matrice A_1

Matrice diagonalizzabile $\Rightarrow$ DEVE esistere T:

T invertibile, $T^{-1}AT = D = \text{diag}(\text{autovalori})$

Per A_1 allora:

$$T_1 : \quad T_1^{-1} A_1 T_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$T_1 = \left[v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, v_3 \right] \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} v_1 &: \; A_1 v_1 = \lambda_1 v_1 \\ v_2 &: \; A_1 v_2 = \lambda_2 v_2 \\ v_3 &: \; A_1 v_3 = \lambda_3 v_3 \end{aligned}$$

Cerco gli autovettori

$v_1 : \quad A_1 v_1 = \lambda_1 v_1 \iff (A_1 - \lambda_1 I) v_1 = 0$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \quad A_1 v_1 = 0 \quad$ con $\quad v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ a - b + 2c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

1 sola relazione
2 parametri liberi!

"∞^2" soluzioni

La base del sottospazio
delle soluzioni ha dimensione 2!

$$v_1^{(I)} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = a + 2c = 1 \\ c = 0 \end{cases} \qquad v_1^{(I)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sono vettori linearmente
INDIPENDENTI

$$v_1^{(II)} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = a + 2c = 0 \\ c = +1 \end{cases} \qquad v_1^{(II)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

molteplicità geometrica

NB tutte le volte in cui la base del sottospazio degli autovettori associati ad un autovalore multiplo ha dimensione pari alla molteplicità dell'autovalore a quell'autovalore è associato un blocco "diagonale" nella forma di Jordan della matrice

nel polinomio caratteristica

molteplicità algebrica

v_3: $A_1 v_3 = \lambda_3 v_3$ $\qquad \lambda_3 = -1$

$$(A_1 - \lambda_3 I) v_3 = 0$$

suppongo ancora $v_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$(A_1 + I)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

2 relazioni e 3 incognite $\to$ un parametro libero

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La base del sottospazio di v_3 ha dimensione 1

La matrice di trasformazione è:

$$T_1 = \left[v_1^{(I)} \;\middle|\; v_1^{(II)} \;\middle|\; v_3 \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det T_1 = -1$$

Verifica:

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$T_1^{-1} A_1 T_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= J$$

$$T_1 A_1 T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Matrice } A_2}$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_{A_2}(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$$

Ripeto: calcoli fatti per la matrice A_1 e cerco gli autovettori associati agli autovalori di A_2

Per A_2 allora:

$$T_2 : \quad T_2^{-1} A_2 T_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$T = \left[v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, v_3 \right] \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} v_1 &: \quad A_2 v_1 = \lambda_1 v_1 \\ v_2 &: \quad A_2 v_2 = \lambda_2 v_2 \\ v_3 &: \quad A_2 v_3 = \lambda_3 v_3 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 0$ $\quad A_2 v_1 = \lambda_1 v_1$

$A_2 v_1 = 0$

Come prima sia $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ -b+2c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

∞^1 soluzioni

La base del sottospazio degli autovettori associati a $\lambda_1 = 0$ ha dimensione 1!

NB $\lambda_1 = 0$ è autovalore doppio $\rightarrow$ molteplicità algebrica 2

$\langle v_1 \rangle = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle$ molteplicità geometrica 1

sono diverse!

Non riesco a trovare la matrice T!

$$T = \left[\, \underbrace{v_1 \;\vdots\; v_2}_{} \;\vdots\; \underbrace{v_3}_{} \,\right]$$

autovettori associati a $\lambda = 0$

associato a $\lambda_3 = -1$

per v_3 foglio successivo

NB ne ho solo 1!

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\nexists\, T_2$$

A_2 non diagonalizzabile!

In effetti la forma di Jordan di A_2 è

$$J_{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = -1$

$$A_2 v_3 = \lambda_3 v_3$$

$$(A_2 - \lambda_3 I) v_3 = 0$$

$$(A_2 + I) v_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \text{ qualsiasi} \\ b=-a \\ c=0 \end{cases}$$

"∞^1" soluzioni

la base del sottospazio di v_3 ha dimensione 1

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Della matrice T_2 che dovrebbe portare A_2 in forma diagonale ho trovato 2 colonne, MA non la 3ª $\Rightarrow \nexists\, T_2$

$$T_2 = \left[\, v_1 \;\vdots\; ? \;\vdots\; v_3 \,\right]$$

Riassumendo

(•) studio di stabilità per sistema LTI a tempo continuo → matrice A → → autovalori

(•) autovalori a parte reale negativa tranne un autovalore nullo, o coppia di autovalori a parte reale nulla, con molteplicità algebrica maggiore di 1

(•) per quell'autovalore (o coppia di ..) determino la molteplicità geometrica

(•) se molteplicità algebrica = molteplicità geometrica per l'autovalore (o coppia ..) a parte reale nulla

ALLORA

posso affermare che il sistema è stabile semplicemente

ALTRIMENTI è instabile