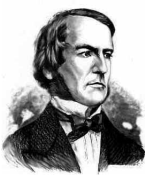
Logiche booleane (29/03/2022)

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE
Dip. Matematica e Geoscienze — DMI



George Boole
1815–1864

Sulla scorta di [Davis(1993)], dopo aver messo in luce il tipo di relazione che sussiste fra un insieme A di *premesse* e una *conclusione* α in *una* logica $\mathbb{L}$ che ci permetta di ricavare (o '*derivare*', o '*inferire*') α da A—in simboli:

$$A \vdash \alpha$$

—, mettiamo qui a fuoco quali ulteriori requisiti occorrano affinché una logica possa dirsi $\boxed{\textit{booleana}}$. Vedremo che ogni logica booleana ne contiene una minima, intimamente legata alla logica proposizionale.

Definizione

Una ***logica*** è una struttura

$$\mathbb{L} \quad = \quad (\mathcal{E}, \vdash)$$

costituita da

- un insieme $\mathcal{E} \neq \emptyset$ i cui elementi si chiamano ***enunciati*** e da
- una relazione diadica $\vdash$, chiamata ***derivabilità***, tale che
  $\mathcal{P}(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \quad \supseteq \; \vdash$

soddisfacenti le condizioni:

- L1 $\{\alpha\} \vdash \alpha$;
- L2 **(Monotonicità)** quando $A \vdash \alpha$, si ha che
  $B \vdash \alpha$ per *ogni* insieme di enunciati $B \supseteq A$;
- L3 **(Compattezza)** quando $A \vdash \alpha$, si ha che
  $F \vdash \alpha$ per *qualche* insieme $\boxed{\textit{finito}}$ F tale che $A \supseteq F$;
- L4 **(Taglio)** quando $A \vdash \alpha$ e $B \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, allora $A \cup B \vdash \beta$.

Per comodità si usa scrivere:

Per comodità si usa scrivere:

$A \nvdash \beta$ per indicare che $A \vdash \beta$ *non* è vera;

Per comodità si usa scrivere:

$A \nvdash \beta$ per indicare che $A \vdash \beta$ *non* è vera;

$A, \alpha \vdash \beta$ per indicare che $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$;

$A \nvdash \beta$	per indicare che	$A \vdash \beta$ *non* è vera;
$A, \alpha \vdash \beta$	per indicare che	$A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$;
$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$	per indicare che	$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta$.

$$A \nvdash \beta \quad \text{per indicare che} \quad A \vdash \beta \textit{ non } \text{è vera;}$$

$$A, \alpha \vdash \beta \quad \text{per indicare che} \quad A \cup \{\alpha\} \vdash \beta;$$

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta \quad \text{per indicare che} \quad \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta.$$

In quest'ultima, n è un qualsiasi numero naturale; dunque

$$\vdash \beta \text{ sta per } \emptyset \vdash \beta\ .$$

Richiamo

$$\mathcal{P} \quad = \quad \{\,\text{enunciati del linguaggio proposizionale}\,\}$$

e osserviamo che ogni funzione

$$\mathfrak{I} \quad \in \quad \{\,\mathtt{f}\,,\ \mathtt{v}\,\}^{\{\,p_1\,,\,p_2\,,\,p_3\,,\ldots\,\}}$$

ne *induce* un'altra $\alpha \mapsto \alpha^{\mathfrak{I}}$ definita per tutti gli enunciati α, in base alle tabelle dei connettivi proposizionali.

Richiamiamo

$$\mathcal{P} \;=\; \{\,\text{enunciati del linguaggio proposizionale}\,\}$$

e osserviamo che ogni funzione

$$\mathfrak{I} \;\in\; \{\,\mathtt{f}\,,\ \mathtt{v}\,\}^{\{\,\mathsf{p}_1\,,\,\mathsf{p}_2\,,\,\mathsf{p}_3\,,\ldots\,\}}$$

ne *induce* un'altra $\alpha \mapsto \alpha^{\mathfrak{I}}$ definita per tutti gli enunciati α, in base alle tabelle dei connettivi proposizionali.

la relazione $\models$ definita cosí:

$$A \models \vartheta \qquad \text{sse}$$

$$\vartheta^{\mathfrak{I}} = \mathtt{v} \quad \text{per ogni } \mathfrak{I} \text{ tale che } \{\,\alpha^{\mathfrak{I}} : \alpha \in A\,\} = \{\,\mathtt{v}\,\}$$

È UN ESEMPIO DI LOGICA QUESTO?

Richiamo

$$\mathcal{P} \;=\; \{\,\text{enunciati del linguaggio proposizionale}\,\}$$

e osserviamo che ogni funzione

$$\mathfrak{I} \;\in\; \{\,\mathtt{f}\,,\,\mathtt{v}\,\}^{\{\,\mathsf{p}_1\,,\,\mathsf{p}_2\,,\,\mathsf{p}_3\,,\ldots\,\}}$$

ne *induce* un'altra $\alpha \mapsto \alpha^{\mathfrak{I}}$ definita per tutti gli enunciati α, in base alle tabelle dei connettivi proposizionali.

Gode della compattezza la relazione $\models$ definita cosí:

$$A \models \vartheta \qquad\qquad \text{sse}$$

$$\vartheta^{\mathfrak{I}} = \mathtt{v} \quad \text{per ogni } \mathfrak{I} \text{ tale che } \{\alpha^{\mathfrak{I}} : \alpha \in A\} = \{\,\mathtt{v}\,\}$$

?

Un modo di definire le dimostraz. proposizionali

Diremo che la sequenza

$$\delta = \langle \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_h \rangle$$

è una $\boxed{\textit{dimostrazione di } \vartheta \textit{ da } A}$ quando:

1) $\delta_h = \vartheta$;
2) per ogni $i = 0, \ldots, h$, accade che δ_i sia un enunciato in $\mathcal{P}$ che o:
   - ⋆ appartiene ad A, oppure
   - ⋆ ricade in uno degli schemi d'*assioma logico*, oppure
   - ⋆ è *preceduto* da due enunciati δ_{j_0} e $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \to \delta_i)$, nel senso che $j_0 < i$ e $j_1 < i$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Eugenio G. Omodeo | Logica proposizionale – Analisi | 12/15

(La regola d'inferenza mostrata alla terza '⋆' si chiama ***Modus ponens***)

La prossima definizione vuol catturare la nozione di ‘teoria contraddittoria’

Definizione

In una logica $\mathbb{L}$:

La prossima definizione vuol catturare la nozione di 'teoria contraddittoria' (si pensi ad A come a un insieme di postulati):

Definizione

In una logica $\mathbb{L}$:

- Un insieme A di enunciati si dice ***inconsistente*** se $A \vdash \alpha$ vale per ogni enunciato α; si dice ***consistente***, se ciò non avviene.

La prossima definizione vuol catturare la nozione di 'teoria contraddittoria'

Definizione

In una logica $\mathbb{L}$:

- Un insieme A di enunciati si dice ***inconsistente*** se $A \vdash \alpha$ vale per ogni enunciato α; si dice ***consistente***, se ciò non avviene.
- $\mathbb{L}$ stessa si dice ***inconsistente*** quando in $\mathbb{L}$ è inconsistente lo $\emptyset$ (cioè, se in $\mathbb{L}$ ogni enunciato è derivabile da $\emptyset$); ***consistente***, nel caso opposto.

Definizione

Una ***logica booleana*** è una struttura

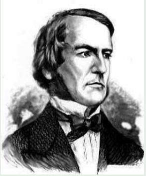
$$\mathbb{L} \;=\; (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

costituita da

- una logica $(\mathcal{E}, \vdash)$,
- un elemento f di $\mathcal{E}$,
- un'operazione diadica $\Rightarrow$ su $\mathcal{E}$

soddisfacenti le condizioni:

B1 **(Principio di deduzione)**
$A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ se e solo se $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$;



George Boole

1815–1864

DEFINIZIONE

Una ***logica booleana*** è una struttura

$$\mathbb{L} \quad = \quad (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

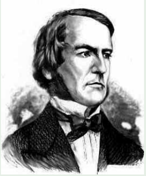
costituita da

- una logica $(\mathcal{E}, \vdash)$,
- un elemento f di $\mathcal{E}$,
- un'operazione diadica $\Rightarrow$ su $\mathcal{E}$

soddisfacenti le condizioni:

B1 **(Principio di deduzione)**
$A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ se e solo se $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$;

B2 **(Principio di doppia negazione)** $\{ (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \} \vdash \alpha$.



George Boole

1815–1864

COSA S'INTENDE PER LOGICA *booleana*?

DEFINIZIONE

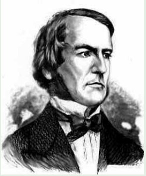
Una ***logica booleana*** è una struttura

$$\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow)$$

costituita da

- una logica $(\mathcal{E}, \vdash)$,
- un elemento f di $\mathcal{E}$,
- un'operazione diadica $\Rightarrow$ su $\mathcal{E}$

soddisfacenti le condizioni:



George Boole

1815–1864

B1 **(Principio di deduzione)**
$A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ se e solo se $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$;

B2 **(Principio di doppia negazione)** $\{ (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \} \vdash \alpha$.

L'operazione $\Rightarrow$, e il suo primo e secondo operando, si chiamano: **implicazione materiale**,

antecedente e **conseguente**.

Osservazione

Per l'*inconsistenza* di A, in una logica booleana, è sufficiente che

$$A \vdash f$$

Esercizio (Ex falso quodlibet)

Mostrare che in ogni logica booleana e per ogni enunciato α :

$$\{\, f \,\} \;\vdash\; \alpha$$

Osservazione

Per l'*inconsistenza* di A, in una logica booleana, è sufficiente che

$$A \vdash f$$

Esercizio (Ex falso quodlibet)

Mostrare che in ogni logica booleana e per ogni enunciato α :

$$\{\, f \,\} \;\vdash\; \alpha$$

Osservazione

Per l'*inconsistenza* di A, in una logica booleana, è sufficiente che

$$A \vdash f$$

Esercizio

Mostrare l'inconsistenza della logica booleana che ha $\mathcal{E} = \{f\}$

Esercizio sul modus ponens ☞ ☞

Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- $\alpha,\ \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$;
- se $A \vdash \alpha$ e $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, allora $A \vdash \beta$.

Esercizio sull'estensione consistente

Dimostrare che quando in una logica booleana *non* vale $A \vdash \beta$, allora l'insieme $A \cup \{\beta \Rightarrow f\}$ è consistente.

Esercizio (?)

Si dimostri che c'è una logica booleana consistente il cui $\mathcal{E}$ è formato di due soli elementi: $\mathtt{f}$ e $\mathtt{v}$; e che in tale logica la tabella dell'operazione $\Rightarrow$ non può essere che questa:

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$
$\mathtt{f}$	$\mathtt{f}$	$\mathtt{v}$
$\mathtt{f}$	$\mathtt{v}$	$\mathtt{v}$
$\mathtt{v}$	$\mathtt{f}$	$\mathtt{f}$
$\mathtt{v}$	$\mathtt{v}$	$\mathtt{v}$

e che $A \vdash \alpha$ varrà se e solo se α appartiene ad $A \cup \{\mathtt{v}\}$.

Osservazione: $\alpha \Rightarrow \mathtt{f}$ in un certo senso 'nega' α

D'ora in poi indicheremo con $\mathbb{P}_0$ la logica individuata sopra:

$$\mathbb{P}_0 \quad = \quad \big(\{\mathtt{f}, \mathtt{v}\}, \vdash, \mathtt{f}, \Rightarrow\big)\,.$$

Intuitivamente parlando, $\mathtt{f}$ e $\mathtt{v}$ rappresentano il *falso* e il *vero* e l'operazione $\Rightarrow$ il connettivo "se ... allora ...".

In una logica booleana un insieme consistente di enunciati è *massimale* se, ingrandendolo, lo si rende inconsistente:

Definizione

In una logica booleana un insieme consistente di enunciati è *massimale* se, ingrandendolo, lo si rende inconsistente:

Definizione

Sia $\mathbb{L}$ una logica booleana ed M un insieme di enunciati di $\mathbb{L}$.
Diremo che M è ***consistente massimale*** se:

- M è consistente;
- $M \cup \{\alpha\}$ è inconsistente per ogni enunc. α che non stia in M.

Teorema di Lindenbaum

Ogni insieme consistente di enunciati è incluso in uno massimale.

Teorema di Lindenbaum

Ogni insieme consistente di enunciati è incluso in uno massimale.

Dim. (traccia): Ci viene dato un A consistente e vogliamo trovare un $M \supseteq A$ che sia consistente massimale. Per semplicità (altrimenti converrebbe ricorrere al lemma di Zorn) supponiamo che l'intero insieme degli enunciati possa essere disposto in una successione—ove le ripetizioni sono ammesse:

$$\mathcal{E} = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\} .$$

$\longrightarrow$

$\longrightarrow$

Poniamo

$$A_0 \quad =_{\mathrm{Def}} \quad A\,;$$

$$A_{n+1} \quad =_{\mathrm{Def}} \quad \begin{cases} A_n \cup \{\alpha_n\} & \text{se quest'insieme è consistente,} \\ A_n & \text{nel caso contrario.} \end{cases}$$

Cosí, induttivamente, tutti gli A_i risultano consistenti. Da ultimo poniamo

$$M \quad =_{\mathrm{Def}} \quad A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots\,;$$

i.e., un enunciato α appartenga ad M sse α sta in qualche A_m.

$\longrightarrow$

Se M *fosse inconsistente*, avremmo $M \vdash f$ per come è definita l'inconsistenza; dunque, per il requisito di compattezza $L3$, vi sarebbero $\alpha_{n_1}, \ldots, \alpha_{n_k}$ in numero finito, ciascuno appartenente ad M e tali che

$$\alpha_{n_1}, \ldots, \alpha_{n_k} \quad \vdash \quad f \ ;$$

ma allora ciascun α_{n_i} apparterrebbe ad A_{m_i} per qualche m_i e tutti apparterrebbero ad A_m, ove $m = \max\{m_1, \ldots, m_k\}$; con ciò risulterebbe che A_m è inconsistente e otterremmo una contraddizione. Dunque M è consistente.

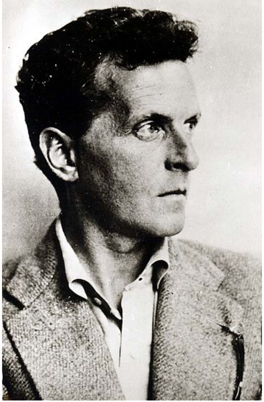
Se M *fosse inconsistente*, avremmo $M \vdash f$ per come è definita l'inconsistenza; dunque, per il requisito di compattezza $L3$, vi sarebbero $\alpha_{n_1}, \ldots, \alpha_{n_k}$ in numero finito, ciascuno appartenente ad M e tali che

$$\alpha_{n_1}, \ldots, \alpha_{n_k} \quad \vdash \quad f \ ;$$

ma allora ciascun α_{n_i} apparterrebbe ad A_{m_i} per qualche m_i e tutti apparterrebbero ad A_m, ove $m = \max\{m_1, \ldots, m_k\}$; con ciò risulterebbe che A_m è inconsistente e otterremmo una contraddizione. Dunque M è consistente.

Per verificare la *massimalità* di M, proviamo a supporre che $M \cup \{\alpha\}$ sia consistente per qualche α non appartenente ad M. Allora, individuato il primo n per cui valga $\alpha = \alpha_n$, avremmo anche la consistenza di $A_n \cup \{\alpha_n\}$. Ma allora dovrebbe valere $M \supseteq A_{n+1} = A_n \cup \{\alpha\}$ per definizione, donde la contraddizione cercata. □

"La dimostrazione nella logica è solo un mezzo meccanico per riconoscere piú facilmente la tautologia ove questa è complicata."



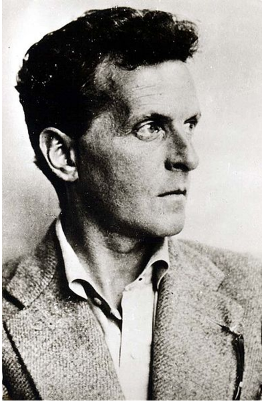
[Wittgenstein(1922), 6.1262]

Ludwig Wittgenstein

Vienna 1889–Cambridge 1951

"La dimostrazione nella logica è solo un mezzo meccanico per riconoscere piú facilmente la tautologia ove questa è complicata." *Fuorviante ?!*

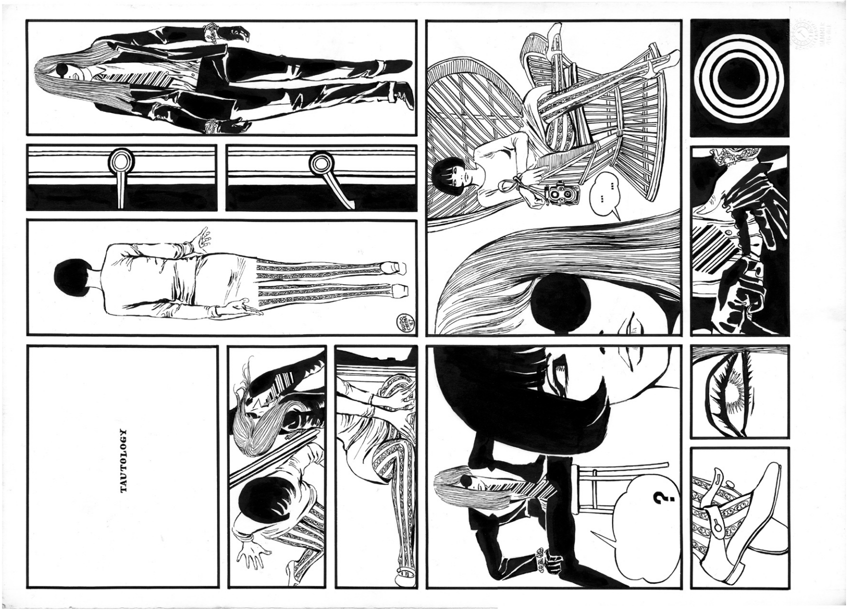
[Wittgenstein(1922), 6.1262]



Ludwig Wittgenstein

Vienna 1889–Cambridge 1951

Cosa s'intende per tautologia ?



Assieme alla logica booleana

$$\mathbb{P}_0 \quad = \quad (\{\mathtt{f}, \mathtt{v}\}, \vdash, \mathtt{f}, \Rightarrow)$$

di cui sopra, consideriamo adesso una *qualsiasi* logica booleana

$$\mathbb{L} \quad = \quad (\,\mathcal{E}\,, \vdash_{\mathbb{L}}\,, \,\mathsf{f}\,, \;\Rightarrow_{\mathcal{E}}\,)$$

Assieme alla logica booleana

$$\mathbb{P}_0 \quad = \quad (\{\mathrm{f}, \mathrm{v}\}, \vdash, \mathrm{f}, \Rightarrow)$$

di cui sopra, consideriamo adesso una *qualsiasi* logica booleana

$$\mathbb{L} \quad = \quad (\mathcal{E}, \vdash_{\mathbb{L}}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$$

Definizione

Un **assegnamento** per $\mathbb{L}$ è una funzione

$$q : \quad \mathcal{E} \quad \longrightarrow \quad \{\mathrm{f}, \mathrm{v}\}$$

tale che

$$\begin{aligned} q(f) \quad &= \quad \mathrm{f} \\ q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} \beta) \quad &= \quad (\, q(\alpha) \Rightarrow q(\beta) \,) \end{aligned}$$

per ogni coppia α, β di enunciati di $\mathbb{L}$

Dunque

$q(\alpha)$	$q(\beta)$	$q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} \beta)$
f	f	v
f	v	v
v	f	f
v	v	v

dovrà sempre valere in un assegnamento q

Dunque

$q(\alpha)$	$q(\beta)$	$q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} \beta)$	
f	f	v	
f	v	v	
v	f	f	$\checkmark$!!
v	v	v	

dovrà sempre valere in un assegnamento q

Dunque

$q(\alpha)$	$q(\beta)$	$q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} \beta)$	
f	f	v	✓
f	v	v	
v	f	f	
v	v	v	

dovrà sempre valere in un assegnamento q

Osservaz.: Questa tavola suggerisce di *abbreviare*, in ogni logica:

$$v \quad =_{\text{Def}} \quad f \Rightarrow f$$

Dunque

$q(\alpha)$	$q(\beta)$	$q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} \beta)$	
f	f	v	✓
f	v	v	
v	f	f	✓
v	v	v	

dovrà sempre valere in un assegnamento q

Osservaz.: Questa tavola suggerisce di *abbreviare*, in ogni logica:

$$
\begin{array}{rcl}
v & =_{\mathsf{Def}} & f \Rightarrow f \\
\neg\alpha & =_{\mathsf{Def}} & \alpha \Rightarrow f
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\alpha & \rightsquigarrow & \alpha \rightarrow f \\[2em]
v & \rightsquigarrow & \neg\, f \\[2em]
\alpha \vee \gamma & \rightsquigarrow & \neg\alpha \rightarrow \gamma \\
 & \rightsquigarrow & (\,\alpha \rightarrow f\,) \rightarrow \gamma \\[2em]
\alpha \mathbin{\&} \beta & \rightsquigarrow & \neg(\,\neg\alpha \vee \neg\beta\,) \\
 & \rightsquigarrow & \neg(\,\alpha \rightarrow \neg\beta\,) \\
 & \rightsquigarrow & (\,\alpha \rightarrow \beta \rightarrow f\,) \rightarrow f \\[2em]
\alpha \leftrightarrow \beta & \rightsquigarrow & \ldots\ ???\ \ldots
\end{array}
$$

Definizione

Si dice che un assegnamento

q RENDE VERO α: quando $q(\alpha) = \mathtt{v}$; e che

q INVERA A: quando q rende vero ciascuno degli enunciati in A .

Definizione

Si dice che un assegnamento

q RENDE VERO α: quando $q(\alpha) = \mathtt{v}$; e che

q INVERA A: quando q rende vero ciascuno degli enunciati in A .

Esempio

Qualsiasi q invera lo $\emptyset$

Definizione di tautologia

Definizione

Si dice che un assegnamento

q RENDE VERO α: quando $q(\alpha) = \mathtt{v}$; e che

q INVERA A: quando q rende vero ciascuno degli enunciati in A .

Esempio

Qualsiasi q invera lo $\emptyset$

Definizione

Si chiama ***tautologia*** ogni enunciato α che risulti *sempre vero*: cioè a dire, che sia reso vero da tutti gli assegnamenti.

Definizione

Si dice che un assegnamento

q RENDE VERO α: quando $q(\alpha) = \mathtt{v}$; e che

q INVERA A: quando q rende vero ciascuno degli enunciati in A .

Esempio

Qualsiasi q invera lo $\emptyset$

Definizione

Si chiama ***tautologia*** ogni enunciato α che risulti *sempre vero*: cioè a dire, che sia reso vero da tutti gli assegnamenti.

Evidenzieremo in tre proposizioni a seguire che consistenza e inveramento sono, per le logiche booleane, nozioni correlatissime.

$$(\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma$$

$$\alpha \Rightarrow \bullet \Rightarrow \alpha$$

$$\big((\alpha \Rightarrow \bullet) \Rightarrow \alpha\big) \Rightarrow \alpha$$

$$f \Rightarrow \bullet$$

N.B. Dove mancano parentesi, associare a destra :

$$(\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma$$

$$\alpha \Rightarrow \bullet \Rightarrow \alpha$$

$$\big((\alpha \Rightarrow \bullet) \Rightarrow \alpha\big) \Rightarrow \alpha$$

$$f \Rightarrow \bullet$$

È una tautologia questa ?

Esercizio

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 > x \quad \Rightarrow f$$

È una tautologia questa ?

Esercizio — Ha senso?

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 > x \quad \Rightarrow f$$

È una tautologia questa ?

Esercizio

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 > x \quad \Rightarrow f$$

Tentiamo una *reductio ad absurdum*:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad (\ 0 > x \quad \Rightarrow \quad f\ )$$

È una tautologia questa ?

Esercizio

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 > x \quad \Rightarrow f$$

Tentiamo una *reductio ad absurdum*:

$$\begin{array}{ccccc} x > 0 & \Rightarrow & (\, 0 > x & \Rightarrow & f \,) \\ & \mathrm{f} & & & \end{array}$$

Esercizio

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 > x \quad \Rightarrow f$$

Tentiamo una *reductio ad absurdum*:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad (\ 0 > x \quad \Rightarrow \quad f\ )$$

f

v f

Esercizio

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 > x \quad \Rightarrow f$$

Tentiamo una *reductio ad absurdum*:

$$\begin{array}{ccccc}
x > 0 & \Rightarrow & (\ 0 > x & \Rightarrow & f\ ) \\
 & \mathrm{f} & & & \\
\mathrm{v} & & & \mathrm{f} & \\
 & & \mathrm{v} & & \mathrm{f}
\end{array}$$

È una tautologia questa ?

Esercizio

Stabilire se questa è una tautologia:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 > x \quad \Rightarrow f$$

Tentiamo una *reductio ad absurdum*:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad (\ 0 > x \quad \Rightarrow \quad f\ )$$

f

$\underline{\mathrm{v}}$ f

$\underline{\mathrm{v}}$ f

Nulla osta !?

Teorema

Se $A \nvdash_{\mathbb{L}} f$, allora c'è un assegnamento che invera A .

Dim. (traccia): L'ipotesi ci dà la consistenza di A; per il teorema di Lindenbaum c'è dunque un $M \supseteq A$ che è consistente massimale. Posto

$$q(\alpha) \quad = \quad \begin{cases} \mathtt{v} & \text{se } \alpha \text{ appartiene ad } M, \\ \mathtt{f} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

basta accertarsi che q sia un assegnamento. Di certo $q(f) = \mathtt{f}$, visto che f non può appartenere ad M non essendone derivabile. Per accertare che $q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} \beta) = \big(q(\alpha) \Rightarrow q(\beta)\big)$, si esaminino uno a uno i tre casi: (1) $\beta \in M$, (2) $\alpha \notin M$, (3) $\alpha \in M$ e $\beta \notin M$. $\square$

Teorema

Se $A \nvdash_{\mathbb{L}} f$, allora c'è un assegnamento che invera A .

Dim. (traccia): L'ipotesi ci dà la consistenza di A; per il teorema di Lindenbaum c'è dunque un $M \supseteq A$ che è consistente massimale. Posto

$$q(\alpha) = \begin{cases} \mathtt{v} & \text{se } \alpha \text{ appartiene ad } M, \\ \mathtt{f} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

basta accertarsi che q sia un assegnamento. Di certo $q(f) = \mathtt{f}$, visto che f non può appartenere ad M non essendone derivabile. Per accertare che $q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} \beta) = \big(q(\alpha) \Rightarrow q(\beta)\big)$, si esaminino uno a uno i tre casi: (1) $\beta \in M$, (2) $\alpha \notin M$, (3) $\alpha \in M$ e $\beta \notin M$. □

Esercizio!

Teorema-chiave per le logiche booleane

Se qualsiasi assegnam. inveri A rende vero pure α, allora $A \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$.

TEOREMA-CHIAVE PER LE LOGICHE BOOLEANE

Se qualsiasi assegnam. inveri A rende vero pure α, allora $A \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$.

Dim. (traccia): Supponendo il contrario, da $A \nvdash_{\mathbb{L}} \alpha$ otteniamo che $A \cup \{\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f\}$ è consistente; perciò, in base al precedente teorema, c'è un assegnamento q che invera A e che soddisfa anche l'uguaglianza $q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f) = \mathtt{v}$. Al contempo dovremmo avere $q(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f) = \big(q(\alpha) \Rightarrow q(f) \big) = \big(\mathtt{v} \Rightarrow \mathtt{f} \big) = \mathtt{f}$. $\square$

Teorema-chiave per le logiche booleane

Se qualsiasi assegnam. inveri A rende vero pure α, allora $A \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$.

Corollario di Post

Se α è una tautologia, allora $\vdash_{\mathbb{L}} \alpha$.

Notare che la definizione di assegnamento ha senso anche in assenza di $\vdash_{\mathbb{L}}$: basta che f ed $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$ siano un elemento di $\mathcal{E}$ e un'operazione diadica su $\mathcal{E}$. Per atteggiare una simile terna $\mathcal{E}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}}$ a logica booleana, possiamo limitarci a definire la relazione $\vdash_m$ fra $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ ed $\mathcal{E}$ ponendo:

Definizione

Notare che la definizione di assegnamento ha senso anche in assenza di $\vdash_{\mathbb{L}}$: basta che f ed $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$ siano un elemento di $\mathcal{E}$ e un'operazione diadica su $\mathcal{E}$. Per atteggiare una simile terna $\mathcal{E}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}}$ a logica booleana, possiamo limitarci a definire la relazione $\vdash_m$ fra $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ ed $\mathcal{E}$ ponendo:

DEFINIZIONE

$A \vdash_m \alpha$ se c'è un sottoinsieme finito F di A tale che α risulti vero in qualsiasi assegnamento inveri F.

Notare che la definizione di assegnamento ha senso anche in assenza di $\vdash_{\mathbb{L}}$: basta che f ed $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$ siano un elemento di $\mathcal{E}$ e un'operazione diadica su $\mathcal{E}$. Per atteggiare una simile terna $\mathcal{E}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}}$ a logica booleana, possiamo limitarci a definire la relazione $\vdash_m$ fra $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ ed $\mathcal{E}$ ponendo:

DEFINIZIONE

$A \vdash_m \alpha$ se c'è un sottoinsieme finito F di A tale che α risulti vero in qualsiasi assegnamento inveri F.

ESERCIZIO (?)

Mostrare che ogniqualvolta f appartiene a $\mathcal{E}$ ed $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$ è un'operazione diadica su $\mathcal{E}$, la $\mathbb{L}_m = (\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$ che risulta da detta $\vdash_m$ è una logica booleana.

Teorema

$A \vdash_m \alpha$ se e solo se α risulta vero in ogni assegnamento che inveri A.

TEOREMA

$A \vdash_m \alpha$ se e solo se α risulta vero in ogni assegnamento che inveri A.

Dim. (traccia): Il "se" ci è dato dal teorema-chiave, visto che $(\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$ è una logica booleana.

$\square$

TEOREMA

$A \vdash_m \alpha$ se e solo se α risulta vero in ogni assegnamento che inveri A.

Dim. (traccia): Il "se" ci è dato dal teorema-chiave, visto che $(\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$ è una logica booleana.
Di converso, se A ha un particolare sottoinsieme finito F tale che ogni assegnamento inverante F renda vero α allora, a maggior ragione, gli assegnamenti che inverano l'intero A dovranno rendere vero α. □

Teorema

$A \vdash_m \alpha$ se e solo se α risulta vero in ogni assegnamento che inveri A. (In particolare, $\vdash_m \alpha$ se e solo se α è una tautologia).

Dim. (traccia): Il "se" ci è dato dal teorema-chiave, visto che $(\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$ è una logica booleana.

Di converso, se A ha un particolare sottoinsieme finito F tale che ogni assegnamento inverante F renda vero α allora, a maggior ragione, gli assegnamenti che inverano l'intero A dovranno rendere vero α. $\square$

Banalmente, in considerazione del teorema-chiave, per ogni logica booleana $(\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$ otteniamo:

TEOREMA SULLA MINIMALITÀ DI $\vdash_m$

A parità d'insieme $\mathcal{E}$ degli enunciati, di elemento designato f e di operazione $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$,

$$A \vdash_m \alpha \quad \text{implica} \quad A \vdash \alpha \ .$$

*(Per questo motivo, chiamiamo $\vdash_m$ una **logica minimale**).*

Riferimenti bibliografici

Martin Davis.
Lecture Notes in Logic.
Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1993.

Emil Leon Post.
Introduction to a general theory of elementary propositions.
American Journal of Mathematics, 43:163–185, 1921.

Ludwig J. J. Wittgenstein.
Tractatus Logico-Philosophicus, 1922.
http://www.gutenberg.org/files/5740/5740-pdf.pdf.

Consideriamo su $\mathcal{P}$:

1. dimostrabilità $A \vdash_{\mathbb{P}} \vartheta$ (e.g., secondo Church, secondo Quine, ecc.);
2. conseguenzialità logica $A \models_{\mathbb{P}} \vartheta$.

La 1. è stata definita lezioni fa; la 2. va intesa cosí: ϑ è vera in tutti gli assegnamenti che inverano A.

Che inclusioni valgono fra la $\vdash_{\mathbb{P}}$, la $\models_{\mathbb{P}}$ e la $\vdash_m$ relativa a $\mathcal{P}$?

Svolgimento dell'esercizio

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α:

$$f \vdash \alpha \, .$$

Soluzione

Abbiamo che:

Svolgimento dell'esercizio

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α:

$$f \quad \vdash \quad \alpha \ .$$

Soluzione

Abbiamo che:

$$f \vdash f$$

Svolgimento dell'esercizio

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α:

$$f \ \vdash \ \alpha \ .$$

Soluzione

Abbiamo che:

$$f \vdash f \quad (L1)$$

Svolgimento dell'esercizio

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α:

$$f \ \vdash \ \alpha \ .$$

Soluzione

Abbiamo che:

$$f \vdash f$$

$$\therefore \qquad f\,,\ \alpha \Rightarrow f \vdash f$$

Svolgimento dell'esercizio

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α:

$$f \vdash \alpha\ .$$

Soluzione

Abbiamo che:

$$f \vdash f$$

$$\therefore \qquad f\,,\ \alpha \Rightarrow f \vdash f \quad \text{(monotonicità: } L2\text{)}$$

Svolgimento dell'esercizio

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α:

$$f \;\vdash\; \alpha\ .$$

Soluzione

Abbiamo che:

$$\begin{array}{rr} & f \vdash f \\ \therefore & f\,,\ \alpha \Rightarrow f \vdash f \\ \therefore & f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \end{array}$$

SVOLGIMENTO DELL'ESERCIZIO

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α:

$$f \;\vdash\; \alpha\;.$$

SOLUZIONE

Abbiamo che:

$$\begin{array}{rr}
 & f \vdash f \\
\therefore & f\,,\ \alpha \Rightarrow f \vdash f \\
\therefore & f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f
\end{array} \quad \text{(principio di deduzione: } B1\text{)}$$

Dal falso tutto è derivabile

Svolgimento dell'esercizio

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α:

$$f \vdash \alpha \, .$$

Soluzione

Abbiamo che:

$$\begin{array}{lr} & f \vdash f \\ \therefore & f\,,\ \alpha \Rightarrow f \vdash f \\ \therefore & f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \\ \therefore & f \vdash \alpha \end{array}$$

Dal falso tutto è derivabile

Svolgimento dell'esercizio

Mostrare che in qualsiasi logica booleana, per ogni enunciato α:

$$f \quad \vdash \quad \alpha \ .$$

Soluzione

Abbiamo che:

$$\begin{array}{lr}
 & f \vdash f \\
\therefore & f \, , \, \alpha \Rightarrow f \vdash f \\
\therefore & f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \\
\therefore & f \vdash \alpha
\end{array}$$

(doppia negazione: $B2$; taglio: $L4$) $\dashv$

Svolgimento dell'esercizio

Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- $\alpha\,,\ \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$;
- se $A \vdash \alpha$ e $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, allora $A \vdash \beta$.

Svolgimento dell'esercizio

Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- $\alpha\,,\ \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$;

Soluzione 1ª parte

L1 ci dà che $\alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$;
il principio di deduz., *B1*, che $\alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ sse $\alpha\,,\ \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$.

Svolgimento dell'esercizio

Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- se $A \vdash \alpha$ e $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, allora $A \vdash \beta$.

Soluzione 2ª parte

Per il principio di deduz. *B1*, se $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ allora $A, \alpha \vdash \beta$;
$\therefore$ grazie al taglio, *L4*, quando $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ e $A \vdash \alpha$, allora $A \vdash \beta$.