

# INTEGRALE SUI CAMMINI [S.14, M.9]

La formula di riduzione di LST ci dice come ottenere gli elementi di matrice  $S$   $S_{i \rightarrow f} = \langle f | i \rangle_{in}$  a partire da funzioni di Green  $\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle$ .

Queste possono essere calcolate nel formalismo di seconda quantizzazione, per esempio in teoria delle perturbazioni:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle = \frac{\langle 0 | T \{ \phi_{\frac{1}{2}}(x_1) \dots \phi_{\frac{1}{2}}(x_n) \exp[-i \int d^4x H_I(x)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int d^4x H_I(x)] \} | 0 \rangle}$$

e calcolando diagrammi di Feynman usando il **teorema di Wick**.  
 $\Rightarrow$  Argomenti di QFT 1.

Un modo ALTERNATIVO di quantizzare la teoria è chiamato **formalismo dell'integrale sui cammini**.

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}}$$

- $\int \mathcal{D}\phi$  indica l'integrale su tutte le CONFIGURAZIONI DI CAMPO CLASSICHE  $\phi(x)$ .
- $S[\phi]$  è l'azione classica valutata sulla configurazione  $\phi$ .

# INTEGRALI GAUSSIANI

Calcoliamo 
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\frac{1}{2}ap^2 + Jp}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(-\frac{1}{2}a\left(p - \frac{J}{a}\right) + \frac{J^2}{2a}\right)$$

← completiamo il quadrato

$$= e^{\frac{J^2}{2a}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(-\frac{1}{2}ap^2\right)$$

← trasliamo  $p \rightarrow p + \frac{J}{a}$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{J^2}{2a}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(-\frac{1}{2}p^2\right)$$

←  $\left[ p \rightarrow \frac{p}{\sqrt{a}}, dp \rightarrow \frac{dp}{\sqrt{a}} \right]$

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(-\frac{1}{2}p^2\right) \right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = \\ &= \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\frac{1}{2}r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} r dr e^{-\frac{1}{2}r^2} = \pi \int_0^{\infty} dr^2 e^{-\frac{1}{2}r^2} = 2\pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\frac{1}{2}ap^2 + Jp} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{J^2}{2a}}$$

Per più dimensioni e  $p$  complessi:  $ap^2 \rightarrow p_i a_{ij} p_j = \vec{p}^T A \vec{p}$   
 dove  $A$  è una matrice simmetrica

Diagonalizzando  $A = R \lambda R^{-1}$  e definendo  $\vec{p} \rightarrow R \vec{p}'$  det  $R = 1$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{p} \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{p}^T A \vec{p} + \vec{J}^T \cdot \vec{p}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{p}' \exp\left(-\frac{1}{2}\underbrace{\vec{p}'^T}_{= p_i^2} \lambda \vec{p}' + \underbrace{(\vec{J}^T R)}_{= J_i p_i} \vec{p}'\right)$$

diventa un prodotto di integrali 1D:

$$I = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} \exp\left(\frac{1}{2} \vec{J}^T A^{-1} \vec{J}\right), \quad n \text{ è la dimensione di } \vec{p}.$$

# MECCANICA QUANTISTICA COME INTEGRALE SUL CAMMINO

Consideriamo un sistema quantistico in 1D, non relativistico, con Hamiltoniana  $\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}, t)$ .  $\hat{H}, \hat{p}, \hat{x}$ : operatori

Se lo stato iniziale  $|i\rangle$  è localizzato a  $x_i$  al tempo  $t_i$  e lo "finale"  $|f\rangle$  " " a  $x_f$  " "  $t_f$

Se  $\hat{H}(\hat{x}, t) = \hat{H}(\hat{x})$  (t-indipendente)  $|i(t_i)\rangle = |x_i\rangle$   
 $|f(t_f)\rangle = |x_f\rangle$

Lo stato  $|i\rangle \equiv |x_i, t_i\rangle$  evolve in

$$U(t_f, t_i) |i\rangle = e^{-i(t_f - t_i)\hat{H}} |i\rangle$$

L'ampiezza di transizione sarà data da:

$$\langle f|i\rangle = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f, t_f | e^{-i(t_f - t_i)\hat{H}} |x_i, t_f\rangle \quad [\text{Sakurai, 2.2.47}]$$

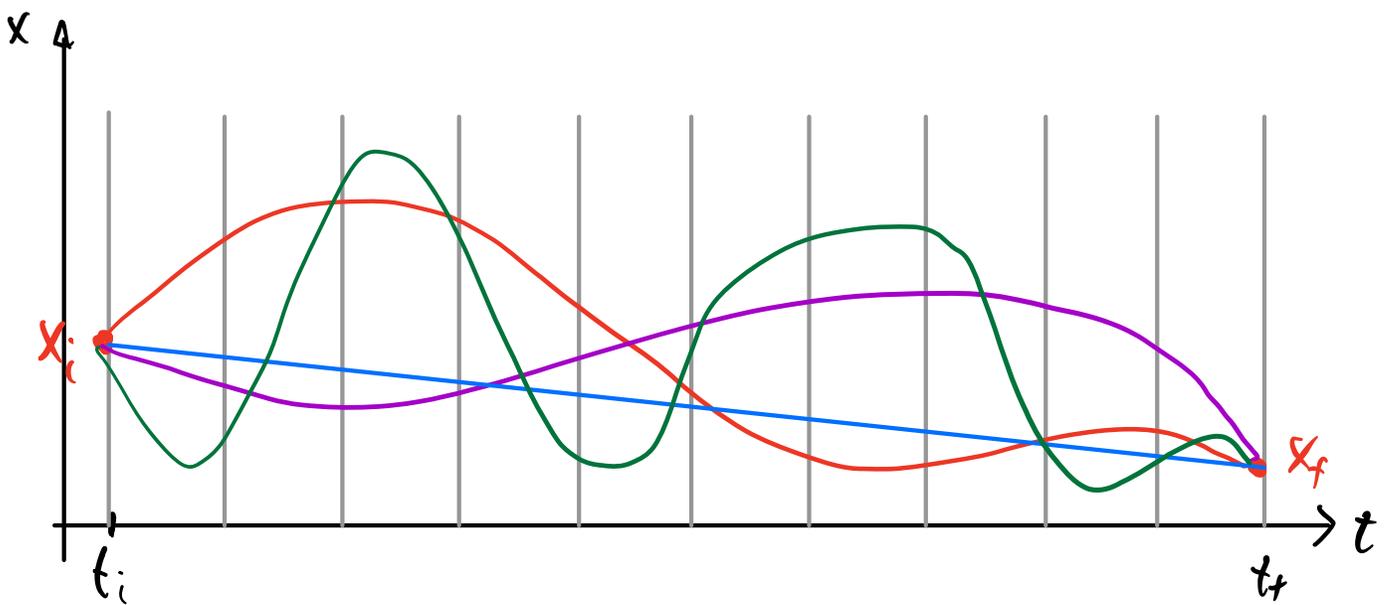
↳ Calcolabile se conosciamo una base di autostati di  $\hat{H}$ .

• Se  $\hat{H}(x) \rightarrow \hat{H}(x, t)$  | | |

Se  $\hat{H}$  dipende in maniera continua da  $t$  possiamo fare la stessa cosa ma per intervalli di tempo infinitesimi  $dt$ .

Dividiamo  $t_f - t_i$  in  $(n+1)$  intervalli  $dt$ :  $t_j = t_i + jdt$ ,  $t_{n+1} = t_f$

$$\langle f|i\rangle = \int dx_n \dots dx_1 \langle x_f | e^{-iH(t_f)dt} |x_n\rangle \langle x_n | \dots |x_2\rangle \langle x_2 | e^{-iH(t_2)dt} |x_1\rangle \langle x_1 | e^{-iH(t_i)dt} |x_i\rangle$$



Per ogni intervallo  $\Delta t$ :

Assumiamo  $V$  non dipende da  $p$

$$\langle x_{j+1} | e^{-iH \Delta t} | x_j \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \langle x_{j+1} | p \rangle \langle p | e^{-i\left(\frac{p^2}{2m} + V(\hat{x}, t_j)\right) \Delta t} | x_j \rangle =$$

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}$$

usiamo:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Baker-Campbell-Hausdorff} \\ e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\Delta t} e^{-i\hat{V}\Delta t} = e^{-i\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)\Delta t} - \frac{1}{2} [\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{V}] \Delta t^2 + \dots \approx e^{-i\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)\Delta t} + O(\Delta t^2) \end{array} \right.$

$$= e^{-iV(x_j, t_j) \Delta t} \int \frac{dp}{2\pi} e^{-i\frac{p^2}{2m} \Delta t + ip(x_{j+1} - x_j)}$$

usiamo (integrale Gaussiano)

$$= N e^{-iV(x_j, t_j) \Delta t} e^{i\frac{m}{2} \Delta t \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{(\Delta t)^2}} = N e^{iL(x_j, \dot{x}_j) \Delta t}$$

Normalizzazione

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x, t) \leftarrow \text{Lagrangiana}$$

L'integrale Gaussiano ha effettuato una trasformazione di Legendre da  $H$  a  $L$ .

$$\Rightarrow \langle f|i \rangle = N^n \int dx_n \dots dx_1 \exp\left(i \sum_j \delta t L(x_j, \dot{x}_j)\right) \quad \approx \text{ tutto classico nel r.b.s.}$$

Nel limite  $\delta t \rightarrow 0$  si ha

$$\langle f|i \rangle = N \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x(t) e^{iS[x]}$$

•  $\int \mathcal{D}x(t)$  indica la somma su tutti i cammini con le corrette condizioni al contorno

•  $S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(x(t), \dot{x}(t))$  è l'azione calcolata su ciascun cammino

## LIMITE CLASSICO

Dobbiamo reintrodurre  $\hbar$ . Dato che  $[t\hbar] = \text{azione}$

$$\langle f|i \rangle = N \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x(t) e^{iS[x]/\hbar}$$

Nel limite  $\hbar \rightarrow 0$  possiamo usare il **PRINCIPIO DI FASE STAZIONARIA** (method of stationary phase or steepest descent method) per il quale l'integrale è completamente dominato dalla **CONFIGURAZIONE CHE MINIMIZZA L'AZIONE** (tutte le altre oscillano infinitamente più veloci e si integrano a zero)

$$\frac{\delta S}{\delta x} = 0 \quad \leftarrow \text{equazioni del moto classiche}$$

In più dimensioni:  $\vec{x} = \{x_i\}$

$$\langle f|i \rangle = \langle \vec{x}_f, t_f | \vec{x}_i, t_i \rangle = N \int_{\vec{x}(t_i)=\vec{x}_i}^{\vec{x}(t_f)=\vec{x}_f} \prod_{\vec{x}} [D] x_i(t) e^{iS[\vec{x}]/\hbar}$$



Possiamo anche calcolare l'elemento di matrice di un <sup>[Eq. 9.27]</sup> operatore:

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | \hat{O}(t) | x_i, t_i \rangle &= \langle x_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t)} \hat{O} e^{-iH(t-t_i)} | x_i \rangle \\ &= \int dx' dx'' \langle x_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t)} | x' \rangle \langle x' | \hat{O} | x'' \rangle \langle x'' | e^{-iH(t-t_i)} | x_i \rangle \\ &= \int dx' dx'' \int_{x_i}^{x_f} D(x) e^{iS[x]} \langle x' | \hat{O} | x'' \rangle \int_{x_i}^{x''} D(x') e^{iS[x']} \end{aligned}$$

Assuming  $\langle x' | \hat{O} | x'' \rangle = \hat{O}(x') \delta(x' - x'')$  ✓ OPERATORE LOCALE.

$$= \int_{x_i}^{x_f} D(x) e^{iS[x]} \hat{O}(x(t))$$



# COME APPARE IL T-PRODOTTO

$$\int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x \quad e^{iS[x]} \mathcal{G}(x(t_1)) \mathcal{G}'(x(t_2)) =$$

$$\int dx' \quad |x'_f\rangle \langle x'_f| \mathcal{O}(x'(t_1)) = \int dx' dx'' \quad |x''\rangle \langle x''| \hat{\mathcal{O}}(x'_f) |x'_f\rangle \langle x'_f|$$

$$= \int_{\substack{dx'_f dx''_f \\ dx'_t dx''_t}} \left[ \langle x_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t_2)} |x'_t\rangle \langle x'_t | \hat{\mathcal{O}}' |x''_t\rangle \langle x''_t | e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)} |x'_t\rangle \right. \\ \times \langle x'_t | \hat{\mathcal{G}} |x''_t\rangle \langle x''_t | e^{-i\hat{H}(t_f-t_1)} |x_i\rangle \mathcal{G}(t_2-t_1) + \\ \left. + \langle x_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t_1)} |x'_t\rangle \langle x'_t | \hat{\mathcal{O}}' |x''_t\rangle \langle x''_t | e^{-i\hat{H}(t_1-t_2)} |x'_t\rangle \right. \\ \left. \times \langle x'_t | \hat{\mathcal{G}} |x''_t\rangle \langle x''_t | e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)} |x_i\rangle \mathcal{G}(t_1-t_2) \right] =$$

$$= \langle x_f | \hat{\mathcal{G}}'(t_2) \hat{\mathcal{G}}(t_1) |x_i\rangle \mathcal{G}(t_2-t_1) +$$

$$+ \langle x_f | \hat{\mathcal{G}}(t_1) \hat{\mathcal{G}}'(t_2) |x_i\rangle \mathcal{G}(t_1-t_2) =$$

$$= \langle x_f | T\{\hat{\mathcal{G}}(t_1) \hat{\mathcal{G}}'(t_2)\} |x_i\rangle$$

# INTEGRALE SUI CAMMINI IN QFT PER CAMPI SCALARI [M.1.2]

Generalizziamo l'espressione per  $d$  dimensioni alla teoria dei campi

QM in $d$ -dim	$\longrightarrow$	QFT
indice $j$	$\longrightarrow$	coordinata $\vec{x}$
$x_j(t)$	$\longrightarrow$	$\varphi(\vec{x}, t)$
Lagrangiana $L$	$\longrightarrow$	$\int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$
$\prod_j dx_j$	$\longrightarrow$	$\mathcal{D}\varphi(\vec{x}) \equiv \mathcal{D}\varphi$

Quindi:

$$\langle \varphi_f(\vec{x}), t_f | \varphi_i(\vec{x}), t_i \rangle = N \int_{\varphi(\vec{x}, t_i) = \varphi_i(\vec{x})}^{\varphi(\vec{x}, t_f) = \varphi_f(\vec{x})} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \right\}$$

↑  
CAMPI CLASSICI

Scegliamo come  $\varphi_i(\vec{x}) = \varphi_f(\vec{x}) = 0$  e  $t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow +\infty$

$$\langle 0 | 0 \rangle_{in} = \langle 0 | 0 \rangle = N \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]}$$

Dato che  $\langle 0 | 0 \rangle \equiv 1 \Rightarrow N = \left( \int \mathcal{D}\varphi e^{iS} \right)^{-1}$

La normalizzazione  $N$  dipende solo dalla misura e l'azione, non da cosa metto nell'integrale.



# PRO E CONTRO DELL'INTEGRACE SUI CAMMINI

## VANTAGGI:

- Formulazione di QFT esplicitamente Lorentz-covariante
- Non devo introdurre l'Hamiltoniana, il che permette di ottenere la quantizzazione di teorie di gauge in maniera chiara.
- Effetti delle simmetrie di una teoria di campo sono più evidenti.
- Utile per studiare effetti non-perturbativi:
  - QCD sul lattice
  - Istantoni, solitoni
  - Tunneling

## SVANTAGGI:

- L'unitarietà della matrice  $S$  è meno evidente che nel formalismo di seconda quantizzazione
- Meno utile per problemi non-relativistici.

# FUNZIONALE

# GENERATORE

[S.14.3]

Consideriamo

$$Z[\mathcal{J}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \langle 0|T\{\hat{\varphi}(x_1)\dots\hat{\varphi}(x_n)\}|0\rangle \mathcal{J}(x_1)\dots\mathcal{J}(x_n)$$

$$\equiv \langle 0|T\{\exp\left(i \int d^4x \hat{\varphi}(x) \mathcal{J}(x)\right)|0\rangle$$

FUNZIONALI GEN.  
DELLE FUNZIONI DI GREEN

Le  $\mathcal{J}$  sono funzioni di prova, non operatori.

Da  $Z[\mathcal{J}]$  posso estrarre una funzione di Green a  $n$ -punti prendendo  $n$  DERIVATE FUNZIONALI

$$\langle 0|T\{\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\}|0\rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x_1)\dots\delta \mathcal{J}(x_n)} \Big|_{\mathcal{J}(x)=0}$$

DERIVATE FUNZIONALI:

$$\frac{\delta F[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x)} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[\mathcal{J}(x) + \varepsilon \delta(\cdot - x)] - F[\mathcal{J}]}{\varepsilon}$$

esempio  $F[\mathcal{J}] = \int dy f(y) \mathcal{J}(y) \rightarrow \frac{\delta F[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x)} = f(x)$

esempio:  $F[\mathcal{J}] = \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) \mathcal{J}(y)$

$$\frac{\delta F}{\delta \mathcal{J}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int dy f(y) (\mathcal{J}(y) + \varepsilon \delta(y-x)) - \int dy f(y) \mathcal{J}(y)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon f(x)}{\varepsilon} = f(x)$$

es:  $F[\mathcal{J}] = e^{\int (A + \varphi \mathcal{J}) dy}$

$$\frac{\delta F}{\delta \mathcal{J}(x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\int (A + \varphi \mathcal{J}) dy} (1 + \varepsilon \varphi(x)) - e^{\int (A + \varphi \mathcal{J}) dy}}{\varepsilon} = \varphi(x) e^{\int (A + \varphi \mathcal{J}) dy}$$

Dall'espressione di  $\langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \} | 0 \rangle$  con il path integral possiamo ugualmente avere:

$$Z[\bar{J}] = \langle 0 | T \left\{ e^{i \int d^4x \varphi(x) \bar{J}(x)} \right\} | 0 \rangle = N \int \mathcal{D}\varphi e^{i S[\varphi] + i \int d^4x \varphi(x) \bar{J}(x)}$$

$\uparrow$   
 funzioni, quindi  
 commutano

$$Z[0] = N \int \mathcal{D}\varphi e^{i S[\varphi]}$$

In fatti abbiamo

$$\frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[\bar{J}]}{\delta \bar{J}(x_1) \dots \delta \bar{J}(x_n)} = N \int \mathcal{D}\varphi e^{i S[\varphi] + i \int d^4x \varphi(x) \bar{J}(x)} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)$$

Da cui

$$\frac{1}{Z[0]} \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[\bar{J}]}{\delta \bar{J}(x_1) \dots \delta \bar{J}(x_n)} \Big|_{\bar{J}(x)=0} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi e^{i S[\varphi]} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{i S[\varphi]}} = \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \} | 0 \rangle$$

$Z[\bar{J}]$  è l'analogo della funzione di partizione in meccanica statistica e contiene in se tutta la dinamica del sistema.

# RISOLVIAMO LA TEORIA LIBERA

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2) \varphi$$

$$Z_0[\bar{J}] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2) \varphi + \bar{J}(x) \varphi(x) \right) \right\}$$

Questo integrale non è ben definito in quanto è divergente. Per renderlo convergente possiamo aggiungere una componente immaginaria alla massa (del segno corretto!)

$$Z_0[\bar{J}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2) \varphi + \bar{J}(x) \varphi(x) \right) \right\} \exp \left( -\frac{\varepsilon}{2} \int d^4x \varphi^2 \right)$$

$$= \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2 - i\varepsilon) \varphi + \bar{J}(x) \varphi(x) \right) \right\}$$

Possiamo risolverlo come l'integrale Gaussiano completando il quadrato

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p} \exp \left( -\frac{1}{2} \vec{p}^T A \vec{p} + \vec{J}^T \vec{p} \right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} \exp \left( \frac{1}{2} \vec{J}^T A^{-1} \vec{J} \right), \quad A = i(\square + m^2 - i\varepsilon)$$

$$A^{-1} \text{ è l'inverso : } (\square_x + m^2 - i\varepsilon) \Pi(x-y) = -\delta(x-y)$$

$$\text{con } \Pi(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{ip(x-y)}$$

$$\Rightarrow Z_0[\bar{J}] = N \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \frac{1}{2} \bar{J}(x) \Pi(x-y) \bar{J}(y) \right\}$$

$$\Rightarrow \langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi(y) \} | 0 \rangle = (-i)^2 \frac{1}{Z_0[0]} \frac{\delta^2 Z[\bar{J}]}{\delta \bar{J}(x) \delta \bar{J}(y)} \Big|_{\bar{J}=0} = i \tilde{\Pi}(x-y)$$

$$\equiv D_F(x-y) = \overset{x}{\bullet} \text{---} \overset{y}{\bullet}$$

Propagatore di Feynman

# Calcoliamo la FUNZIONE DI GREEN A 4 PUNTI

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}|0\rangle = (-i)^4 \frac{1}{Z_0[0]} \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_4)} \Big|_{J=0} =$$

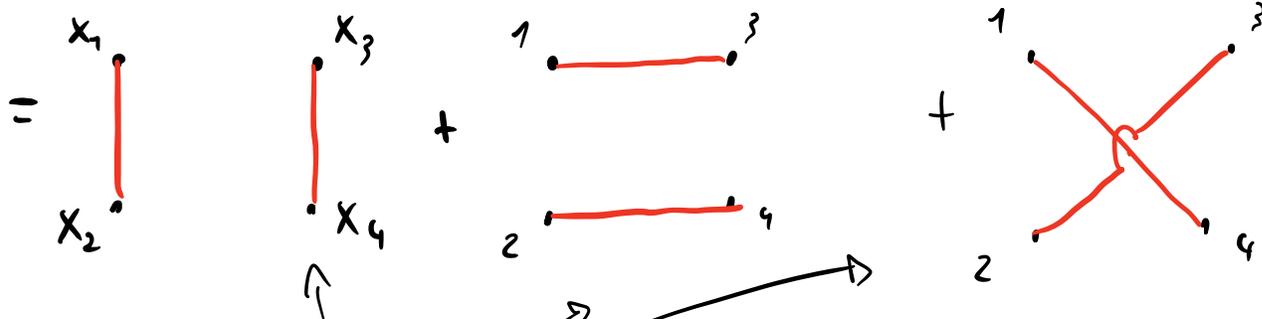
$$= \frac{1}{Z_0[0]} \frac{J^4}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_4)} N e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y)} \Big|_{J=0} =$$

$$= \frac{J^3}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3} (-D_{42} J_2) e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y} \Big|_{J=0} \leftarrow \text{Notazione semplificata}$$

$$= \frac{J^2}{\delta J_1 \delta J_2} (-D_{43} + D_{42} J_2 D_{3w} J_w) e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y} \Big|_{J=0}$$

$$= \frac{J}{\delta J_1} (D_{43} D_{27} J_2 + D_{42} D_{3w} J_w + D_{42} J_2 D_{32} - D_{42} J_2 D_{3w} J_w D_{2r} J_r) e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y} \Big|_{J=0}$$

$$= D_{34} D_{12} + D_{24} D_{13} + D_{14} D_{23}$$



Tutti sconnessi

**NOTA**: Nella teoria libera, funzioni di Green di un n.f. dispari di campi sono NULLE:

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\dots\phi_{2n+1}\}|0\rangle = 0$$

# INTERAZIONI

[5.14.3.3]

Prendiamo  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_r \varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 + \frac{g}{3!} \varphi^3$

ASSUMENDO DI  
AVER REGOLARIZZATO  
L' DIVERGENZE

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \varphi (-\square - m^2) \varphi + \bar{J} \varphi + \frac{g}{3!} \varphi^3 \right]}$$

$$= \int \mathcal{D}\varphi e^{i \langle \frac{1}{2} \varphi_x (-\square - m^2) \varphi_x + \bar{J}_x \varphi_x \rangle} e^{i \langle \frac{g}{3!} \varphi_x^3 \rangle} = \text{ESPANSIONE PERTURBATIVA}$$

$$= \int \mathcal{D}\varphi e^{i \langle \frac{1}{2} \varphi_x (-\square - m^2) \varphi_x + \bar{J}_x \varphi_x \rangle} \left[ 1 + i \frac{g}{3!} \langle \varphi_x^3 \rangle - \frac{1}{2} \left( \frac{g}{3!} \right)^2 \langle \varphi_x^3 \rangle \langle \varphi_x^3 \rangle + \dots \right]$$

$$= Z_0[J] + i \frac{g}{3!} \int d^4z (-i)^3 \frac{\int^3 Z_0[J]}{(\int \bar{J}(z))^3} - \frac{1}{2} \left( \frac{g}{3!} \right)^2 \int d^4z d^4w \frac{\int^6 Z_0[J]}{\int \bar{J}(z)^3 \int \bar{J}(w)^3} + \dots$$

$$= \exp \left[ i \frac{g}{3!} \int d^4z (-i)^3 \frac{\int^3}{\int \bar{J}(z)^3} \right] Z_0[J]$$

FUNZ. GEN. DELLA TEORIA LIBERA

$\varphi_0(x)$ : campo libero

$Z_0[J] = N e^{-\frac{1}{2} \langle \bar{J}_x D_{xx} J_0 \rangle}$

Calcoliamo la **FUNZIONE A 2 PUNTI**

$$\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \} | 0 \rangle = \frac{1}{Z[0]} (-i)^2 \frac{\int^2 Z[J]}{\int \bar{J}(x_1) \int \bar{J}(x_2)} \Big|_{J=0} =$$

$$= \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_0(x_1) \hat{\varphi}_0(x_2) e^{i \int d^4z \frac{g}{3!} \hat{\varphi}_0(z)^3} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ e^{i \int d^4z \frac{g}{3!} \hat{\varphi}_0(z)^3} \} | 0 \rangle}$$

Dove:

$$Z[0] = \int \mathcal{D}\varphi e^{i S_0[\varphi]} e^{i \langle \frac{g}{3!} \varphi^3 \rangle} = Z_0[0] \langle 0 | T \{ e^{i \frac{g}{3!} \int d^4z \varphi_0^3(z)} \} | 0 \rangle$$

Vediamo il denominatore:

$$\langle 0 | T \{ e^{i \int d^4z \frac{g}{3!} \hat{\phi}(z)^3} \} | 0 \rangle =$$

← nella teoria libera

$$= \langle 0 | 0 \rangle + i \frac{g}{3!} \langle \hat{\phi}_z^3 \rangle - \frac{1}{2} \left( \frac{g}{3!} \right)^2 \langle \hat{\phi}_z^3 \hat{\phi}_w^3 \rangle + \dots =$$

"1"                      "0"      N. dispari di campi liberi

$$= 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{g}{3!} \right)^2 \int d^4z d^4w \langle 0 | T \{ \hat{\phi}_0(z)^3 \hat{\phi}_0(w)^3 \} | 0 \rangle + \dots$$

$$\hookrightarrow (i)^6 \frac{1}{z_0[0]} \frac{\delta^6 z_0[S]}{\delta S(z)^3 \delta S(w)^3} \Big|_{S=0}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{g}{3!} \right)^2 g D_{zz} D_{zw} D_{ww} - \frac{1}{2} \left( \frac{g}{3!} \right)^2 6 (D_{wz})^3 + \dots$$

$$= 1 + g^2 \# \text{diagramma 1} + g^2 \# \text{diagramma 2} + g^6 \# \left( \text{diagramma 3} + \text{permutazioni} \right) + \dots$$

Questi sono diagrammi senza gambe esterne:

DIAGRAMMI VUOTO-VUOTO

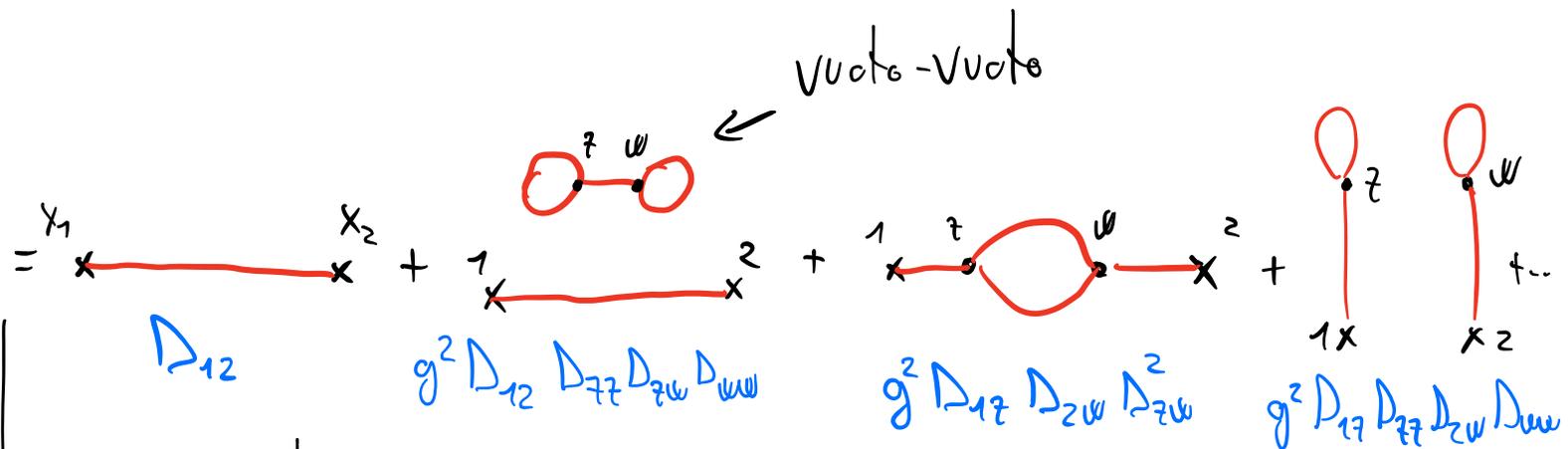
NOTA

Nella teoria libera  $\langle 0 | T \{ \phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_{2n}) \} | 0 \rangle$  corrisponde

a un prodotto di  $n$  propagatori:  $D_{x_1 x_2} \dots D_{x_{2n-1} x_{2n}} + \text{perm.}$

Vediamo il numeratore:

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | T \{ \hat{\phi}_0(x_1) \hat{\phi}_0(x_2) e^{i \int d^4z \frac{g}{3!} \hat{\phi}_0^3(z)} \} | 0 \rangle = \\
 & = \langle 0 | T \{ \hat{\phi}_0(x_1) \hat{\phi}_0(x_2) \} | 0 \rangle + i \frac{g}{3!} \int d^4z \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle - \frac{1}{2} \frac{g}{3!} \int d^4z d^4w \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_w^3 \rangle + \dots \\
 & = D_{12} \left( 1 + g^2 \# D_{z\bar{z}} D_{z\bar{w}} D_{w\bar{w}} + g^2 \# D_{z\bar{w}}^3 + \dots \right) + \\
 & + g^2 \# D_{1\bar{z}} D_{z\bar{w}} D_{z\bar{w}} D_{w\bar{2}} + g^2 \# D_{1\bar{z}} D_{z\bar{z}} D_{z\bar{w}} D_{w\bar{w}} + \dots
 \end{aligned}$$



posso raccogliere a fattore comune il contributo di tutti i diagrammi vuoto-vuoto:

$$= \left( \text{diagrammi vuoto-vuoto} + \dots \right) \underbrace{\left( 1 + \text{tadpole} + \text{bubble} + \dots \right)}_{Z[0] = Z[0] \exp(i S_{int})} | 0 \rangle$$

I diagrammi vuoto-vuoto si cancellano con  $\frac{1}{Z[0]}$ .  
 Rimangono tutti i diagrammi (anche sconnessi) non vuoto-vuoto.

# FUNZIONE A 3 PUNTI

$$\langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_3) \} | 0 \rangle = \frac{\langle 0 | T \{ \hat{\phi}_0(x_1) \hat{\phi}_0(x_2) \hat{\phi}_0(x_3) e^{i \int d^4z \frac{g}{3!} \hat{\phi}(z)^3} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ e^{i \int d^4z \frac{g}{3!} \hat{\phi}(z)^3} \} | 0 \rangle} =$$

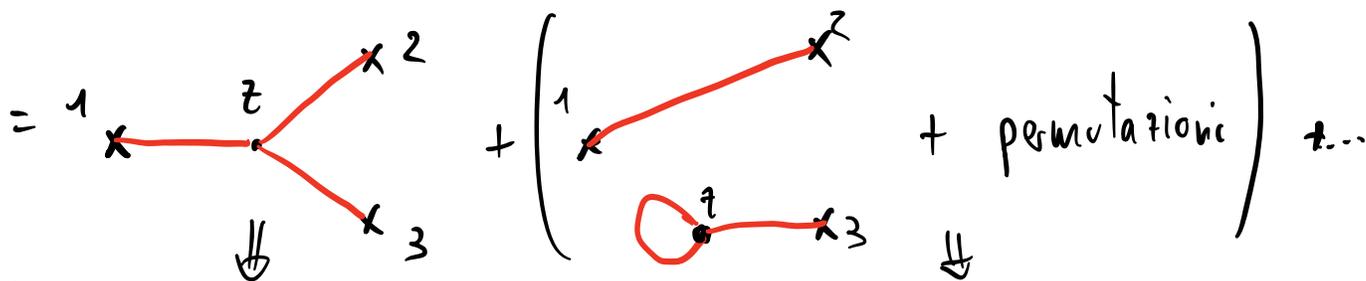
$$\langle 0 | T \{ \hat{\phi}_0(x_1) \hat{\phi}_0(x_2) \hat{\phi}_0(x_3) e^{i \int d^4z \frac{g}{3!} \hat{\phi}(z)^3} \} | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | T \{ \cancel{\phi_1^0 \phi_2^0 \phi_3^0} \} | 0 \rangle + i \int d^4z g \langle 0 | T \{ \phi_1^0 \phi_2^0 \phi_3^0 \phi_z^0 \phi_z^0 \phi_z^0 \} | 0 \rangle + O(g^2)$$

$\phi_1^0 \phi_2^0 \phi_3^0$   
" 0"     $N=3$   
          dispari

$$= ig \int d^4z D_{1z} D_{2z} D_{3z} + ig \int d^4z (D_{1z} D_{3z} D_{zz} + \text{permutazioni}) + O(g^2)$$

↑ esercizio: derivare



UNICO **DIAGRAMMA CONNESSO**

DISCONNESSI

A QUEST'ORDINE

FUNZIONE DI GREEN CONNESSA

$$G_{123}^c = ig \int d^4z D_{1z} D_{2z} D_{3z} + O(g^2)$$

⇓ LSZ

← esercizio: verificare.

$iM = ig$  ← REGOLA DI FEYNMAN

$$S_{if} = (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i^{\mu} - \sum_f p_f^{\mu}) iM_{if}$$

## INTERAZIONI - 2 ← non nel programma

Consideriamo la Lagrangiana  $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2) \varphi - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4$

$$Z[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2) \varphi + \mathcal{J} \varphi - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right] \right\} = \left[ \begin{array}{l} \text{assumendo di} \\ \text{regolarizzare la teoria} \\ \text{per levare le divergenze.} \end{array} \right]$$

$$= \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2) \varphi + \mathcal{J} \varphi \right] \right\} \exp \left\{ i \int d^4x \left[ -\frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2) \varphi + \mathcal{J} \varphi \right] \right\} \times \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{espansione} \\ \text{perturbativa} \end{array}$$

$$\times \left[ 1 - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4z \varphi(z)^4 + \frac{1}{2} \left( i \frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4z d^4w \varphi^2(z) \varphi^2(w) + \dots \right] =$$

$$= Z_0[\mathcal{J}] - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z (-i)^4 \frac{\delta^4 Z_0[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(z)^4} + \frac{1}{2} \left( i \frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4z d^4w (-i)^8 \frac{\delta^8 Z_0[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(z)^4 \delta \mathcal{J}(w)^4} + \dots$$

dove  $Z_0[\mathcal{J}]$  è il funzionale generatore della teoria libera

Calcoliamo  $\langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) \} | 0 \rangle$  al primo ordine in  $\lambda$ .

$$\langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) \} | 0 \rangle = (-i)^4 \frac{1}{Z_0[0]} \frac{\delta^4 Z_0[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x_1) \dots \delta \mathcal{J}(x_4)} \Big|_{\mathcal{J}=0}$$

Il termine  $Z_0[\mathcal{J}]$  ci dà il risultato della teoria libera ottenuto prima.

Il nuovo termine è:

prende a casa

$$- \frac{i\lambda}{4!} (-i)^4 (-i)^4 \frac{1}{z_0} \int d^4 z \frac{\delta^8 Z_0[\zeta]}{\delta \zeta_1 \delta \zeta_2 \delta \zeta_3 \delta \zeta_4 (\delta \zeta_z)^4} \Big|_{\zeta=0} = [ \dots ]$$

$$- \frac{i\lambda}{4!} \left[ 4! D_{1z} D_{2z} D_{3z} D_{4z} + \# (D_{1z} D_{2z} D_{zz} D_{34} + \text{perm.}) + \right. \\ \left. + (D_{34} D_{12} + D_{24} D_{13} + D_{14} D_{23}) D_{zz} D_{zz} \right] =$$

$$- \frac{i\lambda}{4!} \left[ 4! \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ z \\ / \quad \diagdown \\ 2 \quad 4 \end{array} + \# \left( \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{loop } z \\ 2 \quad 4 \end{array} + \text{perm.} \right) + \left( \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \infty \\ 2 \quad 4 \end{array} + \dots \right) \right]$$

↓
↓
↓  
 unico connesso                      sconnessi                      vuoto vuoto

REGOLA DI Feynman.

$$G_c^{(4)}(1,2,3,4) = -i\lambda \int d^4 z D_{4z} D_{2z} D_{3z} D_{1z}$$

↓ LSZ

$$iM = -i\lambda \quad \text{"elemento di matrice di scattering"}$$

Per ottenere elementi di matrice S ci interessano solo le funzioni di Green connesse

# FUNZIONALI GENERATORE DELLE FUNZIONI DI GREEN CONNESSE

Definiamo  $W[\mathcal{J}]$  da  $W[\mathcal{J}] = -i \log Z[\mathcal{J}]$

$$Z[\mathcal{J}] = e^{iW[\mathcal{J}]} = 1 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{connessi}}}{iW[\mathcal{J}]} + \frac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{connessi in 2 pezzi}}}{i^2 W[\mathcal{J}]^2} + \dots$$

la sua espansione di Taylor  $e^{\cdot}$  in termini delle funzioni di Green connesse

$$iW[\mathcal{J}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \mathcal{J}(x_1) \dots \mathcal{J}(x_n) G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{-i\delta}{\delta \mathcal{J}_1} \right) \dots \left( \frac{-i\delta}{\delta \mathcal{J}_n} \right) iW[\mathcal{J}] \Big|_{\mathcal{J}=0}$$

$$Z[0] = e^{iW[0]} \leftarrow \text{somma di diagrammi connessi vuoto-vuoto}$$

$$W[\mathcal{J}] = W[0] + W'[\mathcal{J}] \leftarrow \text{tutto il resto.}$$

$$Z[\mathcal{J}] = e^{iW[0]} e^{iW'[\mathcal{J}]} = Z[0] e^{iW'[\mathcal{J}]}$$

Per la teoria libera abbiamo  $Z_0[\mathcal{J}] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathcal{J}_x D_{xy} \mathcal{J}_y \right\}$

Per la teoria libera  $iW_0[\mathcal{J}] = -\frac{1}{2} \mathcal{J}_x D_{xy} \mathcal{J}_y + \text{const}$

$$\Rightarrow G_c^{(2)}(x, y) = D_F(x-y), \quad G_c^{(n>2)} = 0$$

Dimostriamo in generale:

$$G(x_1, \dots, x_n) = G_c(x_1, \dots, x_n) + \sum_{\text{MODI DI SCOMPORRE I PUNTI IN SOTTOINSIEMI}} G_c(\dots) G_c(\dots) \dots G_c(\dots)$$

e.g.

$$\cdot \cdot = \times + \text{---} + | | + \overline{8} \text{ } + \dots$$

$$1) G(x) = G^c(x)$$

$$2) G(x_1, x_2) = G^c(x_1, x_2) + G^c(x_1) G^c(x_2) \rightarrow G^c(x_1, x_2) = G(x_1, x_2) - G(x_1) G(x_2)$$

$$3) G(x_1, x_2, x_3) = G_{123}^c + G_1^c G_{23}^c + G_2^c G_{13}^c + G_3^c G_{12}^c + G_1^c G_2^c G_3^c$$

$$= G_{123}^c + G_1 G_2 G_3 + (G_1 G_{23} + \text{perm}) - 3 G_1 G_2 G_3$$

$$\rightarrow G_{123}^c = G_{123} - (G_1 G_{23} + \text{perm}) + 2 G_1 G_2 G_3$$

Confrontiamo con quanto si ottiene da  $Z[\xi] = e^{W[\xi]}$

$$G_{12\dots n}^c = \frac{\partial}{\partial \xi_{12\dots n}} (\ln Z) \Big|_{\xi=0} = (\ln Z)_{12\dots n} \Big|_{\xi=0}$$

NOTAZIONE:  
 $X_1 = \frac{\delta X}{\delta \xi(x_1)}$

$$1) G_1^c = (\ln Z)_1 = \frac{1}{Z} Z_1 \Big|_{\xi=0} = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta Z[\xi]}{\delta \xi(x_1)} \Big|_{\xi=0} = G_1$$

$$2) G_{12}^c = \left( \frac{Z_1}{Z} \right)_2 \Big|_{\xi=0} = \frac{Z_{12}}{Z} - \frac{Z_1 Z_2}{Z^2} \Big|_{\xi=0} = G_{12} - G_1 G_2$$

$$3) G_{123}^c = \frac{Z_{123}}{Z} - \frac{Z_{12}}{Z} \frac{Z_3}{Z} - \frac{Z_{13}}{Z} \frac{Z_2}{Z} - \frac{Z_1}{Z} \frac{Z_{23}}{Z} + 2 \frac{Z_1}{Z} \frac{Z_2}{Z} \frac{Z_3}{Z} = G_{123} - (G_1 G_{23} + \text{perm}) + 2 G_1 G_2 G_3$$

⇒ CORRETTO

# Expansione perturbativa del $Z[\mathcal{J}]$

$$\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_{int}(\varphi)$$

NOTAZIONE

$$\langle \bullet \rangle = \int d^d x \bullet(x)$$

$$Z[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^d x [\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{J}\varphi]}$$

Ricordiamo che  $-i \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(y)} e^{i \int d^d x \mathcal{J}(x)\varphi(x)} = \varphi(y) e^{i \int d^d x \mathcal{J}(x)\varphi(x)}$

È vero che in generale, per una funzione arbitraria di  $\varphi$ :

$$F(\varphi) e^{i \langle \mathcal{J}\varphi \rangle} = F\left(-i \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}\right) e^{i \langle \mathcal{J}\varphi \rangle}$$

$$Z[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\varphi e^{i \langle \mathcal{L}_{int}(-i \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}) \rangle} e^{i \langle \mathcal{L}_0 + \mathcal{J}\varphi \rangle}$$

teoria libera

$$= e^{i \langle \mathcal{L}_{int}(-i \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}) \rangle} \int \mathcal{D}\varphi e^{i \langle \mathcal{L}_0 + \mathcal{J}\varphi \rangle} = e^{i \langle \mathcal{L}_{int}(-i \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}) \rangle} Z_0[\mathcal{J}]$$

↑ indep. da  $\varphi$

$$= e^{i \langle \mathcal{L}_{int}(-i \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}) \rangle} Z_0[0] e^{-\frac{1}{2} \mathcal{J}_x \mathcal{D}_{xy} \mathcal{J}_y}$$

Espandiamo in th. delle perturbazioni  $e^{i \langle \mathcal{L}_{int} \rangle}$  attorno a 1

$$e^{i \langle \mathcal{L}_{int}(-i \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}) \rangle} \approx 1 + i \langle \mathcal{L}_{int}(-i \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}) \rangle + \dots$$

$$Z[\mathcal{J}] = Z_0[\mathcal{J}] \left\{ 1 + Z_0[\mathcal{J}]^{-1} \left[ e^{i \langle \mathcal{L}_{int}(-i \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}) \rangle} - 1 \right] Z_0[\mathcal{J}] \right\}$$

Il funzionale gen. delle funzioni di Green CONNESSE  
 mi da:

$$Z[\mathcal{J}] = Z_0[\mathcal{J}] e^{-\frac{1}{2} \mathcal{J}_x D_{xy} \mathcal{J}_y}$$

$$iW[\mathcal{J}] = \log Z[\mathcal{J}] = \text{const} - \frac{1}{2} \mathcal{J}_x D_{xy} \mathcal{J}_y + \\
 + \log \left( 1 + i Z_0[\mathcal{J}]^{-1} \langle L_I(-i \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0}) \rangle Z_0[\mathcal{J}] \right)$$

$$iW[\mathcal{J}] \simeq \text{const} - \frac{1}{2} \mathcal{J}_x D_{xy} \mathcal{J}_y + i \left( e^{-\frac{1}{2} \mathcal{J}_x D_{xy} \mathcal{J}_y} \right)^{-1} \langle L_I(-i \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0}) \rangle e^{-\frac{1}{2} \mathcal{J}_x D_{xy} \mathcal{J}_y}$$

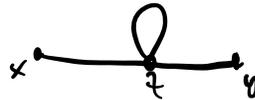
Connected Green functions are obtained by:

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{-i\delta}{\mathcal{J}_1} \right) \dots \left( \frac{-i\delta}{\mathcal{J}_n} \right) iW[\mathcal{J}] \Big|_{\mathcal{J}=0}$$

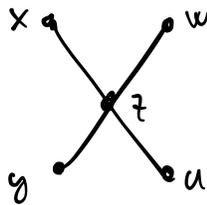
Example:  $Z_I(\varphi) = -\frac{\lambda}{4!} \varphi^4$

$$iW[\zeta] = -\frac{1}{2} \zeta_x D_{xx} \zeta_y + i \left( e^{-\frac{1}{2} \zeta_x D_{xy} \zeta_y} \right)^{-1} \int d^4z \frac{(-\lambda)}{4!} \left( \frac{\delta}{\delta \zeta(z)} \right)^4 e^{-\frac{1}{2} \zeta_x D_{xy} \zeta_y} + \dots$$

$$= -\frac{1}{2} \zeta_x D_{xy} \zeta_y - i \frac{\lambda}{4!} \left( 3 D_{zz}^2 - 6 D_{zz} D_{xz} D_{yz} \zeta_x \zeta_y + \dots \right)$$



$$+ D_{zx} D_{zy} D_{zw} D_{zu} \zeta_x \zeta_y \zeta_w \zeta_u + O(\lambda^2)$$



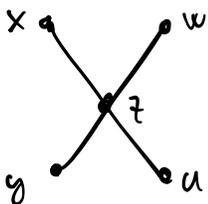
FUNZIONE A 2 PUNTI

$$G_c^{(2)}(x_1, x_2) = (-i)^2 \frac{i \delta^2 W[\zeta]}{\delta \zeta(x_1) \delta \zeta(x_2)} \Big|_{\zeta=0} = D(x_1 - x_2) - \frac{\lambda}{2} \int d^4z D_{1z} D_{2z} D_{zz} + O(\lambda^2)$$



FUNZIONE A 4 PUNTI

$$G_c^{(4)}(1, 2, 3, 4) = (-i) \frac{\delta}{\delta \zeta_1} (-i) \frac{\delta}{\delta \zeta_2} (-i) \frac{\delta}{\delta \zeta_3} (-i) \frac{\delta}{\delta \zeta_4} iW[\zeta] \Big|_{\zeta=0} = -i \frac{\lambda}{4!} 4! D_{1z} D_{2z} D_{3z} D_{4z} = -i \lambda \left( D_{1z} D_{2z} D_{3z} D_{4z} \right) + O(\lambda^2)$$



$$\Rightarrow iM = -i\lambda$$

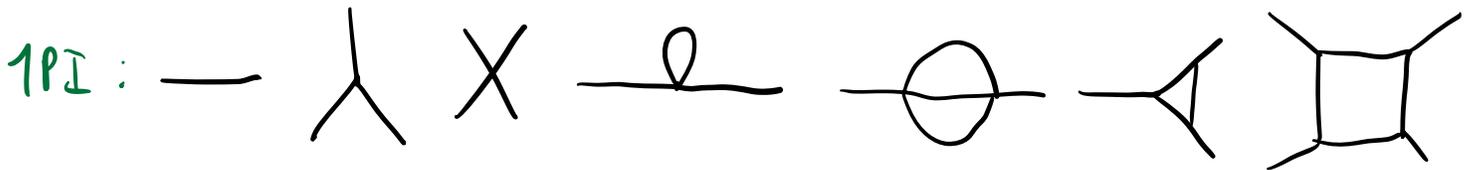
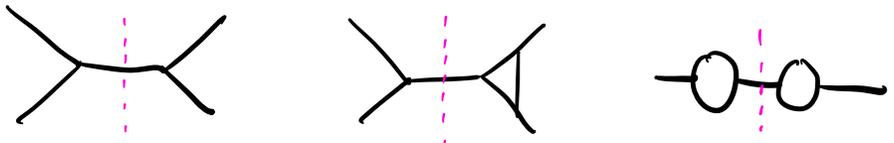
# DIAGRAMMI IRRIDUCIBILI A UNA PARTICELLA

"1-particle irreducible (1PI)"

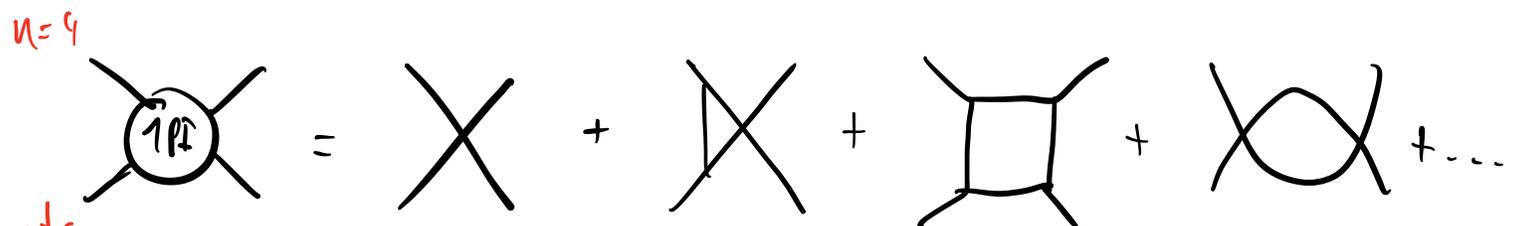
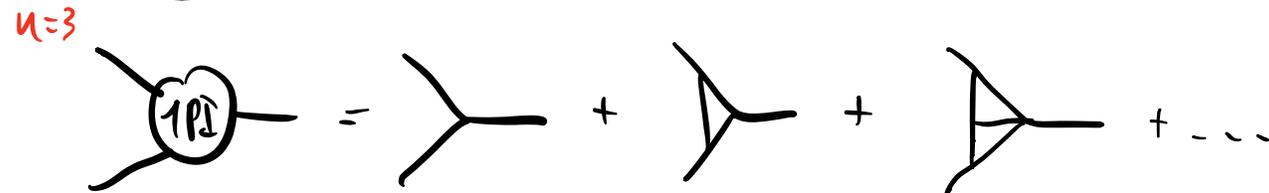
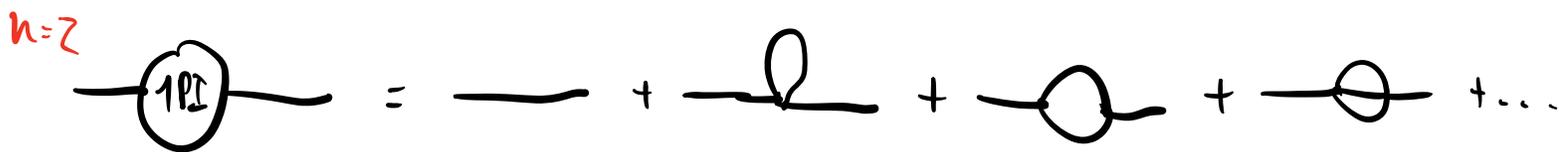
DEF: diagrammi **connessi** che non possono essere divisi in due parti sconnesse tagliando un propagatore **interno**

Esempi:

Non 1PI:



Possiamo organizzare i diagrammi 1PI in insiemi "blocchi" con un dato numero  $n$  di gambe esterne:

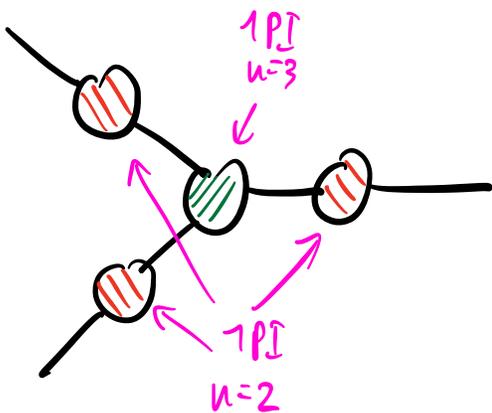


etc...

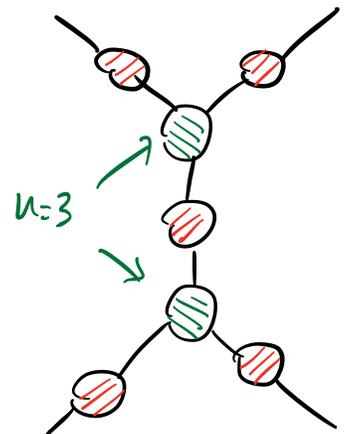
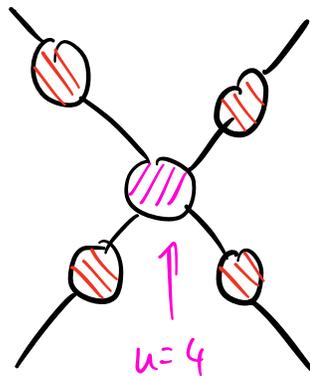
I Diagrammi 1PI del primo ordine (no loops) mi forniscono i blocchi fondamentali con i quali costruire tutti gli altri diagrammi ad ordini più alti: **REGOLE DI FEYNMAN**.

⇒ Ogni diagramma **CONNESSO** può essere costruito come un **diagramma ad albero** (ovvero senza loop chiusi) di cui **VERTICI** e **PROPAGATORI** abbiamo i **BLOCCHI 1PI** a  $n$  punti.

Funzione di Green connessa a 3 punti:



4 punti



Sarebbe molto utile avere un funzionale generatore per diagrammi 1PI.

# AZIONE EFFETTIVA [Se. 4.1, W. 16.1]

$$Z[\mathcal{J}] = \langle 0|0 \rangle_{\mathcal{J}} = \int D\phi e^{iS[\phi] + i\langle \mathcal{J}|\phi \rangle} = e^{iW[\mathcal{J}]}$$

$W[\mathcal{J}]$ : generatore delle funz. di Green connesse.

Abbiamo già visto che

$$\frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x)} = -i \frac{1}{\hbar} \frac{\delta Z}{\delta \mathcal{J}} = \langle 0|\phi(x)|0 \rangle_{\mathcal{J}} \equiv \Phi \quad \text{CAMPO CLASSICO}$$

$$\boxed{\Phi(\mathcal{J}) \equiv \frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}}}$$

Prendiamo la trasformata di Legendre di  $W[\mathcal{J}]$ :

$$\Gamma(\Phi) = W[\mathcal{J}] - \int d^4x \Phi(x) \mathcal{J}(x) \quad \leftarrow \text{AZIONE EFFETTIVA}$$

dove  $\mathcal{J}(x) = \mathcal{J}(\Phi(x))$  si ottiene invertendo  $\Phi(\mathcal{J})$

L'**AZIONE EFFETTIVA**  $\Gamma$  è il funzionale generatore dei **diagrammi 1PI**.

$$\boxed{\langle 0|T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\}|0 \rangle_{1PI} = \frac{\delta^n \Gamma(\Phi)}{\delta \Phi(x_1) \dots \delta \Phi(x_n)}}$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi(x)} = \int d^4 y \left( \underbrace{\frac{\delta W}{\delta J(y)}}_{=0} - \Phi(y) \right) \frac{\delta J(y)}{\delta \Phi(x)} - J(x) = -J(x)$$

when  $J=0$ :  $\frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi} = 0 \rightarrow$  equazione del moto di  $\Phi$  con azione  $\Gamma$ . Per questo si chiama azione effettiva: include tutte le correzioni quantistiche.

Tutte le ampiezze di scattering (a tutti gli ordini) possono essere calcolate come somma dei diagrammi connessi al LIVELLO ALBERO ottenuti da  $\Gamma(\Phi)$  invece che  $S(\varphi)$ .

### DIMOSTRAZIONI

Definiamo il funzionale generatore partendo da  $\Gamma(\varphi)$  invece che  $S(\varphi)$ :

$$e^{iW_\Gamma[J]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\lambda} (\Gamma(\varphi) + \int d^4 x \varphi(x) J(x))}$$

dove " $\lambda$ " gioca il ruolo di  $\hbar$  per contare i loop.

Il contributo a livello albero è dato dal limite  $\lambda \rightarrow 0$  (ovvero il limite classico). Dal principio di fase stazionaria:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{iW_\Gamma[J]} = \exp\left(\frac{i}{\lambda} W_\Gamma^{(0)}(J)\right) = \exp\left[\frac{i}{\lambda} \left(\Gamma(\Phi) + \int d^4 x \Phi(x) J(x)\right)\right]$$

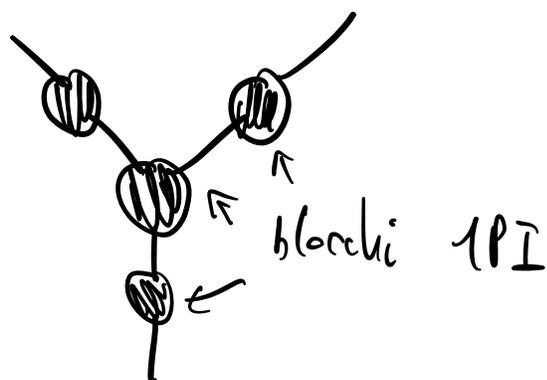
dove  $\Phi(x)$  estremizza l'azione  $\Gamma(\Phi)$ :  $\frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi} \Big|_{\varphi=\Phi} + J(x) = 0$

$$\Rightarrow W_n^{(0)}(J) = \Gamma(\Phi) + \int d^4x \Phi(x) \bar{J}(x) = W[J]$$

questa è proprio la relazione per il funzionale generatore di TUTTE le FUNZIONI DI GREEN CONNESSE calcolate con  $S(\varphi)$ .

$$iW[J] = \int \mathcal{D}\varphi \text{ e } e^{i\Gamma(\varphi) + i\langle \bar{J}\varphi \rangle}$$

diagrammi  
connessi al livello  
albero



$\Rightarrow$  Il problema è che non conosciamo  $\Gamma(\Phi)$  a tutti gli ordini

$\Gamma$  si può ottenere direttamente da  $S(\varphi)$  calcolando tutti i diagrammi 1PI:

$$e^{i\Gamma[\varphi_0]} = \int_{1PI} \mathcal{D}\varphi e^{iS(\varphi_0 + \varphi)}$$

Data una configurazione classica  $\varphi_0$ , qui integriamo su tutte le correzioni quantistiche.

Per configurazioni  $\varphi_0(x) \equiv \varphi_0$  : indep. da  $x$

$$\Gamma[\varphi_0] = -V_4 V_{\text{eff}}(\varphi_0) \leftarrow \text{POTENZIALE EFFETTIVO}$$

$\uparrow$   
volume

# REGOLE DI FEYNMAN PER VERTICI

Le regole di Feynman ci permettono di scrivere l'ampiezza  $i\mathcal{M}$  di un qualsiasi diagramma a partire da blocchi fondamentali: vertici e propagatori.

I vertici di interazione sono ottenuti dal primo ordine perturbativo dell'azione effettiva, nello spazio dei momenti:

$$\Gamma[\Phi] = S[\varphi] + \mathcal{O}(g^2)$$

Se avessi un'interazione a  $N$  punti:

$$\langle 0|T\{\varphi(k_1)\dots\varphi(k_n)\}|0\rangle_{PI} = \frac{\delta^n \Gamma[\Phi]}{\delta\Phi(k_1)\dots\delta\Phi(k_n)} = \frac{\delta^n S[\varphi]}{\delta\varphi(k_1)\dots\delta\varphi(k_n)} + \mathcal{O}(g^2)$$

↓ Fourier

$$i\langle \tilde{\varphi}(p_1)\dots\tilde{\varphi}(p_n) \rangle_{PI} = i \frac{\delta^n S[\varphi]}{\delta\tilde{\varphi}(p_1)\dots\delta\tilde{\varphi}(p_n)} + \mathcal{O}(g^2)$$

$$= (2\pi)^{-4n} (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_i p_i\right) \cdot \boxed{FR} + \mathcal{O}(g^2)$$

→ REGOLA DI FEYNMAN PER IL VERTICE

Per esempio 
$$S_I = \int d^q z \, g \, \varphi^u(z) \chi^m(z)$$

Prendiamo la trasformata di Fourier

$$\varphi(x) = \int \frac{d^q p}{(2\pi)^q} \tilde{\varphi}(p) e^{-ipx} \quad \chi(x) = \int \frac{d^q k}{(2\pi)^q} \tilde{\chi}(k) e^{-ikx}$$

$$S_I = \int d^q z \prod_{i=1}^n \int \frac{d^q p_i}{(2\pi)^q} \prod_{j=1}^m \int \frac{d^q k_j}{(2\pi)^q} e^{-i(\sum_i p_i + \sum_j k_j) \cdot z} g \prod_i \tilde{\varphi}(p_i) \prod_j \tilde{\chi}(k_j)$$

$$= \prod_{i=1}^n \int \frac{d^q p_i}{(2\pi)^q} \prod_{j=1}^m \int \frac{d^q k_j}{(2\pi)^q} (2\pi)^q \delta^q(\sum_i p_i + \sum_j k_j) g \prod_i \tilde{\varphi}(p_i) \prod_j \tilde{\chi}(k_j)$$

$$\frac{i \int S_I}{\int \tilde{\varphi}(p_1) \dots \int \tilde{\varphi}(p_n) \int \tilde{\chi}(k_1) \dots \int \tilde{\chi}(k_m)} = (2\pi)^{-q(u+m)} (2\pi)^q \delta^q(\sum_i p_i + \sum_j k_j) \boxed{i g u! m!}$$

$$= i g u! m!$$

Nel caso di interazioni derivative:

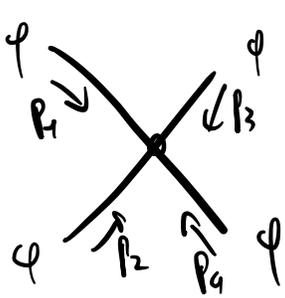
$$\partial_\mu \phi(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-i p_\mu) \tilde{\phi}(p) e^{-i p x}$$

Esempio:  $S_I = \int d^4 x g \phi^2 (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi)$

$$\begin{aligned} S_I &= \int d^4 x \int \frac{d^4 p_a}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_b}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_c}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_d}{(2\pi)^4} e^{-i(p_a + p_b + p_c + p_d)x} \tilde{\mathcal{L}}_I(p_a, p_b, p_c, p_d) \\ &= \int \frac{d^4 p_a}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_b}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_c}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_d}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b + p_c + p_d) \tilde{\mathcal{L}}_I(p_a, p_b, p_c, p_d) \end{aligned}$$

dove  $\tilde{\mathcal{L}}_I = g \tilde{\phi}(p_a) \tilde{\phi}(p_b) (-i p_c^\mu) \tilde{\phi}(p_c) (-i p_{d\mu}) \tilde{\phi}(p_d)$

REGOLA DI FEYNMAN NELLO SPAZIO DEI MOMENTI



$$= i \int \frac{\delta \phi(p_1)}{\delta \phi(p_1)} \dots \int \frac{\delta \phi(p_4)}{\delta \phi(p_4)} \tilde{\mathcal{L}}_I$$

$$= i g 2 \cdot 2 (-1) [p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4 + p_3 \cdot p_4]$$

# REGOLE DI FEYNMAN PER ELEMENTI DI MATRICE $\mathcal{M}$

$$S_{if} \equiv (2\pi)^4 \int^4 (\sum_i p_i - \sum_f p_f) i\mathcal{M}_{if}$$

[P.S. 4.4]

I Diagrammi di Feynman sono rappresentazioni grafiche di specifici contributi a funzioni di Green, quindi anche a elementi di matrice di scattering  $S$

Le regole di Feynman permettono di ottenere il contributo a  $G(x_1 \dots x_n)$  o  $S_{if}$  a partire dal diagramma senza dover derivare ogni volta

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle \xrightarrow{\text{LSZ}} S_{if}$$

## REGOLE DI FEYNMAN (per campi scalari)

- PROPAGATORE INTERNO  =  $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
- VERTICE (vedi sopra)  =  $-i\lambda$   
e.g. in  $\frac{\lambda}{4!} \phi^4$
- IMPORRE CONSERVAZIONE DEL MOMENTO AD OGNI VERTICE
- INTEGRARE PER OGNI MOMENTO INDETERMINATO (LOOP)  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$
- DIVIDERE PER IL FATTORE DI SIMMETRIA

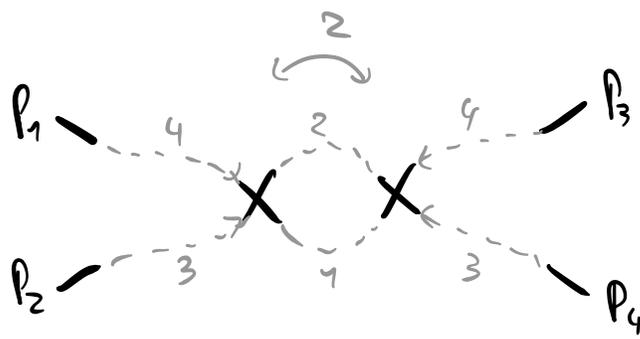
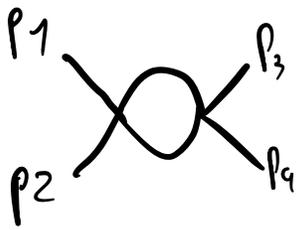
Il FATTORE DI SIMMETRIA serve per compensare il fatto che in alcuni casi il  $\frac{1}{n!}$  della serie di Taylor perturbativa ed il  $\frac{1}{4!}$  (esempio, per la  $\frac{\lambda}{4!} \phi^4$ ) non vengono completamente cancellati.

## DETERMINARE IL FATTORE DI SIMMETRIA $S$

- Disegnare i VERTICI e gambe esterne del diagramma
- Contare il nr. di modi diversi con i quali posso collegare vertici e gambe esterne per ottenere lo stesso diagramma:  $N$
- Moltiplicare  $N$  per il  $\frac{1}{n!}$  di Taylor ed il fattore  $L \sim \frac{1}{4!}$  della Lagrangiana (che non è incluso nella regola del vertice)

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{n!} \cdot L \cdot N$$

esempio  $\frac{\lambda}{4!} \phi^4$ :



$$N = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

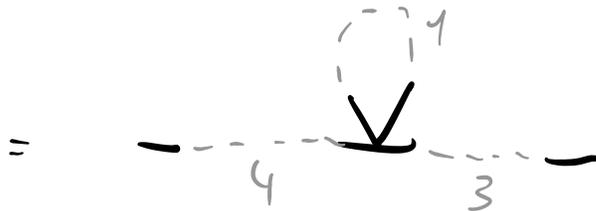
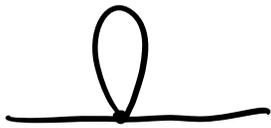
modi di collegare i due vertici fra loro (una volta che le altre linee sono collegate)

scambio tra i due vertici

modi di collegare 1 & 2 al vertice

modi di collegare 3 & 4 al vertice

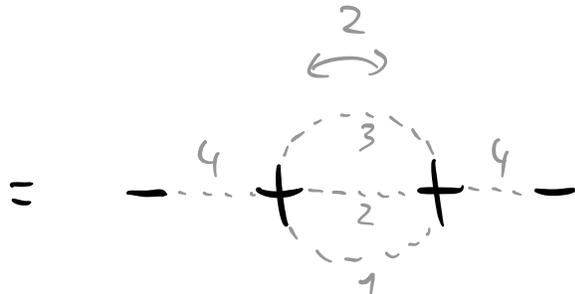
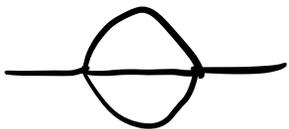
$$\frac{1}{S} = \frac{1}{2!} \frac{1}{4!} \frac{1}{4!} \cdot N = \frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{S} = \frac{1}{4!} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{S} = \frac{1}{4!} \cdot 3 = \frac{1}{8}$$



$$\frac{1}{S} = \frac{1}{2} \frac{1}{4!} \frac{1}{4!} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{1}{6}$$