Qualche corollario del lemma di Zorn

28 marzo 2022

Dimostriamo qui un corollario della seguente versione del celebre lemma di Zorn, che diamo per acquisita:

Lemma 1 (Zorn) *Se, in T, ogni sottoinsieme c che sia catena d'inclusione ha un maggiorante h, allora ogni elemento X di T è incluso in un elemento massimale m di T:*

$$\Bigg(\bigg(\forall\, c \subseteq T \,\Big|\, \Big(\forall\, u \in c\,,\ \forall\, v \in c \mid (\, u \supseteq v \vee v \supseteq u\,)\Big) \Longrightarrow \Big(\exists\, h \in T \,\Big|\, (\,\forall\, w \in c \mid h \supseteq w\,)\Big)\bigg)\ \&\ X \in T\Bigg)$$
$$\Longrightarrow\ \Big(\exists\, m \in T \,\Big|\, m \supseteq X\ \&\ (\,\forall\, j \in T \setminus \{m\} \mid j \not\supseteq m\,)\Big)\,.$$

Corollario 2 *Se ad S appartiene l'intersezione, $\bigcap p$, di qualsiasi sottoinsieme p di S, allora ogni elemento Y di S include un elemento minimale n di S:*

$$\Bigg(\bigg\{ p \subseteq S \,\Big|\, \Big\{ q \in \textstyle\bigcup S \,\Big|\, (\,\forall\, r \in p \mid q \in r\,)\Big\} \notin S \bigg\} \ =\ \emptyset\ \&\ Y \in S\Bigg) \ \Longrightarrow$$
$$\Big(\exists\, n \subseteq Y \mid \{\, z \in S \mid n \supseteq z\,\} \ =\ \{n\}\Big)\,.$$

Dim. Definiamo l'insieme

$$T \quad =_{\text{Def}} \quad \Big\{\{b \in S \mid b \supseteq a\} : a \in S\Big\}$$

e passiamo a verificare ch'esso soddisfa la condizione abilitante il lemma di Zorn. In effetti, associando a ogni catena d'inclusione $c \subseteq T$—e, piú in generale, a qualsiasi sottoinsieme c di T—il sottoinsieme

$$\kappa_c \quad =_{\text{Def}} \quad \Big\{ r \in S \mid \{b \in S \mid b \supseteq r\} \in c\Big\}$$

di S e posto $h_c = \bigcap \kappa_c$, cioè

$$h_c \quad =_{\text{Def}} \quad \{\, q \in \textstyle\bigcup S \mid (\,\forall\, r \in \kappa_c \mid q \in r\,)\,\}\,,$$

si nota che $h_c \in S$ e che $\{b \in S \mid b \supseteq h_c\}$ è un maggiorante di c in T (in quanto, per ogni $r \in k_c$, risulta che $h_c \subseteq r$ e dunque che $\{b \in S \mid b \supseteq h_c\} \supseteq \{b \in S \mid b \supseteq r\}$).

Pertanto, in base al lemma di Zorn e tenendo conto che $\{b \in S \mid b \supseteq Y\} \in T$, c'è in T un elemento massimale m tale che $m \supseteq \{b \in S \mid b \supseteq Y\}$. È facile verificare che l'elemento n di S per cui vale $m = \{b \in S \mid b \supseteq n\}$ è un elemento minimale incluso in Y. $\dashv$

Una versione molto piú generale del lemma di Zorn, in quanto non riguarda solo l'inclusione, è questa:

Teorema 3 (Zorn) *Sia $\preceq$ una relazione diadica che, su di un insieme S, si comporta da ordinamento parziale induttivo verso il basso:*

$$\begin{aligned}
&\big(\forall\, u \in S\,,\; v \in S\,,\; w \in S \mid (u \preceq v \;\;\&\;\; v \preceq w) \;\;\Longrightarrow\;\; u \preceq w\big),\\
&\big(\forall\, u \in S\,,\; v \in S \mid (u \preceq v \;\;\&\;\; v \preceq u) \;\;\Longleftrightarrow\;\; u = v\big),\\
&\left(\forall\, c \subseteq S \,\middle|\, \underbrace{\big(\forall\, u \in c\,,\, \forall\, v \in c \mid (\, u \preceq v \vee v \preceq u\,)\big)}_{c \text{ è una catena}} \Longrightarrow \underbrace{\big(\exists\, h \in S \,\big|\, (\,\forall\, w \in c \mid h \preceq w\,)\big)}_{c \text{ ha un minorante } h}\right).
\end{aligned}$$

Allora[1] *c'è una funzione ζ definita su tutti gli insiemi, tale che per ogni insieme u :*

1. *se $u \in S$ allora $\zeta(u) \preceq u$,*
2. *vale $\{w \in S \mid w \preceq \zeta(u)\} = \{\zeta(u)\}$.*

(Notare che la condizione *2.* implica che $\zeta(u)$ sta sempre in S , di cui è un elemento minimale).

Esercizio 1 (Teorema di Lindenbaum) Riformulare il Teor. 3 in termini di induttività verso l'alto e dedurne il teorema di Lindenbaum, che asserisce:
"In una logica booleana, ogni insieme consistente di enunciati è incluso in uno massimale".

[1]La terza di queste ipotesi può essere formulata anche cosí:

$$\left\{ c \subseteq S \,\middle|\, \big(\forall\, u \in c,\, \forall\, v \in c,\, \forall\, h \in S \mid (\, u \preceq v \vee v \preceq u\,)\;\&\;(\,\exists\, w \in c \mid h \not\preceq w\,)\big)\right\} = \emptyset.$$