SISTEMI DINAMICI

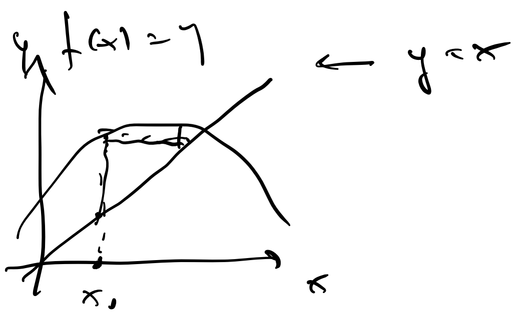
Sistemi dinamici discreti 1-dim

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$\to \quad x_n = f^n(x_0)$

$\longrightarrow$ punto fisso

$\longrightarrow$ punti periodici



la grandezza

$$|f'(x_0)| \gtrless 1$$

$$\downarrow \quad y_{n+1} = f'(x^*)\, y_n$$

Biforcazioni $\to$ $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$ stabilità strutturale

$$(f_\lambda(x) = x)$$

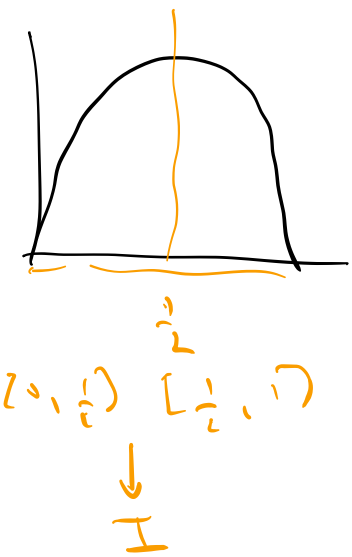
$\to$ modello logistico discreto

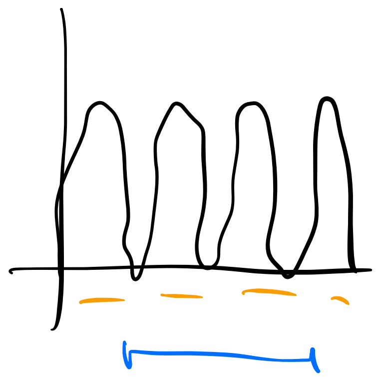
$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$

$(x^2 + c)$

$\lambda > 0 \qquad I = [0,1]$

$\lambda = 4$





f_{4}^{n} manda 2^n intervalli in tutto I

punti fissi di f_4

punti periodici di f_4 (punti fissi di qualche f_4^n che non sono punti fissi di $f_4^{<n}$)

Def : Supponiamo di avere una funzione f definita su $I = [\alpha, \beta]$ che mondo I in se stesso.

Diciamo che f è CAOTICA se valgono:

1. i punti periodici di f sono densi in I

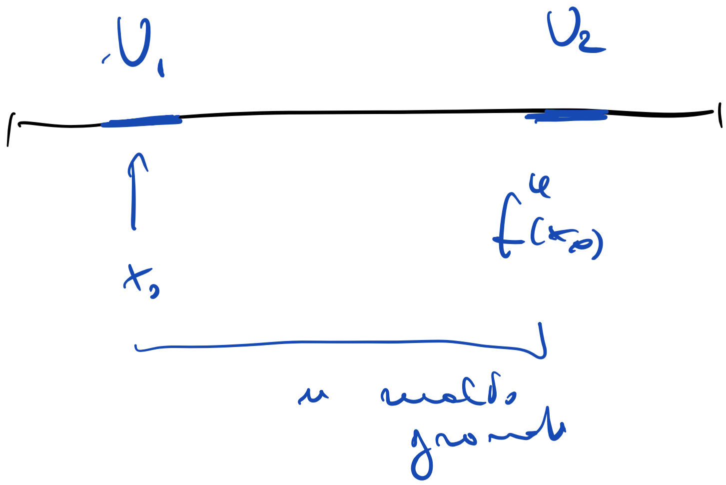
2. f è Transitiva

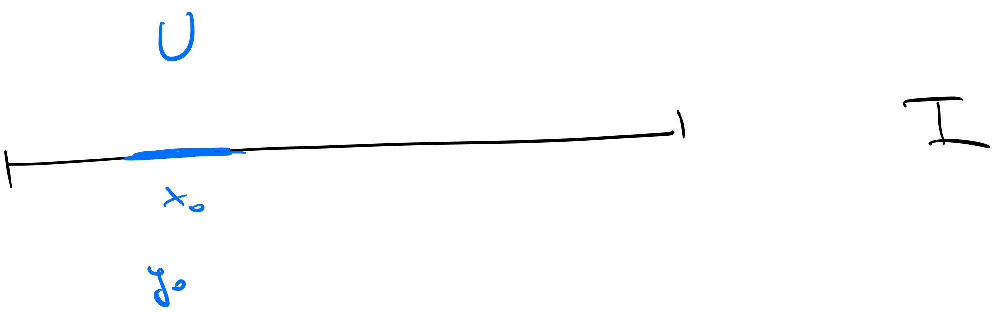
(dati U_1 e U_2 aperti di I $\exists\ x_0 \in U_1$ e $n > 0$ tale che $f^n(x_0) \in U_2$)

3. f è sensibile rispetto alle condizioni iniziali:

$\exists\ \beta$ costante t.c. $\forall\ x_0 \in U \subset I$ $\exists\ y_0 \in U$, e $n > 0$ tale che

$$|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$$



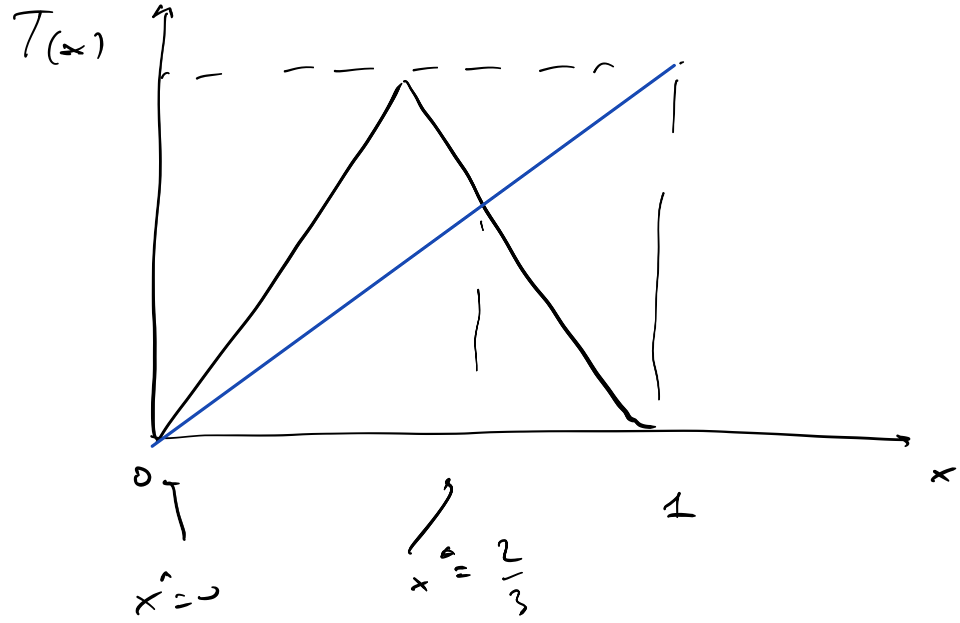


$\exists\ \beta$ t.c. $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$

$n > 0$

Mappa a Tenda

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x+2 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$x = T(x)$

$x \in [0, \frac{1}{2}]$

$\longrightarrow 2x = x$

$x^* = 0$

$x \in [\frac{1}{2}, 1]$

$-2x + 2 = x$

$x^* = \frac{2}{3}$

$$T^2(x) = T(T(x)) = \begin{cases} 2(2x) & 0 \leq 2x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-2x) & \frac{1}{2} \leq 2x \leq 1 \\ 2 \cdot 2(1-x) & 0 \leq 2(1-x) \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-2(1-x)) & \frac{1}{2} \leq 2(1-x) \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4x & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2-4x & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2+4x & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 4-4x & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Punti fissi

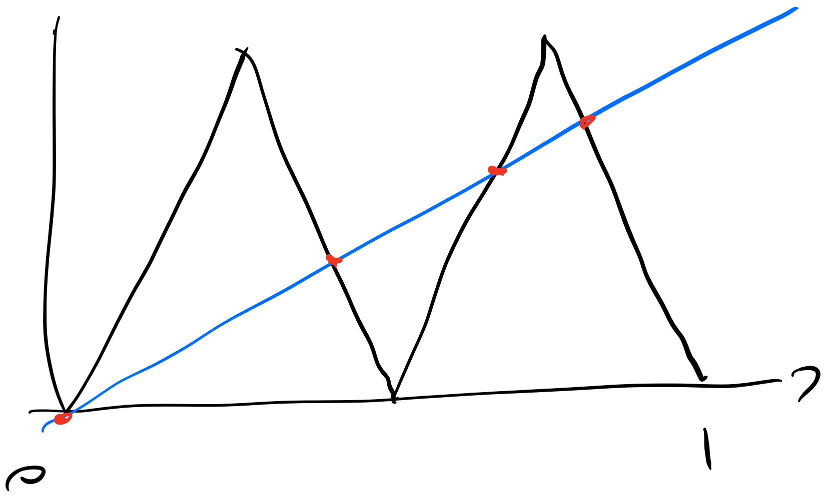
$0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ $\quad 4x = x \longrightarrow x^* = 0$

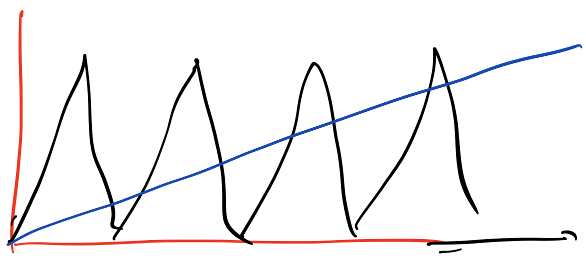
$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ $\quad 2-4x = x \longrightarrow x^* = \frac{2}{5}$

$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{4}$ $\quad -2+4x = x \longrightarrow x^* = \frac{2}{3}$

$\frac{3}{4} \le x \le 1 \qquad 4 - 4x = x \to x^* = \frac{4}{5}$

$x^* = \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$ punti fissi di T^2 che non sono punti fissi di T $\to$ punti periodici di periodo 2.





T^n ha 2^n punti fissi.

Teorema $T(x)$ è caotica.

Dim T^n: manda gli intervalli

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \qquad k = 0, \dots, 2^n - 1$$

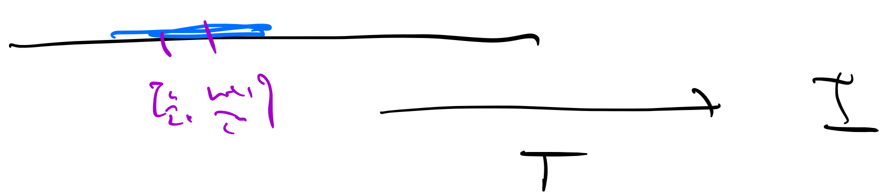
in tutto I. Quindi graficamente (T) vediamo che in ogni intervallo γ interseca la diagonale

Gli intervalli sono lunghi $\frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow$ i punti periodici di T sono densi in I.

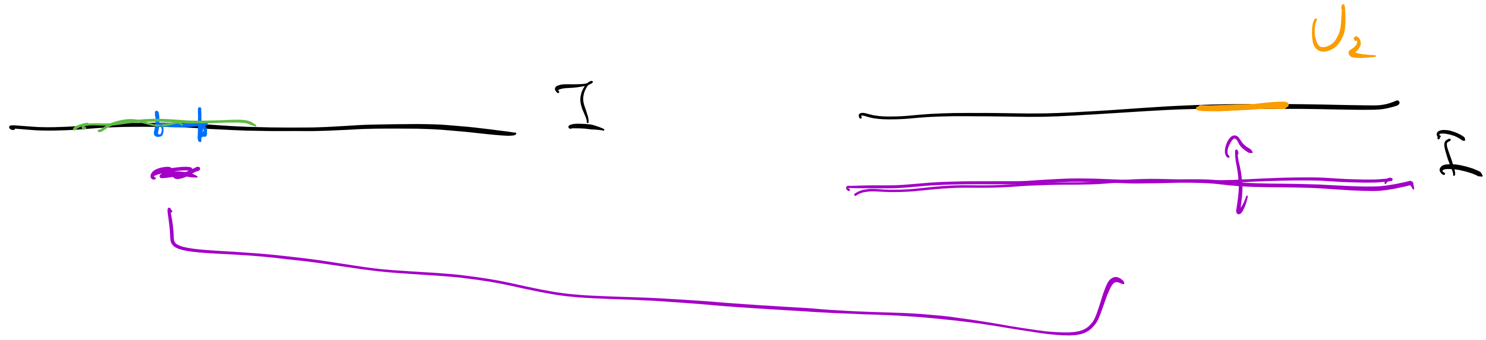
Transitività: U_1, U_2 aperti in I

U_1 contiene un intervallo della forma $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ per n abbastanza grande.



T^n manda $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ in tutto I

e in particolare $U_2 \subset I$



Posso trovare un $x^{\in U_1}$ che viene mandato in U_2, siccome l'intervallo $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ viene mandato in tutto I

$x_0 \in [0,1)$. T^n manda un aperto $U \ni$ di x_0 in tutto I. Quindi $\exists\, y_0$ t.c. $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| \geq \frac{1}{2} = \beta$

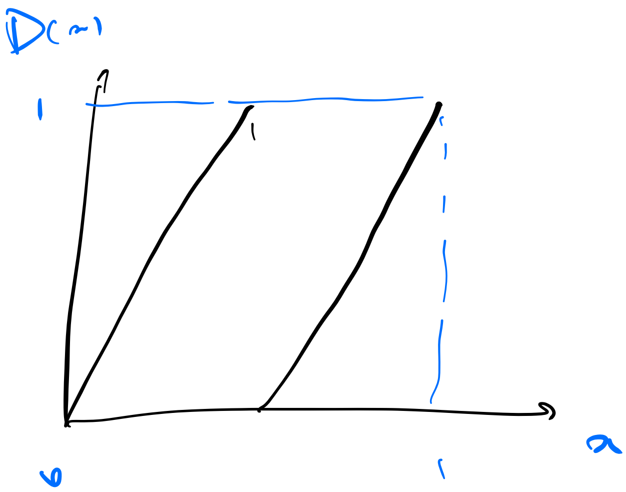
:)

Mappa Doubling

$$D : [0,1) \longrightarrow [0,1) \quad \text{discontinua}$$

$$D(x) = 2x \bmod 1$$

$$D(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$



$D(x) = x$

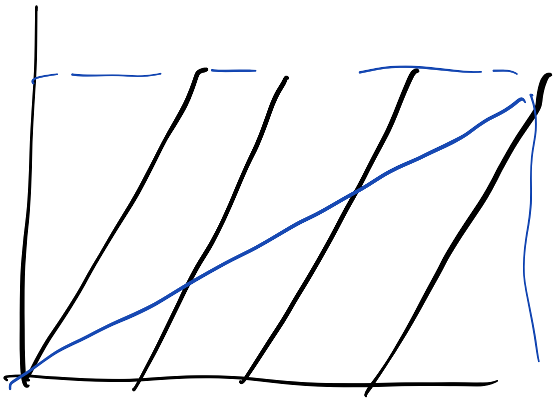
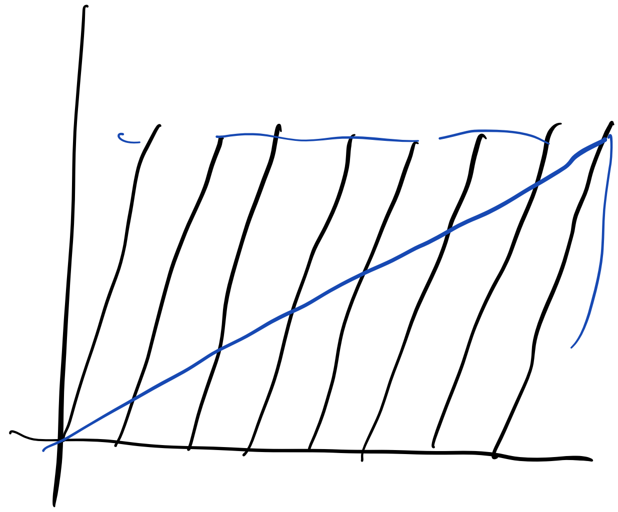
$x = 2x \longrightarrow x^* = 0 \in [0, \frac{1}{2})$

$x = 2x-1 \longrightarrow x^* = 1 \notin [\frac{1}{2}, 1)$

$$D^2(x) = D(D(x)) = \begin{cases} 2(2x) & 0 \le 2x < \frac{1}{2} \\ 2(2x)-1 & 0 \le 2x-1 < \frac{1}{2} \\ 2(2x-1) & \frac{1}{2} \le 2x < 1 \\ 2(2x-1-1) & \frac{1}{2} \le 2x-1 < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4x & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 4x-1 & \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2} \\ 4x-2 & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4} \\ 4x-3 & \frac{3}{4} \le x < 1 \end{cases}$$

$x^* = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

Anche D è caotica:

$$\begin{matrix}[0,\frac{1}{2}] \\ [\frac{1}{2},1)\end{matrix} \longrightarrow [0,1)$$

$$\underbrace{\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]}_{\text{intervalli di lunghezza } \frac{1}{2^n}} \longrightarrow [0,1)$$

Siccome D^n manda $\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]$ in tutto $I \Rightarrow$ c'è una intersezione con la diagonale $\rightarrow$ D punti periodici sono densi

Transitività: per ogni aperto U, V di

I troviamo $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$ dentro U per n sufficientemente grande

Questo intervallo va in tutto I

$\rightarrow$ D è transitiva

Sensitività: come prima.

<u>Def</u>: consideriamo due intervalli I e J, due mappe $f : I \longrightarrow I$, $g : J \longrightarrow J$. Diciamo che f e g sono <u>coniugate</u>, se $\exists$ h omeomorfismo (= continua, biunivoca e con inversa continua) $h : I \longrightarrow J$

Tale che $h \circ f = g \circ h$.

Tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[d, "h"] \\ J \arrow[r, "g"'] & J \end{tikzcd}$$

commuta

In particolare h porta orbite di f in orbite di g

$$h(f^n(x)) = g^n(h(x))$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[r, dash] \arrow[d, "h"'] & \cdots \\
J \arrow[r, "g"'] & J \arrow[r, "g"'] & J \arrow[r, "g"'] & J & \cdots
\end{tikzcd}$$

<u>Teorema</u> Siano $f : I \to I$ e $g : J \to J$. Supponiamo che siano coniugati da h. Allora se f è caotica in I, g è caotica in J.