Ricapitoliamo:

Def. Dato uno spazio $\mathcal{U}$ di funzioni, si dice FUNZIONALE definito nel dominio $\mathcal{U}$ una MAPPA F che ad ogni funzione $u \in \mathcal{U}$ associa un numero (reale)

$$F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto F[u] \in \mathbb{R}$$

Def. VARIAZIONE di un FUNZIONALE:

$$\boxed{\delta F[u, \delta u] = \frac{d}{d\alpha} F[u + \alpha \delta u] \Big|_{\alpha = 0}}$$

← generalizzazione ai funzionali delle derivate direzionali di funzioni a più variabili

Caso particolare:

$$F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x)\, dx \implies \delta F[u, \delta u] = \frac{\partial L}{\partial u'} \cdot \delta u \Big|_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u \, dx$$

Def. Diciamo che un funzionale F definito su $\mathcal{U}$ è STAZIONARIO in u_0, o che u_0 è pto di stazionarietà per F, se

$$\delta F[u_0, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u \quad (\text{t.c. } u_0 + \delta u \in \mathcal{U})$$

Prop. Dato $F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x)\, dx$, allora

u_0 è pto di staz. per F per variazioni nulle agli estremi $\iff$

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'}(u_0(x), u_0'(x), x) - \frac{\partial L}{\partial u}(u_0(x), u_0'(x), x) = 0}$$

dette EQ. di EULERO-LAGRANGE associate al funzionale F

Dim

$$\delta F[u, \delta u] = \underbrace{\cancel{\frac{\partial L}{\partial u'} \delta u \Big|_{x_i}^{x_f}}}_{=0 \quad \delta u = 0} - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u \, dx$$

$\Leftarrow$: ovvio $\rightsquigarrow$ $\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} (u_0(x)) = 0 \Rightarrow \delta F[u_0, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u$

$\Rightarrow$: dobbiamo dim. che se $\delta F[u_0, \delta u] = 0$ $\forall \delta u$,

allora $\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'}(u_0, u_0', x) - \frac{\partial L}{\partial u}(u_0, u_0', x) = 0$

dim. per assurdo: assumiamo per assurdo che $u_0(x)$

non soddisfi eq. di Lagr. $\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\right)\Big|_{u=u_0}(x) = 0$,

cioè $\exists$ almeno un $\bar{x} \in [x_i, x_f]$ t.c.

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\right)\Big|_{u=u_0(x)} (\bar{x}) \neq 0$$

allora per continuità

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\right)\Big|_{u=u_0(x)} (x) \neq 0 \quad \text{per} \quad x \in I_{\bar{x}}$$

intorno di $\bar{x}$

e prendendo intorno suff. piccolo $\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\right)\Big|_{u=u_0(x)}$ ha segno def.

<u>questo ci permette di trovare un δu t.c. $F[u_0, \delta u] \neq 0$:</u>

cioè δu t.c. $\delta u(x) = 0$ se $x \notin I_{\bar{x}}$, $\delta u(x) > 0$ se $x \in I_{\bar{x}}$

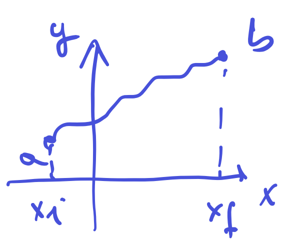
$$\rightarrow \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\right)\Big|_{u=u_0(x)}(x)\, \delta u(x)\, dx =$$

$$= \int_{I_{\bar{x}}} \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}\right)}_{\neq 0}\Big|_{u=u_0(x)} (x)\, \underbrace{\delta u(x)}_{>0}\, dx \neq 0$$

//

ES $L = (1 + u'^2)^{1/2}$ $\qquad F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x)\, dx$

lunghezza della curva



u che minimizza F, cioè t.c. $\delta F[u, \delta u] = 0$ $\forall \delta u$

$\Leftrightarrow$ u soddisfa eq. di Lagr.:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} = 0 \iff u'' = 0$$

$$\Updownarrow$$

$u(x) = mx + q$ RETTA

PRINCIPIO DI HAMILTON

In meccanica abbiamo a che fare con funzioni nel tempo t che descrivono il moto del sistema: $q_k(t)$, le cui derivate sono $\dot{q}_k(t)$

Iniziamo con un sistema a 1 grado di lib. $n=1$

$L(q, \dot{q}, t)$ Lagrangiana $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Se sostituisco alle variabili $q, \dot{q}$, le funz. $q(t), \dot{q}(t)$, ottengo $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ che è una funz. in t

Definisco AZIONE HAMILTONIANA il funzionale

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$$

→ Un moto $q(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, rende STAZIONARIO $S[q]$, per variazioni arbitrarie $\delta q(t)$ (nulle agli estremi) se e solo se $q(t)$ soddisfa le eq. di Lag.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$$

⇝ Tra tutti i moti possibili tra $q_1 = q(t_1)$ e $q_2 = q(t_2)$ il moto reale è quello che rende stazionario il funzionale AZIONE $S[q]$, cioè $q(t)$ t.c.

$$\delta S[q, \delta q] = 0 \quad \forall \delta q$$

Generalizziamo a n gradi di libertà

$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \qquad L : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ Lagrangiana

$$S[\bar{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)\, dt$$ AZIONE HAMILTONIANA

<u>Prop.</u> La variazione del funzionale S è data da

$$\delta S[\bar{q}, \delta \bar{q}] = \underbrace{\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ se } \delta q_h \text{ si annulla in } t_1 \text{ e } t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] dt$$

<u>Prop.</u> PRINCIPIO DI HAMILTON. Il moto $\bar{q}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, rende STAZIONARIO il funzionale AZIONE S, per variazioni $\delta q_1(t), \dots, \delta q_n(t)$ arbitrarie e nulle agli estremi

$\iff$ $\bar{q}(t)$ soddisfa le eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \qquad h = 1, \dots, n$$

Noi siamo partiti da PRINCIPIO che $\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow$ principio di Hamilton

Si poteva anche formulare la MECCANICA CLASSICA assumendo come principio il PRINCIPIO di HAMILTON $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ eq. Lag. $\Rightarrow$ eq. $\bar{F}_i = m\ddot{a}_i$.

Vediamo ora che le proprietà di invarianza delle eq. di Lagrange sono facilmente ricavabili utilizzando la formulazione variazionale.

1) Inv. per CAMBIAMENTO DI COORDINATE

$$\bar q = \bar q(\bar{\tilde q}, t)$$

$$\tilde L(\bar{\tilde q}, \dot{\bar{\tilde q}}, t) = L(\bar q(\bar{\tilde q}, t), \dot{\bar q}(\bar{\tilde q}, \dot{\bar{\tilde q}}, t), t)$$

Il moto $\bar q(t) = \bar q(\bar{\tilde q}(t), t)$

Allora

$$\int_{t_1}^{t_2} \tilde L(\bar{\tilde q}(t), \dot{\bar{\tilde q}}(t), t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t)\, dt$$

stazionario in $\bar{\tilde q}(t)$ $\Longleftrightarrow$ stazionario in $\bar q(t) = \bar q(\bar{\tilde q}(t), t)$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$\bar{\tilde q}(t)$ risolve eq. di Lag. per $\tilde L$ $\Longleftrightarrow$ $\bar q(t)$ risolve eq. di Lag. per L

2) Abbiamo stesse eq. di Lagrange se L e L' differiscono per una certa $\varphi(\bar q, \dot{\bar q}, t)$ t.c.

$$\varphi(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t) = \frac{d}{dt} F(\bar q(t), t) \quad \leftarrow \text{DERIVATA TOTALE}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t)\, dt \qquad S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t)\, dt$$

ma $S' = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(\bar{q}(t), t)\, dt$

$$= S + F(\bar{q}(t), t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Devo fare variazione di termine di destra e di sinistra

$$\delta S' = \delta S + \delta \left(F(\bar{q}(t), t) \Big|_{t_1}^{t_2} \right)$$

proporzionale a $\delta q(t_1)$

o $\delta q(t_2)$

$\rightarrow = 0$

$\Downarrow$

$$\delta S' = \delta S$$

//

LEGGI DI CONSERVAZIONE in meccanica Lagrangiana

Una funzione $I : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ $\qquad (\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \mapsto I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

è chiamata COSTANTE DEL MOTO (o integrale primo),

per un sistema Lag. a n gradi di lib. con Lagrangiana L,

se la funzione composta $I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$ è cost. in

t per $\bar{q}(t)$ che soddisfa le eq. di Lagrange, cioè

$$\frac{d}{dt}\left(I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) \right) = 0 \quad \text{per } \bar{q}(t) \text{ che risolve eq. Lag.}$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{l=1}^{n}} \left(\frac{\partial I}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l \right) + \frac{\partial I}{\partial t}$$

⇝ Se conosco la funzione $I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ e so che è

una cost. del moto, allora posso scrivere

l'eq.

$$I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \underset{\text{cost.}}{I_0} \quad \leftarrow \text{famiglia (al variare di } I_0\text{) di eq. diff. del 1° ordine}$$

che il moto reale sicuramente soddisfa

↳ posso utilizzarla per risolvere il problema

di integrare le eq. di Lagrange

Conservazione dell' ENERGIA in sistemi Lagrangiani

Def. Per sistemi Lagrangiani a n gradi di lib. e Lagrangiana $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

definiamo
$$E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Calcoliamo la derivata $\frac{d}{dt}$ di $E(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t)$

$$\frac{d}{dt} E(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t) = \sum_{h=1}^{m} \left(\cancel{\ddot q_h \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}} + \dot q_h \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_h} \right) -$$

$$- \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_h} \dot q_h + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} \ddot q_h} \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \dot q_h \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} \right)}_{\text{è valutata in } \bar q(t)} - \frac{\partial L}{\partial t}$$

se $\bar q(t)$ risolve eq. di Lagr.

$$= - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Invariante della Lagrangiana sotto traslazioni temporali

$\Rightarrow$ Se L NON DIP. ESPLICITAM. dal TEMPO $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \right)$

allora $E(\bar q, \dot{\bar q}, t)$ è una COST. del MOTO

Per un sistema meccanico conservativo

$$L(\bar q, \dot{\bar q}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k} a_{hk}(q)\, \dot q_h \dot q_k - V(\bar q)$$

è una funzione OMOGENEA di grado 2 nelle $\dot q_h$

$$E(\bar q, \dot{\bar q}) = \sum_{h=1}^{m} \dot q_h \frac{\partial L}{\partial \dot q_h} - L$$

Def. Funzione $f(x_1,\dots,x_N)$ si dice OMOGENEA di grado α se $\forall \lambda > 0$ e ogni scelta di $x_1,\dots,x_N$ si ha

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N) = \lambda^\alpha f(x_1,\dots,x_N)$$

ES. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2 + x_2^2 + x_3 x_1 \qquad \alpha = 2$

$f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1 + \frac{x_2^2}{x_1}} \qquad \alpha = 1/2$

Lemma f omogenea di grado $\alpha \Rightarrow \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f$

Dim. $0 = \frac{d}{d\lambda}\left[f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_N) - \lambda^\alpha f(x_1,\dots,x_N)\right]\Big|_{\lambda=1} =$

$= \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f(\lambda x_1, \dots \lambda x_N)}{\partial x_i} x_i - \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x_1,\dots,x_N) \right)\Big|_{\lambda=1}$ //

$$E = \sum_{k=1}^m \dot q_k \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - L = \underbrace{\sum_{k=1}^m \dot q_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}}_{T \text{ omog. di grado } 2} - \cancelto{=0}{\sum_{k=1}^m \dot q_k \frac{\partial V}{\partial \dot q_k}} - T + V =$$

$$= 2T - T + V = T + V$$

- Nel caso in cui abbiamo forze puramente posizionali E è l'energia totale del sist. meccanico

- Se $V = V_0(\bar q) + V_1(\bar q, \dot{\bar q})$ ← lineare omog. in $\dot{\bar q}$ ← $\alpha = 1$

$$\Rightarrow \quad -\sum_{k=1}^m \dot q_k \frac{\partial V}{\partial \dot q_k} = -V_1$$

$$E = 2T - V_1 - T + V_0 + V_1 = T + V_0$$