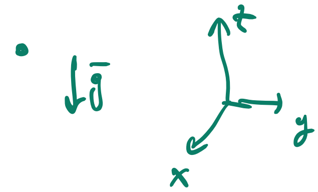
COORDINATE CICLICHE o IGNORABILI

Consideriamo un sist. Lagr. a n gradi di lib. e supponiamo che L NON dip. esplicitam. da alcune coordinate (dette COORDINATE CICLICHE), $q_{m+1}, \dots, q_n$

$$L = L(q_1, \dots, q_m, \underbrace{\dot q_1, \dots, \dot q_n}, t)$$

se L non dip. da una $\dot q$, la matrice cinetica avrebbe una riga e una colonna di zeri e non sarebbe strettam. def. positiva

ES. Pto mobile soggetto a forza di gravità.



$$T = \frac{1}{2} m (\underbrace{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}_{\dot q_{1,2,3}}) \qquad V = mgz$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - mgz = L(z, \dot x, \dot y, \dot z)$$

$\rightarrow$ x e y sono COORD. CICLICHE

OSSERVAZIONE: quando $q_{\bar i}$ è coordinata ciclica, la Lagrangiana è invariante sotto la trasformazione

$$q_h \mapsto q_h \quad h \neq \bar i \qquad \dot q_h \mapsto \dot q_h \quad \forall h$$

$$q_{\bar i} \mapsto q_{\bar i} + c \qquad c \text{ cost.}$$

[Possiamo definire delle funzioni (VARIABILI DINAMICHE)

$$p_\ell(\bar q, \dot{\bar q}, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}(\bar q, \dot{\bar q}, t)$$

dette MOMENTI CONIUGATI.]

Se $q_{m+1}, \dots, q_n$ sono coord. cicliche, allora

$$\frac{d}{dt} p_\ell(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t) = \qquad \ell = m+1, \dots, n$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t) \underset{\uparrow}{=} \frac{\partial L}{\partial q_\ell}(\bar q(t), \dot{\bar q}(t), t) \underset{\uparrow}{=} 0$$

se il moto $\bar q(t)$ soddisfa le eq. di Lagr. — q_ℓ è ciclica

$\Rightarrow$ i momenti coniugati p_ℓ $(\ell = m+1, \dots, n)$, relativi alle coord. cicliche, sono COSTANTI DEL MOTO

[p_ℓ è detto momento coniugato di q_ℓ]

ES) $L = \frac{1}{2} m (\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - mgz$

x è ciclica $\quad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x$

y " " $\quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot y} = m\dot y$

$\rightarrow$ quantità di moto lungo x e y è conservata

Usiamo ora queste cost. del moto per "ridurre i gradi di libertà"

- Prendiamo $p_\ell(q_1, \dots, q_m, \dot q_1, \dots, \dot q_m) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}(q_1, \dots, q_m, \dot q_1, \dots, \dot q_m)$

- Scriviamo le relazioni

$$\underset{\text{è una cost.}}{\tilde p_\ell} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}(q_1, \dots, q_m, \dot q_1, \dots, \dot q_m, \underbrace{\dot q_{m+1}, \dots, \dot q_n}_{\text{prendiamo queste come le } n-m \text{ incognite delle } n-m \text{ equazioni}}) \qquad \ell = m+1, \dots, n$$

- Risolviamo nelle $\dot q_{m+1}, \dots, \dot q_n$

$$\Rightarrow \quad \dot q_\ell = u_\ell(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m,\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_n,t)$$

- Definiamo una Lagrangiana efficace (o Lagrangiana RIDOTTA)

$$L^*(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m,t\,;\underbrace{\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_n}^{\text{PARAMETRI}}) \equiv$$

$$\equiv L(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m,u_{m+1}(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m,\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_n,t)$$

$$\dots u_n(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m,\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_n,t))$$

$$-\sum_{\ell=m+1}^{n} \tilde p_\ell\, u_\ell(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m,\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_n,t)$$

$$L^* = \left(L - \sum_{k=m+1}^{n} \tilde p_k \dot q_k\right)\Bigg|_{\dot q_{k=m+1,\dots,n} = u_\ell}$$

Prendiamo L^* e la trattiamo come la Lagrangiana di un sistema (ausiliario) a **m** gradi di libertà.

Eq. di Lagrange per L^* $\qquad h = 1,\dots,m$

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h} + \cancel{\sum_{\ell=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}\frac{\partial u_\ell}{\partial q_h}} - \cancel{\sum_{\ell=m+1}^{n} \tilde p_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial q_h}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_h} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} + \cancel{\sum_{\ell=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}\frac{\partial u_\ell}{\partial \dot q_h}} - \cancel{\sum_{\ell=m+1}^{n} \tilde p_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial \dot q_h}}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial L^*}{\partial q_h} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} \quad \Big|\ \text{valutate in } q_h(t)$$

$$h = 1,\dots,m$$

$\Rightarrow$ Le eq. di Lagrange di L^* coincidono con le prime $\underline{m}$ eq. di Lagrange di L

$\Rightarrow$ le $q_h(t)$ $(h=1,\dots,m)$ che risolvono le equazioni di Lagrange di L^*, risolvono anche le eq. di Lag. di L.

Come determiniamo le $q_k(t)$ $k=m+1,\dots,n$?

Le rispettive eq. di Lagrange sono state utilizzate per ricavare le $\dot{q}_k$ in funz. delle $q_h, \dot{q}_h$ $h=1,\dots,m$ (u_k)

$$\rightarrow \quad \dot{q}_k(t) = u_k(q_1(t),\dots,q_m(t),\dot{q}_1(t),\dots,\dot{q}_m(t),\tilde{p}_{m+1},\dots,\tilde{p}_n,t)$$

$\downarrow$

eq. diff. del 1° ordine per le $q_k(t)$, del tipo $\dot{x} = f(t)$, cioè sono risolvibili per integrazione (quadratura)

ES) $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz$ $\qquad n=3 \quad m=1$

- $\tilde{p}_x = m\dot{x}$ $\qquad \tilde{p}_y = m\dot{y}$
- $\dot{x} = \frac{\tilde{p}_x}{m}$ $\qquad \dot{y} = \frac{\tilde{p}_y}{m}$
- $L^* = L - \tilde{p}_x\dot{x} - \tilde{p}_y\dot{y}\Big|_{\dot{x}=\frac{\tilde{p}_x}{m},\ \dot{y}=\frac{\tilde{p}_y}{m}} =$

$$= \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{\tilde{p}_x}{m}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{p}_y}{m}\right)^2 + \dot{z}^2\right) - mgz - \tilde{p}_x\frac{\tilde{p}_x}{m} - \tilde{p}_y\frac{\tilde{p}_y}{m}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz - \frac{\tilde{p}_x^2}{2m} - \frac{\tilde{p}_y^2}{2m} = L^*(z,\dot{z},\tilde{p}_x,\tilde{p}_y)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot z} = m\ddot z \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg \quad \Rightarrow \quad \ddot z = -g$$

$$\longrightarrow \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0^z t + z_0$$

$$\dot x = \frac{\tilde p_x}{m} \quad \rightarrow \quad x(t) = \frac{\tilde p_x}{m} t + x_0$$

$$\dot y = \frac{\tilde p_y}{m} \quad \rightarrow \quad y(t) = \frac{\hat p_y}{m} t + y_0$$

Osservazione: Quanto visto finora può essere formulato nel seguente modo. Prendiamo q_e coord. ciclica:

- L invariante sotto la seguente trasf.

$$\bar q \mapsto \bar q' = \bar\varphi(\alpha, \bar q)$$

$$\dot{\bar q} \mapsto \dot{\bar q}' = \bar\psi(\alpha, \bar q, \dot{\bar q})$$

dove (nel caso sopra)

$$\varphi_h(\alpha, \bar q) = q_h + \alpha\,\delta_{he} \qquad (*)$$

$$\psi_h(\alpha, \bar q) = \dot q_h$$

L indip. q_e $\iff$ L è INVARIANTE sotto la trasf $(*)$

$\Downarrow$

$\exists$ cost. del moto (suo mom. con.)

$$L(\bar\varphi(\alpha,\bar q), \bar\psi(\alpha,\bar q,\dot{\bar q}), t) = L(\bar q, \dot{\bar q}, t)$$

Legge di conservazione ($\exists$ cost. del moto) $\longleftrightarrow$ proprietà di INVARIANZA di L (SIMMETRIA)

Prop. TEOREMA DI NÖTHER

Sia $\bar{q} \mapsto \bar{\varphi}(\alpha, \bar{q})$ una trasformazione di simmetria CONTINUA*

(una famiglia di diffeomorfismi locali dipendenti da un parametro α)

che sia definita e differenziabile in α in un intorno di $\alpha = 0$, e soddisfacente

$$\bar{\varphi}(0, \bar{q}) = \bar{q}$$

Inoltre sia $\dot{\bar{q}} \mapsto \bar{\psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \sum_k \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial q_k} \dot{q}_k$

*[ES) trasf. continua $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ $\alpha \in [0, 2\pi]$

trasf. discreta $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha q_1 \\ \alpha q_2 \end{pmatrix}$ $\alpha = 1, -1$]

Se per ogni scelta di $\bar{q}$, $\dot{\bar{q}}$ e α risulta che

$$L(\bar{\varphi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}), t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \quad **$$

allora la funzione (variabile dinamica)

$$P(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha}(0, \bar{q})\, p_m(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \qquad p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$$

è una COSTANTE DEL MOTO per le eq. di Lag. associate a L.

[** ES) L invariante sotto rotazioni

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2)$$

$$\bar{\varphi}(\alpha, \bar{q}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \bar{q} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\, q_1 + \sin\alpha\, q_2 \\ -\sin\alpha\, q_1 + \cos\alpha\, q_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Psi}(\alpha,\bar{q},\dot{\bar{q}}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \dot{\bar{q}}$$

$$L(\bar{\varphi}(\alpha,\bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha,\bar{q},\dot{\bar{q}})) = \frac{m}{2}\left((\cos\alpha\, \dot{q}_1 + \operatorname{sen}\alpha\, \dot{q}_2)^2 + (-\operatorname{sen}\alpha\, \dot{q}_1 + \cos\alpha\, \dot{q}_2)^2 \right)$$

$$- \frac{m\omega^2}{2}\left((\cos\alpha\, q_1 + \operatorname{sen}\alpha\, q_2)^2 + (-\operatorname{sen}\alpha\, q_1 + \cos\alpha\, q_2)^2 \right)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2) =$$

$$= L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \quad]$$

Dim del teorema di Nöther.

indip da α

$$L(\bar{\varphi}(\alpha,\bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha,\bar{q},\dot{\bar{q}}), t) = L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)$$

Derivo entrambi i membri per $\frac{d}{d\alpha}$ e alla fine pongo $\alpha=0$

$$0 = \frac{d}{d\alpha} L(\bar{\varphi}(\alpha,\bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha,\bar{q},\dot{\bar{q}}), t) \Big|_{\alpha=0} =$$

$$\Psi_h = \sum_k \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar{\varphi},\bar{\Psi},t) \cdot \frac{\partial \varphi_h(\alpha,\bar{q})}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{\varphi},\bar{\Psi},t) \cdot \frac{\partial \Psi_h(\alpha,\bar{q},\dot{\bar{q}})}{\partial \alpha} \right] \Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \left[\frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) \cdot \frac{\partial \varphi_h(0,\bar{q})}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) \cdot \frac{\partial \Psi_h(0,\bar{q},\dot{\bar{q}})}{\partial \alpha} \right]$$

Valutiamo il termine a destra dell'uguale (che è una funzione nelle $2m+1$ variabili $q_1,\dots,q_m,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_m,t$) lungo un MOTO CHE SODDISFA le EQ. di LAGR. di L

$$0 = \sum_{h=1}^{n} \left[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t)}_{=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t)} \frac{\partial \varphi_h}{\partial\alpha}(0,\bar q(t)) + \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t) \underbrace{\frac{\partial \psi_h}{\partial \alpha}(0,\bar q(t),\dot{\bar q}(t))}_{=\sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}\right)\cdot \dot q_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}} \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\right)\frac{\partial \varphi_h}{\partial\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}\right)\right] =$$

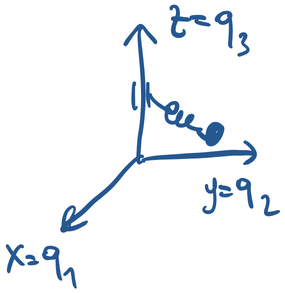
$$= \frac{d}{dt}\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\frac{\partial \varphi_h}{\partial\alpha} = \frac{d}{dt}\sum_{h=1}^{n} p_h(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t)\,\frac{\partial \varphi_h}{\partial\alpha}(0,\bar q(t))$$

soddisfano eq. di Lagr.

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} P(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t) = 0 \quad \Rightarrow \quad P \text{ è cost. del moto.}$$ //

ES.: INVARIANZA PER ROTAZIONI

$$L = \frac{m}{2}(\dot q_1^2 + \dot q_2^2 + \dot q_3^2) - \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2+q_2^2) - mg\,q_3$$



L è invariante sotto ROTAZIONI nel piano xy

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot q_1\\ \dot q_2\end{pmatrix}$$

$$\varphi_3 = q_3 \qquad \psi_3 = \dot q_3$$

$$P = \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}(0,\bar q)\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot q_h}$$

$$\varphi_1 = \cos\alpha\, q_1 + \operatorname{sen}\alpha\, q_2 \qquad \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\operatorname{sen}\alpha\, q_1 + \cos\alpha\, q_2\Big|_{\alpha=0} = q_2$$

$$\varphi_2 = -\operatorname{sen}\alpha\, q_1 + \cos\alpha\, q_2 \qquad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\cos\alpha\, q_1 - \operatorname{sen}\alpha\, q_2\Big|_{\alpha=0} = -q_1$$

$$\varphi_3 = q_3 \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = m\dot q_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_2} = m\dot q_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_3} = m\dot q_3$$

$$P = q_2 \cdot m\dot q_1 + (-q_1)\cdot m\dot q_2 + (0)\cdot m\dot q_3 =$$

$$= m(\dot q_1 q_2 - \dot q_2 q_1) = -m\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ij3}\, q_i \dot q_j =$$

$$= -(\bar q \times m\dot{\bar q})_3 = -M_z$$

$$\bar r \times m\bar v = M$$

COMPONENTE DEL MOMENTO ANGOLARE LUNGO L'ASSE DI ROTAZIONE

→ Se un sistema (L) è invariante per ROTAZIONI attorno a un asse, la componente lungo tale asse del MOMENTO ANGOLARE è CONSERVATA lungo il moto

Invariante per ROTAZIONI ⟷ Conservaz. del MOMENTO ANGOLARE

Invariante per TRASLAZIONI SPAZIALI ⟷ Conservaz. della QUANTITÀ DI MOTO

Invariante per TRASLAZIONI TEMPORALI ⟷ Conservaz. dell' ENERGIA