SISTEMI DINAMICI

Sistemi dinamici discreti

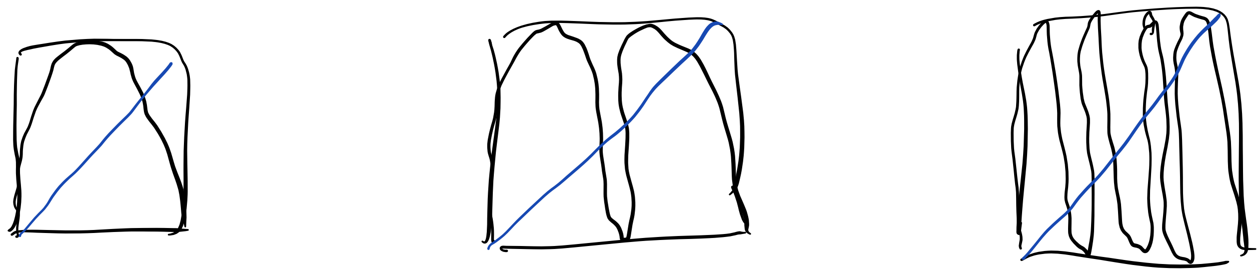
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f^n = f \circ \dots \circ f$$

Modello logistico discreto

$$x_{n+1} = \underset{\sim}{\lambda} x_n (1 - x_n)$$

$$\lambda > 0 \qquad \lambda \leq 4$$



f_4 è (?) caotica

$I = [\alpha, \beta]$. Una f è caotica se:

1. punti periodici di f siano densi

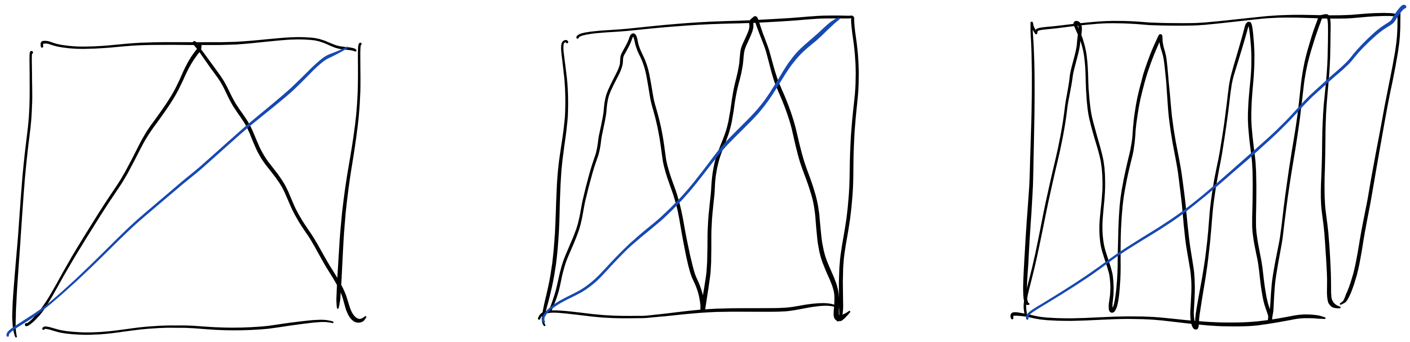
2. f è transitiva

3. $x_0, y_0 \in U$, $\exists \beta$ e $n > 0$

tale che $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$

sensibilità rispetto ai dati iniziali

Mappa a Tenda $T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -2x+2 & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$



$\rightarrow$ caotica, $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$

Coniugazione fra $I \xrightarrow{f} I$, $J \xrightarrow{g} J$ se $\exists\, h : I \to J$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[d, "h"] \\ J \arrow[r, "g"'] & J \end{tikzcd}$$

Tale che il diagramma commuta

Teorema: $I \xrightarrow{f} I$, $J \xrightarrow{g} J$

coniugate da $h : I \to J$, allora

se f è caotica in $I \Rightarrow g$ è caotica

in J.

Dimostrazione

Prendiamo $U \subset J$ aperto, $h^{-1}(U) \subset I$

1. f caotica. I suoi punti periodici

sono densi in I. Quindi possiamo

trovare $x \in h^{-1}(U)$ punto periodico.

Supponiamo x ha periodo n.

Verifichiamo $g^n(h(x)) = h(\underbrace{f^n(x)}_{= x})$

$= h(x) \to$ punto periodico di

periodo n. Sono densi

2. Prendiamo U e V aperti di J.

f transitiva, $\exists\ x_1 \in h^{-1}(U)$

e $m>0$ tali che $f^m(x_1) \in h^{-1}(V)$

Tuttavia $h(x_1) \in U$. Quindi

$$g^m(h(x_1)) = h(\underbrace{f^m(x_1)}_{\in h^{-1}(V)}) \in V$$

A, B in I

$x \in A$

$f^m(x) \in B$

$A = h^{-1}(U)$

$B = h^{-1}(V)$

$h(h^{-1}(V)) = V$

$\rightarrow$ g è transitiva.

3. Chiamiamo β la costante di scorrività di f. Poniamo $I = [\alpha_0, \alpha_1]$

Assumiamo $\beta < \alpha_1 - \alpha_0$

$\forall x \in [\alpha_0, \alpha_1 - \beta]$ e consideriamo

$$|h(x+\beta) - h(x)|$$: è continua e positiva

$\rightarrow$ ha un minimo, β'.

Quindi h prende intervalli di lunghezza β e li manda in intervalli di lunghezza almeno β'

Prendiamo β' come costante di sensitività

!!

Commento: diremo che h è una semi-coniugazione se invece di essere 1 a 1 è al più n a 1.

Si può dimostrare che una semi-coniugazione preserva il comportamento caotico, ma mappa cicli in cicli senza conservarne il periodo minimo

Teorema La funzione logistica $f_4(x) = 4x(1-x)$ è caotica.

Dim costruiamo una semi-coniugazione tra la mappa a tenda e la mappa logistica.

$$h(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi x)$$

è 2 a 1 in $[0,1]$, tranne per $x=\frac{1}{2}$ dove è $1-1$, $h(\frac{1}{2})=1$

$$h(T(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos 4\pi x) & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1-\cos(2\pi(-2x+2))) & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\cos(4\pi x)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(2\cos^2 2\pi x - 1\right) =$$

$$= 1 - \cos^2 2\pi x =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\pi x\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\pi x\right)$$

$$= f_4(h(x))$$

$4x(1-x)$

Mappa a Tenda manda intervalli arbitrariamente piccoli in $[0,1]$

Possiamo scegliere $\beta=\frac{1}{2}$ per f_4

$$
\begin{tikzcd}
h^{-1}(U) \ni x_1 \quad I \arrow[r, "f^m"] \arrow[d, "h"'] & I \quad h^{-1}(V) \ni f^m(x_1) \arrow[d, "h"] \\
U \quad J \arrow[r, "g^m"'] & J \quad V
\end{tikzcd}
$$

$$g^m(U) \Rightarrow V$$

$$g^m(h(x_1)) = h(f^m(x_1))$$

$$h(x_1) \equiv y_1 \in U$$

$$g^m(y) \longrightarrow \in V$$

"Misura quantitativa"

Esponente di Liapunov (di una mappa)

Idea: compariamo il tasso di attrazione/repulsione di traiettorie vicine con l'esponenziale

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Due punti iniziali x_0, $x_0 + \varepsilon$

Definiamo

$$\lambda = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \frac{1}{N} \ln \frac{\left| f^N(x_0+\varepsilon) - f^N(x_0) \right|}{\varepsilon}$$

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \frac{\left| f^N(x_0+\varepsilon) - f^N(x_0) \right|}{\varepsilon} = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} e^{\lambda N}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N}{dx} \Big|_{x_0} \right| =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \ln \left| (f^N)'(x_0) \right|$$

Possiamo espandere :

$$(f^N)'(x_0) = \left(f\left(f^{N-1}(x_0)\right)\right)' =$$

$$= \left(f'\left(f^{N-1}\right)\right)(x_0) \, (f^{N-1})'(x_0)$$

$$= f'(f^{N-1})(x_0) \; f'(f^{N-2})(x_0) \; (f^{N-2})'(x_0)$$

$= \ldots$

$$= f'(\underbrace{f^{N-1}(x_0)}_{x_{N-1}})\, f'(\underbrace{f^{N-2}(x_0)}_{x_{N-2}})\, f'(\underbrace{f^{N-3}(x_0)}_{x_{N-3}}) \cdots$$

$$\cdots f'(\underbrace{f(x_0)}_{x_1})\, f'(x_0)$$

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \left| (f^N)'(x_0) \right| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right|$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|$$

<u>Esempio</u> : prendiamo un k-ciclo stabile

(x_0 stabile se $|f'(x_0)| < 1$

k-ciclo è stabile $|(f^k)'(x_0)| < 1$)

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |f'(x_i)|}$$

Se abbiamo x_i una sequenza periodica di periodo p.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{j=1}^{n \bmod p} x_j \right)$$

$$= \underbrace{\frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{\frac{n}{p}}}_{\to 1} \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i}{p}}_{} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n \bmod p} x_j}_{\to 0}$$

$$\lambda = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |f'(x_i)| =$$

$$= \frac{1}{k} \ln \underbrace{\left| (f^k)'(x_0) \right|}_{<1} < 0$$

Se $(f^n)'_{(x_0)} = 0 \rightarrow \lambda = -\infty$

"ciclo superstabile"

<u>Mappa a Tenda</u>:

$$T_{(x)} = \begin{cases} 2r x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2r(1-x) & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$|T'_{(x)}| = 2r \qquad \left(\text{tranne } x = \frac{1}{2} \right)$$

$$\lambda = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |T'_{(x_i)}| =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln 2r$$

$$= \ln 2r > 0 \qquad \text{per } r > \frac{1}{2}$$

$$T_{(x)} = \begin{cases} 2x \\ -2x + 2 \end{cases}$$