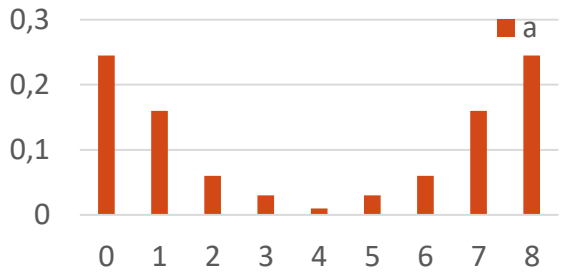
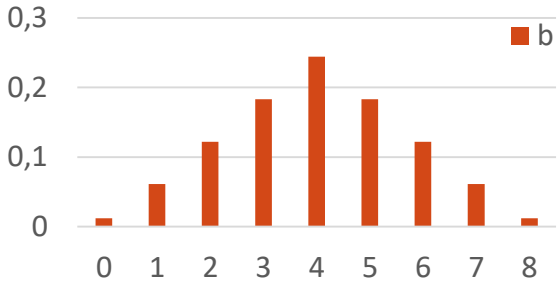
Statistica Sociale

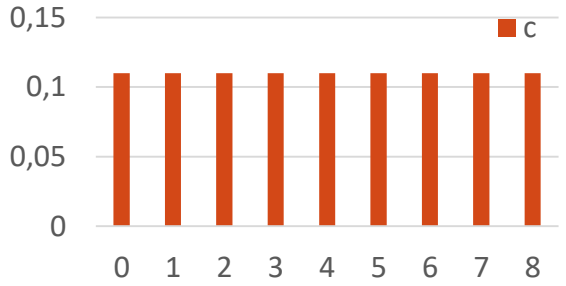
22/03/2022

Rappresentatività media

x	$Freq\ rel^a$	$Freq\ rel^b$	$Freq\ rel^c$
0	0,245	0,012	0,11
1	0,16	0,061	0,11
2	0,06	0,122	0,11
3	0,03	0,183	0,11
4	0,01	0,244	0,11
5	0,03	0,183	0,11
6	0,06	0,122	0,11
7	0,16	0,061	0,11
8	0,245	0,012	0,11
	1		



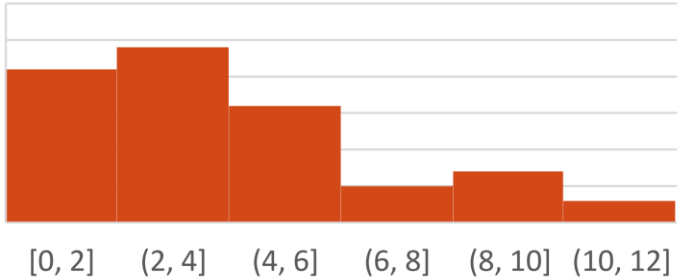




$\bar{x}^a = 4$

$\bar{x}^b = 0 * 0{,}012 + 1 * 0{,}061 + \cdots + 7 * 0{,}061 + 8 * 0{,}012 = 4$

$\bar{x}^c = \ldots = 4$

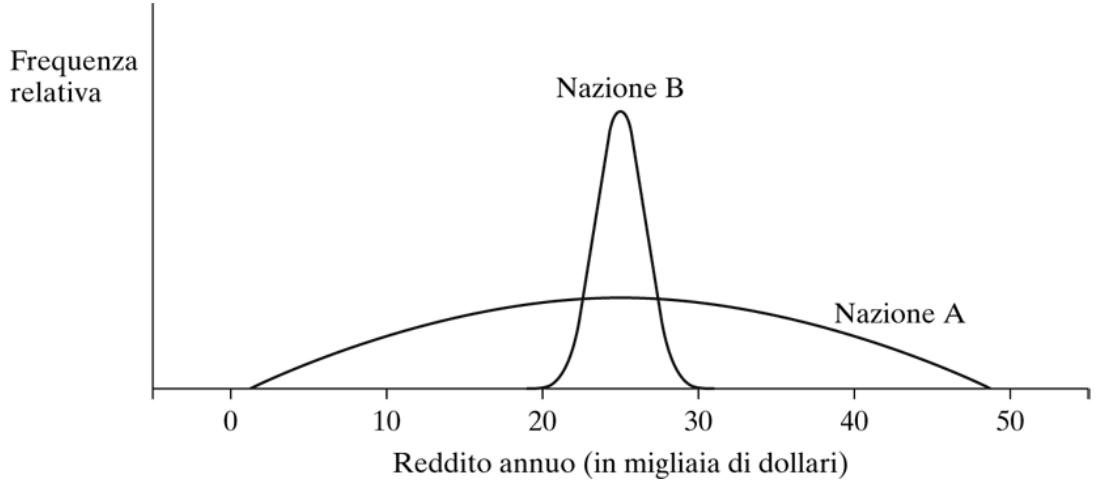


$\bar{x}^d = 4$

Gli indici di posizione danno informazioni sulla tendenza centrale della distribuzione ma non sulla dispersione

La variabilità di un fenomeno

Gli indici di posizione danno informazioni sulla tendenza centrale della distribuzione ma non sulla dispersione



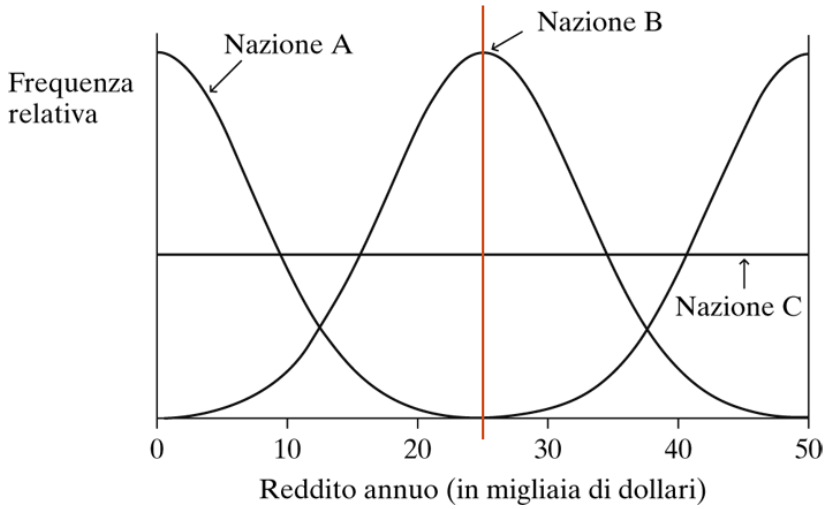
Attraverso una misura sintetica, si vuole descrivere la tendenza delle unità del campione ad assumere modalità diverse

- avrà valore minimo quando tutte le unità della distribuzione presentano uguale modalità
- avrà valore massimo quando le unità assumono modalità diverse tra loro

Campo di variazione (range)

Il campo di variazione si calcola come la differenza tra il valore massimo e minimo osservati

Non è sensibile ad altre caratteristiche della variabilità dei dati



In termini di distanza dalla media, quale delle tre distribuzioni ha maggiore variabilità?

Variabilità rispetto alla media

Si sceglie un valore caratteristico della distribuzione rispetto a cui calcolare la "diversità" o dispersione delle modalità, uno dei più utilizzati è la media aritmetica

La "diversità" si misura calcolando le differenze tra le unità ed il valore caratteristico scelto. Ad esempio potremmo utilizzare gli scarti (o deviazione) dalla media $(x_i - \bar{x})$, ma …

… la media è il baricentro delle osservazioni: la somma degli scarti dalla media delle osservazioni più piccole è uguale alla somma delle distanze di quelle più grandi

La somma degli scarti dalla media è sempre pari a 0

$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 1, x_5 = 2$

$n = 5$

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{n} = \frac{3+2+2+1+2}{5} = 2$

Calcoliamo gli scarti dalla media

$x_1 - \bar{x} = 3 - 2 = 1; x_2 - \bar{x} = 2 - 2 = 0$

$x_3 - \bar{x} = 2 - 2 = 0; x_4 - \bar{x} = 1 - 2 = -1$

$x_5 - \bar{x} = 2 - 2 = 0$

$\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x}) = (x_1 - \bar{x}) + \cdots + (x_5 - \bar{x}) = 1 + 0 + 0 - 1 + 0 = 0$

Varianza e deviazione standard

Considera la somma degli scarti al quadrato dalla media aritmetica e la divide per la numerosità campionaria (*n-1*)

La varianza di un insieme di *n* valori osservati $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ di una variabile x con media aritmetica $\bar{x}$ è

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right]$$

È approx una media delle deviazioni al quadrato

Mentre la deviazione standard è la radice quadrata della varianza

$$s = \sqrt{s^2}$$

La deviazione standard è espressa nella stessa unità di misura della media

- La ragione per cui si utilizza (n - 1) piuttosto che n nel denominatore di s (e di s2) riguarda l'inferenza per i parametri della popolazione
- Quando abbiamo dati riferiti ad un'intera popolazione, sostituiamo (n - 1) con l'effettiva ampiezza campionaria: la varianza della popolazione è, allora, esattamente la media delle deviazioni al quadrato

Confronto di due campioni

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right]$$

Campione 1: 0, 4, 4, 5, 7, 10

Campo di variazione del campione 1 = 10 - 0 = 10

$\bar{x}_1 = \frac{0+4+4+5+7+10}{6} = \frac{30}{6} = 5$

$s_1^2 = \frac{1}{6-1}[(0-5)^2 + (4-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (10-5)^2]$

$= \frac{1}{5}[(-5)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (2)^2 + (5)^2]$

$= \frac{1}{5}[25 + 1 + 1 + 0 + 4 + 25] = \frac{56}{5} = 11{,}2$

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{11{,}2} = 3{,}3$

Campione 2: 0, 0, 1, 9, 10, 10

Campo di variazione del campione 2 = 10-0=10

$\bar{x}_2 = \frac{0+0+1+9+10+10}{6} = \frac{30}{6} = 5$

$s_2^2 = \frac{1}{6-1}[(0-5)^2 + (0-5)^2 + (1-5)^2 + (9-5)^2 + (10-5)^2 + (10-5)^2]$

$= \frac{1}{5}[(-5)^2 + (-5)^2 + (-4)^2 + (4)^2 + (5)^2 + (5)^2]$

$= \frac{1}{5}[25 + 25 + 16 + 16 + 25 + 25] = \frac{132}{5} = 26{,}4$

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{26{,}4} = 5{,}13$

Attenzione all'ordine delle operazioni: se sommate gli scarti prima di elevarli al quadrato ottenete 0!

Proprietà della varianza/deviazione standard

- la varianza è sempre positiva (somma di differenze al quadrato)
- la varianza è uguale a 0 solo se tutte le osservazioni hanno lo stesso valore

$$x_1 = 10; x_2 = 10; x_3 = 10$$
$$\bar{x} = 10$$
$$s^2 = \frac{1}{2}[(10-10)^2+(10-10)^2+(10-10)^2] = 0$$

- più grande è la variabilità intorno alla media maggiore è il valore della varianza
  - le differenze più grandi hanno “più peso” perchè aumentano più che proporzionalmente
- se sui dati viene applicata una trasformazione di scala, anche la deviazione standard viene trasformata
  - Altezza da cm a metri

Interpretazione della deviazione standard

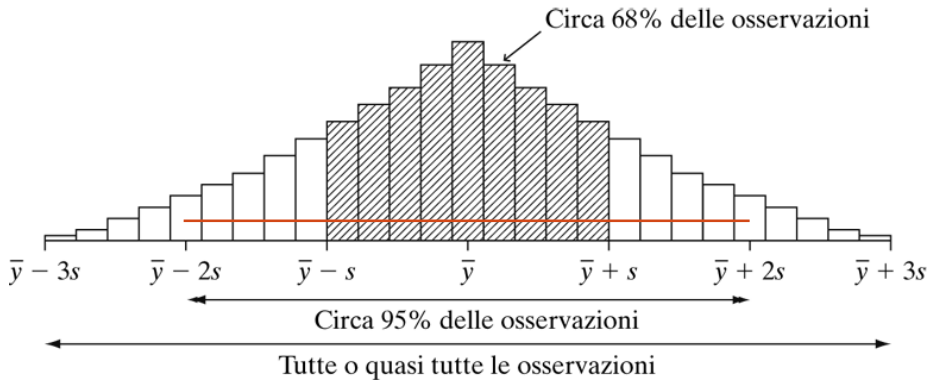
A parità di unità di misura, possiamo confrontare le varianze di due campioni e concludere quale delle due è più variabile

Ma come interpretare il valore della varianza in termini assoluti?

Regola empirica

Se l'istogramma della distribuzione ha una forma approssimativamente campanulare:

1. Circa il 68% delle osservazioni assume valori compresi tra $\bar{x} - s$ e $\bar{x} + s$
2. Circa il 95% delle osservazioni assume valori compresi tra $\bar{x} - 2s$ e $\bar{x} + 2s$
3. Quasi la totalità delle osservazioni assume valori compresi tra $\bar{x} - 3s$ e $\bar{x} + 3s$



Calcolo della varianza

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right]$$

Unità	Età	$x_i - \bar{x}$	=	$(x_i - \bar{x})^2$
1	22	22-26,3	-4,3	18.49
2	21	21-26,3	-5,3	28,09
3	21	21-26,3	-5,3	28,09
4	21	21-26,3	-5,3	28,09
5	21	21-26,3	-5,3	28,09
6	27	27-26,3	0,7	0,49
7	31	31-26,3	4,7	22,09
8	44	44-26,3	17,7	313,29
9	23	23-26,3	3,3	10,89
10	32	32-26,3	5,7	32,49
				510,1

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9}[18{,}49 + 28{,}09 + \cdots + 32{,}49] = \frac{510{,}1}{9} = 56{,}68$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{56{,}68} = 7{,}53$$

Unità	Età	$x_i - \bar{x}$	=	$(x_i - \bar{x})^2$
1	24	24-23,625	0,375	0,140625
2	21	21-23,625	-2,625	6,890625
3	34	34-23,625	10,375	107,640625
4	22	22-23,625	-1,625	2,640625
5	21	21-23,625	-2,625	6,890625
6	22	22-23,625	-1,625	2,640625
7	24	24-23,625	0,375	0,140625
8	21	21-23,625	-2,625	6,890625
				133,875

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{7}[0{,}141 + 6{,}89 + \cdots + 6{,}89] = \frac{133{,}875}{7} = 19{,}125$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{19{,}125} = 4{,}37$$

Coefficiente di variazione

Utile se si vogliono confrontare variabilità di fenomeni con ordini di grandezza molto diversi (es. altezze di adulti e bambini) o con unità di misura diverse (es peso ed altezza)

Il coefficiente di variazione è un indice di variabilità percentuale definito come il rapporto tra la deviazione standard e la media aritmetica (positiva) moltiplicato per 100

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} * 100$$

- Confrontiamo le due distribuzioni relative alla quantità di pulviscolo emesso rispetto a due dispositivi anti inquinanti installati sulle ciminiere.

Tipo	Quantità di pulviscolo (g/min)								
A	69	80	44	52	54	54	86	77	66
B	35	62	43	23	30	28	22	40	25

$$\bar{x}_A = 64{,}67\ g/min \quad s = 13{,}65\ g/min$$
$$\bar{x}_B = 34{,}22\ g/min \quad s = 12{,}02\ g/min$$

Sembra che tra le due la distribuzione del dispositivo A sia più variabile, ma osservando il coefficiente di variazione…

$$CV_A = \frac{13{,}65}{64{,}67} * 100 = 21\% \qquad CV_B = \frac{12{,}02}{34{,}22} * 100 = 35\%$$

Il coefficiente di variazione può assumere come valore minimo 0, mentre il valore massimo non è definito. Per questo non può essere utilizzato per valutare l'intensità della variabilità ma solo per confrontare la variabilità di due distribuzioni

Ha senso per caratteri strettamente positivi, in questo caso infatti la media artimetica rappresenta l'ordine di grandezza effettivo del fenomeno

Quartili e percentili

La mediana è una grandezza che appartiene a un insieme di misure di posizione chiamate percentili

Il p-esimo percentile è il valore nella distribuzione al di sotto del quale ricade il p% delle osservazioni e al di sopra del quale ricade il (100 - p)% delle osservazioni

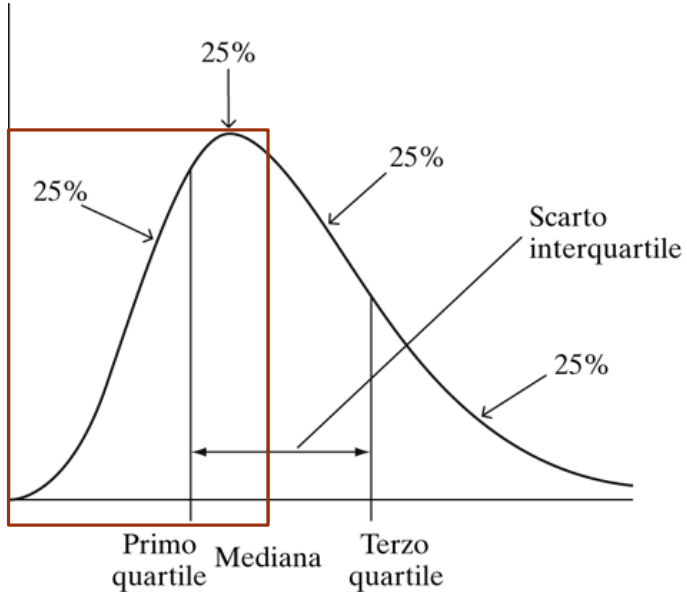
- La mediana è il 50-esimo percentile (o secondo quartile)
- Altri due percentili di uso comune sono il 25-esimo percentile (o primo quartile) ed il 75-esimo percentile (o terzo quartile)

I quartili (primo quartile, mediana e terzo quartile) dividono la distribuzione in 4 parti ognuna delle quali contiene un quarto delle osservazioni

Differenza(scarto) interquartile è la differenza tra il terzo ed il primo quartile

$$\mathrm{IQR} = Q_3 - Q_1$$

- Rappresenta il campo di variazione per il 50% delle unità centrali intorno alla mediana, non sensibile alla presenza di valori anomali



Differenza interquartile e range

Il primo quartile può essere calcolato come la mediana del primo 50% dei dati ed il terzo come la mediana del secondo 50% dei dati

- Q_3 in questo caso è la media tra il 75-esimo ed il 76-esimo valore osservato, mentre Q_1 è la media tra il 25-esimo ed il 26-esimo valore osservato.
- Per il primo collettivo quindi: $Q_3 = 4$ e $Q_1 = 3$
  - $IQR_1 = Q_3 - Q_1 = 4 - 3 = 1$
  - $R_1 = 7 - 1 = 6$
- Per il secondo collettivo invece: $Q_3 = 6$ e $Q_1 = 2$
  - $IQR_2 = Q_3 - Q_1 = 6 - 2 = 4$
  - $R_2 = 7 - 1 = 6$

	Primo collettivo		Secondo collettivo	
X	n_j	N_j	n_j	N_j
1	2	2	10	10
2	5	7	25	35
3	20	27	10	45
4	50	77	10	55
5	15	92	10	65
6	5	97	15	80
7	3	100	20	100
Totale	100		100	

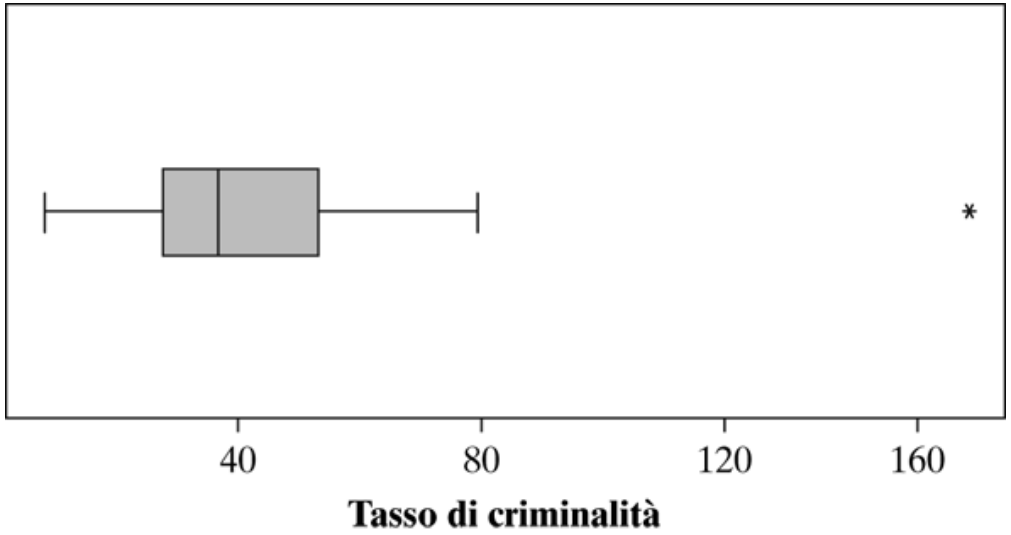
La differenza interquartile non è influenzata dagli outlier

Box plot

- La mediana, i quartili, il massimo e il minimo sono cinque misure di posizione spesso impiegate congiuntamente per descrivere la centralità e la variabilità di una distribuzione
- I cinque numeri forniscono una semplice descrizione dei dati e li chiameremo sintesi-a-cinque-numeri
- Essi sono anche gli elementi base di una rappresentazione grafica chiamata box plot
  - Il box (scatola) contiene il 50% centrale della distribuzione, dal primo al terzo quartile
- La mediana è rappresentata da una linea che attraversa il box
- Le linee che si estendono a partire dalla scatola sono chiamate whiskers e vanno fino al massimo e fino al minimo a meno che nella distribuzione siano presenti osservazioni outlier

- Con un software statistico è stato ottenuto il seguente report riferito alla distribuzione dei tassi di criminalità USA:

100%	Max	79.0
75%	Q3	51.0
50%	Med	36.
25%	Q1	27.0
0%	Min	8.0



Box plot con valori anomali

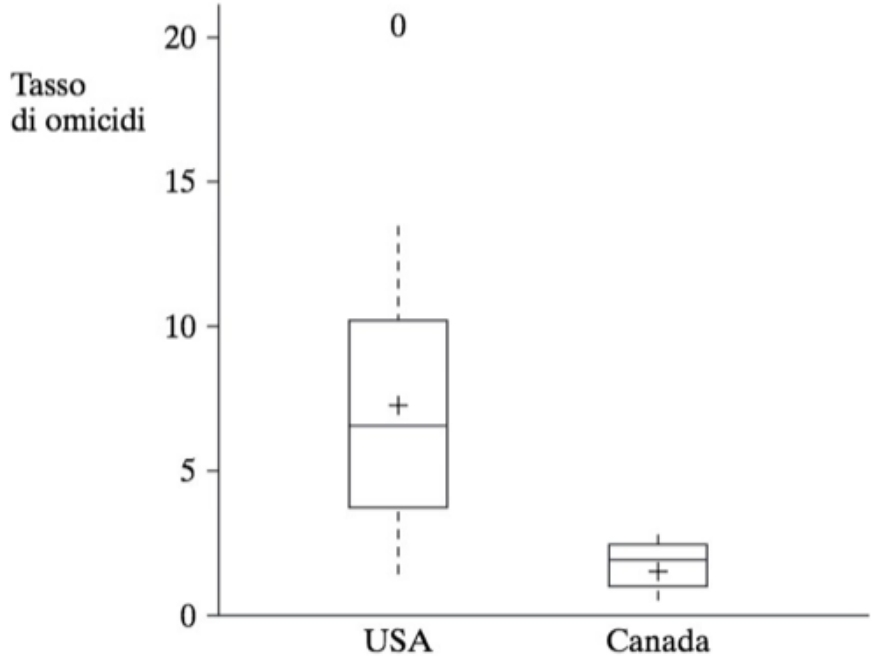
Sono considerati anomali (outlier) quei valori più piccoli di

$$Q_1 - 1{,}5 * IQR$$

o più grandi di

$$Q_3 + 1{,}5 * IQR$$

- Se nella distribuzione non sono presenti osservazioni outlier, i whisker del box plot si estendono fino alle osservazioni massima e minima
- Se ci sono outlier, i whisker si estendono fino all'osservazione che è compresa entro 1.5×(IQR) oltre i quartili; gli outlier sono indicati separatamente nel grafico
- È sempre meglio considerare un'osservazione definita outlier come un potenziale outlier



Età	Numerosità
21	5
23	1
27	1
31	1
32	1
44	1

21,21,21,21,21, 23,27,31,32,44

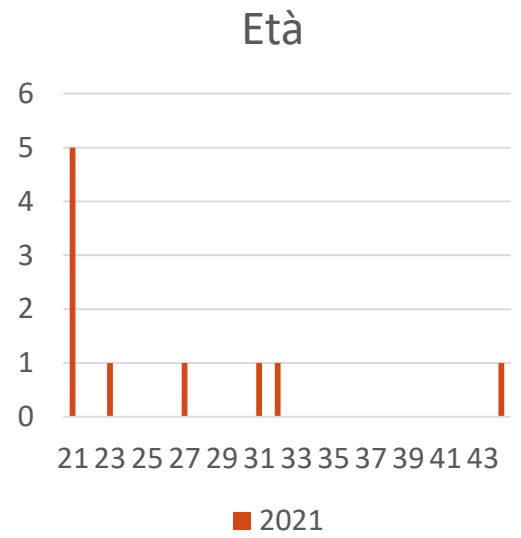
$$Me = \frac{x_{(5)}+x_{(6)}}{2} = \frac{21+23}{2} = 22$$

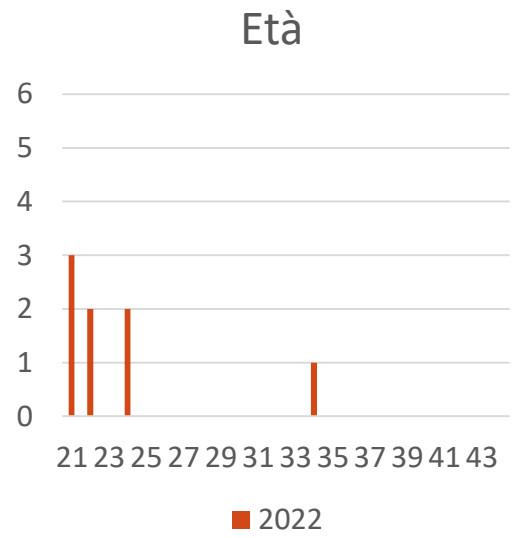
$Q_1 = x_{(3)} = 21$ $Q_3 = x_{(8)} = 31$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 31 - 21 = 10$$

$$Baffo\ \inf = 21 - 1{,}5 * 10 \qquad Baffo\ \sup = 31 + 1{,}5 * 10$$

$$\min = 21 \qquad max = 44$$





Età	Numerosità
21	3
22	2
24	2
34	1

21,21,21,22, 22,24,24,34

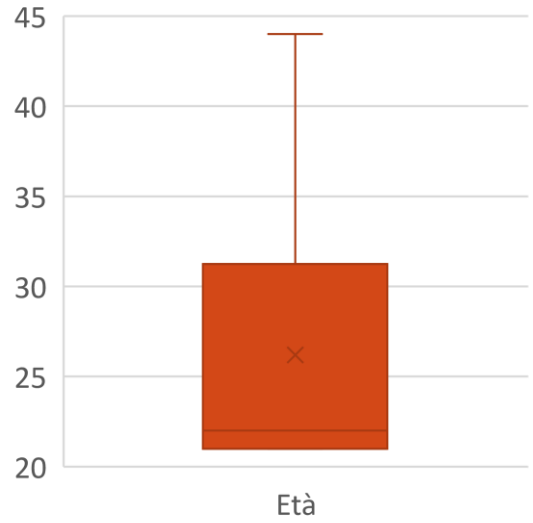
$$Me = \frac{x_{(4)}+x_{(5)}}{2} = \frac{22+22}{2} = 22$$

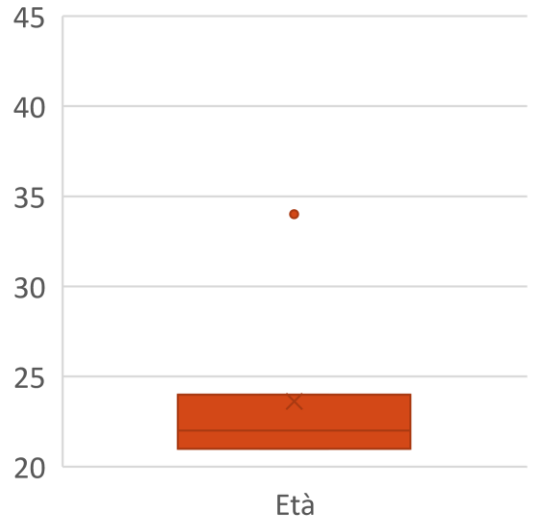
$Q_1 = \frac{x_{(2)}+x_{(3)}}{2} = \frac{21+21}{2} = 21$ $Q_3 = \frac{x_{(6)}+x_{(7)}}{2} = \frac{24+24}{2} = 24$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 24 - 21 = 3$$

$$Baffo\ \inf = 21 - 1{,}5 * 3 = 16{,}5 \qquad Baffo\ \sup = 24 + 1{,}5 * 3 = 28{,}5$$

$$\min = 21 \qquad max = 34$$





Riepilogo

Misure	Definizione	Interpretazione
Centro		
Media	$\bar{y} = \Sigma y_i / n$	Centro di gravità
Mediana	Osservazione centrale del campione ordinato	50-esimo percentile, divide il campione in due parti uguali
Moda	Valore osservato più di frequente	Valore più probabile, valida per tutti i tipi di variabili
Variabilità		
Deviazione standard	$s = \sqrt{\Sigma(y_i - \bar{y})^2/(n-1)}$	Regola empirica: se campanulare, 68% entro s da y (bar), 95% entro $2s$ da $\bar{y}$
Campo di variazione	Differenza fra l'osservazione più piccola e l'osservazione più grande	Quanto più è grande maggiore è la variabilità
Scarto interquartile	Differenza fra il terzo quartile (75-esimo percentile) e il primo quartile (25-esimo percentile)	Comprende la metà centrale delle osservazioni