Introduzione alla Fisica Nucleare e Subnucleare

Testi e soluzioni delle prove scritte

CdL in Fisica

Università di Trieste

Indice

0.1 Prova scritta del 20, 06, 2018

Esercizio 1

La particella J/Ψ (M = 3096.9 MeV) può essere prodotta sia in urti protone-protone che in urti elettrone-positrone.
A) Supponendo un fascio di protoni incidente su di un bersaglio fisso di idrogeno, calcolate l'energia del fascio di protoni nella reazione

$$p_1\, p_2 \;\to\; p\; p\;\; J/\Psi\ .$$

B) Supponendo due fasci di energia identica, calcolate l'energia del fascio nella reazione

$$e^+ e^- \;\to\; J/\Psi\ .$$

Soluzione esercizio 1

Per risolvere questo esercizio si usa la proprietà degli invarianti relativistici di avere lo stesso valore numerico in sistemi di riferimento diversi.
A) In questo caso l'urto avviene tra due protoni con impulsi $p1$ e $p2$. Se calcoliamo s nel sistema del laboratorio otteniamo:

$$s = (p_1+p_2)^2 = p_1^2+p_2^2+2p_1p_2 = m_p^2+m_p^2+2E_{p_1}E_{p_2}-2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 = 2m_p^2+2E_{p_1}m_p$$

con $E_{p_2} = m_2$ e $\vec{p}_2 = 0$. Dopo l'urto è più conveniente calcolare s nel sistema del centro di massa, dove le particelle prodotte sono a riposo:

$$s = (m_p + m_p + m_{J/\Psi})^2 = 4m_p^2 + m_{J/\Psi}^2 + 4m_p m_{J/\Psi}\ .$$

Eguagliando adesso i due valori di s si ottiene (Fig. 1):

$$4m_p^2 + m_{J/\Psi}^2 + 4m_p m_{J/\Psi} = 2m_p^2 + 2E_{p_1}m_p \;\to$$

$$\to\; E_{p_1} = \frac{2m_p^2 + m_{J/\Psi}^2 + 4m_p m_{J/\Psi}}{2m_p} = 12.23 \text{ GeV}$$

B) In questo caso il calcolo può essere facilmente svolto nel sistema del laboratorio. I due elettroni di momento $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ si urtano per produrre una particella J/Ψ a riposo:

$$(p_1 + p_2)^2 = m_{J/\Psi}^2 \;\to\; 2m_e^2 + 2E_e^2 - 2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 = m_{J/\Psi}^2$$

da cui, trascurando e quindi considerando nulla la massa dell'elettrone, si ha:

$$E_e^2 = \frac{m_{J/\Psi}^2}{4} \;\to\; E_e = \frac{m_{J/\Psi}}{2} = 1.5 \text{ GeV}$$

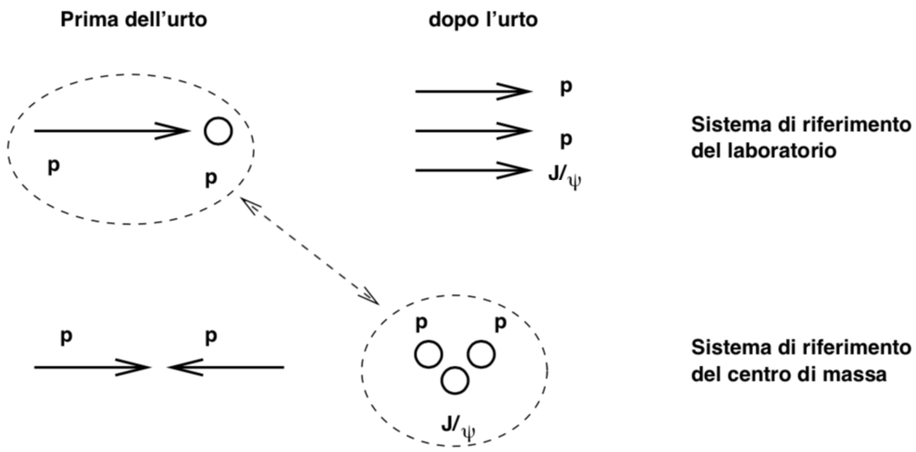


Figura 1: La risoluzione del problema è facilitata dall'eguagliare s calcolata in due sistemi di riferimento diversi.

Esercizio 2

Lo ^{89}Sr decade β con un tempo di dimezzamento di 1224 ore.
Quanto ne deve essere aggiunto a 2 mg di Sr stabile per ottenere un preparato con un'attività specifica iniziale di 2740 Ci/g ?
Che attività mostrerà il preparato dopo 35 giorni ?

Soluzione esercizio 2

Si ricordi che:

$$1 \text{ Ci } = 3.7 \times 10^{10} \text{ bq}$$

$$\mathrm{T}_{1/2} \; = \; \frac{1}{\lambda} \ln 2 \; = \tau \ln 2 = 4.4064 \times 10^{6} \text{ s}$$

da cui:

$$\tau = \frac{4.4064 \times 10^{6}}{\ln 2} \text{ s} \; \simeq \; 6.3571 \times 10^{6} \text{ s}$$

Si indichino con m_0 la massa di stronzio non attivo presente nel preparato ($m_0 = 2$ mg), e con Δm la massa di ^{89}Sr che va aggiunta al preparato e che va determinata, per cui la massa totale del preparato è $m = m_0 + \Delta m$.
Detta $\mathcal{A}_{sp}(t=0)$ l'attività specifica iniziale si ha

$$\mathcal{A}_{sp}(t=0) = 2740 \text{ Ci/g} \; \simeq \; 1.0138 \times 10^{14} \text{ bq/g}$$

con

$$\mathcal{A}_{sp}(t=0) = \frac{\mathcal{A}(t=0)}{m} = \frac{\mathcal{A}(t=0)}{m_0 + \Delta m} = \frac{N_0 \lambda}{m_0 + \Delta m}$$

dove N_0 rappresenta il numero di nuclei di ^{89}Sr che vanno aggiunti al preparato inizialmente per soddisfare le condizioni del problema. Si ha anche, detto N_A il numero di Avogadro,

$$N_0 \; = \frac{\Delta m}{A} \; N_A$$

con $A = 89$ il numero di massa dello ^{89}Sr, ma anche il suo peso atomico in g mol^{-1}.
Sostituendo si ha dunque

$$\mathcal{A}_{sp}(t=0) = \frac{N_0 \lambda}{m_0 + \Delta m} = \frac{\Delta m \; \lambda \; N_A}{A\,(m_0 + \Delta m)}$$

e ricavando Δm

$$\Delta m = \frac{m_0 \; A \; \mathcal{A}_{sp}(t=0)}{\lambda N_A - A \; \mathcal{A}_{sp}(t=0)} = \frac{m_0 \; A \; \mathcal{A}_{sp}(t=0)}{T_{1/2}^{-1} \; N_A \; \ln(2) - A \; \mathcal{A}_{sp}(t=0)}$$

Sostituendo infine i valori numerici nelle corrette unità di misura si ottiene

$$\Delta m \simeq \frac{(2 \cdot 10^{-3} \text{ g})(89 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})(1.0138 \cdot 10^{14} \text{ bq/g})}{(4.406 \cdot 10^{6} \text{ s})^{-1}(0.69315)(6.0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}) - (89 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})(1.0138 \cdot 10^{14} \text{ bq/g})}$$
$$\simeq 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ g}$$

Tenendo conto che un intervallo $\Delta t = 35$ giorni equivale a $\Delta t = 3.024 \times 10^6$ s si ottiene, per l'attività residua del preparato dopo 35 giorni dalla preparazione

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\Delta t = 3.024 \times 10^6 \text{ s}) &= \mathcal{A}(t=0) \; e^{-\Delta t/\tau} = \\
&= \frac{N_0}{\tau} \; e^{-\Delta t/\tau} = \frac{N_A \Delta m}{A \tau} \; e^{-\Delta t/\tau} = \\
&\simeq \frac{(6.0221 \cdot 10^{23})(2.1 \cdot 10^{-4})}{(89)(6.3571 \cdot 10^{6})} \; e^{-3.024 \cdot 10^6/6.3571 \cdot 10^6} = \\
&\simeq 2.235 \cdot 10^{11} \times 0.621 \simeq 1.39 \cdot 10^{11} \text{ bq}
\end{aligned}$$

Esercizio 3

L'isotopo ^{241}Am è un emettitore di particelle α di energia $E_\alpha \sim 5.5$ MeV e di γ di 60 keV. Lo si vuole utilizzare per irraggiare un bersaglio con i soli raggi γ introducendo un assorbitore tra la sorgente ed il bersaglio.

Il sistema si trova in una camera a vuoto e come assorbitori sono a disposizione fogli di polietilene di vari spessori.

1. Quale spessore di polietilene è necessario per fermare le particelle alfa (si trascurino le fluttuazioni del valore del range)?
Suggerimento: Si utilizzino la relazione empirica

$$R^{air}[\mathrm{cm}] = 0.318 \cdot E_\alpha^{\frac{3}{2}}$$

(E_α è espresso in MeV), per la determinazione del cammino residuo (range) in aria, ed il fatto che il range massico (cioè espresso in unità di spessore equivalente di g/cm^2) in aria e nel polietilene sono in prima approssimazione uguali.
Dati: Densità del polietilene: $\rho_p = 0.94$ g/cm^3, numero atomico medio del polietilene: $\overline{Z}_p = 5.3$; densità dell'aria $\rho_{air} = 1.2 \times 10^{-3}$ g/cm^3.

2. Se lo spessore di polietilene più sottile a disposizione è di 100 μm, quale percentuale di fotoni verrà trasmessa dalla sorgente al bersaglio?
Il coefficiente di assorbimento del polietilene per fotoni di 60 keV è $\mu_p = 0.0049$ cm$^2/g$

3. Se al posto del polietilene mettessimo uno strato di piombo di 100 μm di spessore quale sarebbe la percentuale di fotoni che arriverebbe sul bersaglio?
Si ricordi che $\rho_{Pb} = 11.3$ g/cm^3, che Z = 82, e che $\mu_{Pb} = 4.43$ cm$^2/g$.
Si giustifichi qualitativamente il risultato in termini di sezioni d'urto.

Soluzione esercizio 3

Calcoliamo dapprima il range delle particelle alfa in aria

$$R^{air}[cm] = 0.318 E_\alpha^{\frac{3}{2}} = 0.3185.5^{\frac{3}{2}} = 4.1cm$$

questo corisponde ad uno spessore equivalente di

$$R^{air}_{eq} = R^{air}\ \rho_{air} = 4.1\ 1.2\ 10^{-3} g/cm^2 = 4.92\ 10^{-3} g/cm^2$$

Siccome in prima approssimazione questo e' anche equivalente al range in polietilene espresso in unita' di spessore massico sara'

$$R^p[cm] = R^{air}_{eq} \frac{1}{\rho_p} = 4.1\ \frac{1}{0.94} cm = 52.3\ \mu m$$

La percentuale di fotoni trasmessa e'

$$P = e^{\mu_p X}$$

essendo $X = \rho_p\, x$ lo spessore massico attraversato, ed $x = 100\mu m$ lo spessore del polietilene. Ne viene

$$P = e^{\mu_p X} = e^{0.0049 g/cm^2 0,94 g/cm^3 \ 10^{-2} cm} = 0.99998$$

Nel caso di uno spessore identico di piombo si avrebbe

$$P_{Pb} = e^{\mu_{Pb} X} = e^{4.43 g/cm^2 11.3 g/cm^3 \ 10^{-2} cm} = 0.6$$

Siccome il coefficiente di assorbimento e' $\mu = N - 0\ \sigma$, e' proporzionale al prodotto della sezione d'urto e del numero di centri diffusori per unita' di volume $N - 0$, essendo $N - 0$ simile nei due casi, e ne risulta che la sezione d'urto sul piombo (per fotoni di 60 keV) e' all'incirca 3 ordini di grandezza maggiore nel caso del piombo che e' compatibile con la differenza di numero atomico nei due casi e la *forte* dipendenza da Z dell'effetto fotoelettrico.

0.2 Prova scritta del 12, 07, 2018

Esercizio 1

Si consideri un nucleo con una distribuzione di carica sferica uniforme, $\rho(\vec{r}) = \rho(r) = 3/4\pi R^3$ per $r \leq R$ e $\rho(\vec{r}) = \rho(r) = 0$ per $r > R$, con $R = 2$ fm. Assumendo che la sensibilità sperimentale al raggio finito di tale nucleo si possa esprimere come una deviazione del 5 % del fattore di forma elastico dall'unità, si determini, nell'ipotesi di processi d'urto fra elettroni e nucleo, per quale impulso minimo si raggiunge tale sensibilità.
Si esprima il fattore di forma

$$F(q) = \int \rho(\vec{r})\; e^{\dfrac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\; \mathrm{d}\vec{r}$$

tenendo conto della simmetria della distribuzione di carica e si assuma che $qR \ll \hbar$, per cui il fattore di forma stesso si può ricondurre ad una opportuna approssimazione.
Così facendo che peso avrebbe il successivo termine d'approssimazione trascurato ?

Soluzione esercizio 1

Data la supposta simmetria sferica della distribuzione di carica nel nucleo, ovvero $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, integrando l'espressione del fattore di forma sugli angoli si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \rho(\vec{r})\; e^{\dfrac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\; \mathrm{d}\vec{r} \;&=\; \int_0^\infty r^2 \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{sen}\vartheta \;\mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} e^{\dfrac{i|\vec{q}|r\cos\vartheta}{\hbar}}\; \rho(r)\; \mathrm{d}\varphi \;= \\
&=\; 2\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 \mathrm{d}r \int_{-1}^{1} e^{\dfrac{i|\vec{q}|r\cos\vartheta}{\hbar}}\; \mathrm{d}(\cos\vartheta) \;=\; \left(\text{con } y = \frac{i|\vec{q}|r\cos\vartheta}{\hbar}\right) \\
&=\; 2\pi \int_0^\infty \frac{\hbar\; \rho(r)}{i|\vec{q}|r} r^2 \mathrm{d}r \int_{\frac{-i|\vec{q}|r}{\hbar}}^{\frac{i|\vec{q}|r}{\hbar}} e^y \mathrm{d}y \\
&=\; 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2\; \frac{e^{\frac{i|\vec{q}|r}{\hbar}} - e^{\frac{-i|\vec{q}|r}{\hbar}}}{2i|\vec{q}|r/\hbar}\; \mathrm{d}r \\
&=\; 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2\; \frac{\mathrm{sen}\,(|\vec{q}|r/\hbar)}{|\vec{q}|r/\hbar} \mathrm{d}r \;=\; 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2\; \frac{\mathrm{sen}\,(qr/\hbar)}{qr/\hbar} \mathrm{d}r
\end{aligned}$$

Data l'approssimazione indicata si ha $qr < qR \ll \hbar$ e di conseguenza si può espandere il seno in serie di Taylor fino al secondo termine non nullo

$$\frac{\mathrm{sen}(qr/\hbar)}{qr/\hbar} \;=\; \frac{1}{qr/\hbar}\left[qr/\hbar - \frac{(qr/\hbar)^3}{6} + ...\right] \;=\; 1 - \frac{(qr/\hbar)^2}{6} + ...$$

Sostituendo si ottiene, per il fattore di forma

$$F(q) \;=\; 4\pi \int_0^R \frac{3}{4\pi R^3}\,\frac{\mathrm{sen}\,(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 \mathrm{d}r \;\simeq\; \frac{3}{R^3}\int_0^R \left[1-\frac{(qr/\hbar)^2}{6}\right] r^2 \mathrm{d}r$$

e integrando

$$F(q) \;\simeq\; 1-\frac{(qR/\hbar)^2}{10}$$

Sostituendo il valore di R, esprimendo c in ”fm/s” e ricordando che $\hbar \simeq 6.582 \times 10^{-16}$ eV/s, ovvero $\hbar \simeq 197.5$ (MeV $\times$ fm)/(s $\times$ c) si ha quindi, per il valore minimo dell'impulso che garantisce la sensibilità richiesta alla valutazione del raggio del nucleo

$$0.95 \;=\; F(q) \;\simeq\; 1-\frac{(qR/\hbar)^2}{10} \qquad \text{da cui,} \quad q \;\simeq\; 0.71\,\frac{\hbar}{R}$$

ovvero, sostituendo nelle opportune unità di misura,

$$q \;\simeq\; \frac{0.71 \times 197.5}{2} \;=\; 70\;\frac{\mathrm{MeV}}{c}$$

Il terzo termine dell'espansione in serie di Taylor del fattore di forma è

$$\frac{(qR/\hbar)^4}{280}$$

e poichè $qR/\hbar \simeq 0.71$, si ha che esso è circa 55 volte inferiore al precedente.

Esercizio 2

Si calcoli l'energia di soglia della reazione:

$$p+\gamma \;\rightarrow\; \Delta^+ \;\rightarrow\; p+\pi^0$$

Si tratta di una reazione che avviene ad esempio nell'Universo tra i protoni di altissima energia presenti nel flusso di raggi cosmici e i fotoni della radiazione cosmica di fondo ($T \simeq 2.7$ K). Tale reazione produce un protone di energia inferiore. Di conseguenza l'energia di soglia del protone per innescare la reazione costituirebbe di fatto l'estremo superiore nello spettro dei raggi cosmici: il *cutoff* GZK (dai nomi di Greisen, Zatzepin e Kuzmin).

Soluzione esercizio 2

In questo caso conviene calcolare $\sqrt{s}$ nel sistema del laboratorio. Con ovvio significato dei simboli:

$$
\begin{aligned}
s &= (p_p + p_\gamma)^2 c^2 = ... \\
& (m_p c^2)^2 + 2E_\gamma (E_p - |\mathbf{p}_p| c cos\theta) \\
& (m_p c^2)^2 + 2E_\gamma E_p (1 - cos\theta)
\end{aligned}
$$

dove si è usata l'approssimazione $E_p \simeq |\mathbf{p}_p|c$ (valida nel regime di alte energie) e si è indicato con θ è l'angolo tra $\mathbf{p_p}$ e $\mathbf{p}_\gamma$ Si ottiene:

$$
E_p \geq \frac{(m_\Delta c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{2E_\gamma (1 - cos\theta)}
$$

La soglia minima E_{pt} della reazione si ha in caso di urto *frontale* tra il protone ed il fotone, i.e. $\theta = \pi$:

$$
E_{pt} = \frac{(m_\Delta c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{4E_\gamma} \simeq 5 \cdot 10^{19}\ \mathrm{eV}
$$

Esercizio 3

Un fascio di particelle selezionato in impulso mediante un canale di trasporto magnetico è composto da un insieme di π^+, K^+ e protoni di impulso pari a 400 MeV/c. Il fascio è diretto su un bersaglio di grafite su cui si vogliono studiare reazioni indotte da kaoni. Si decide pertanto di selezionare solamente gli eventi contenenti K^+.
Ci sono a disposizione delle lastre di tre materiali diversi con cui costruire rivelatori Cherenkov:
1) plexiglass ($n = 1.491$),
2) vetro tipo SF5 ($n = 1.67$),
3) vetro tipo SF6 ($n = 1.81$).
Si provi a verificare se, con i materiali a disposizione, è possibile costruire un sistema di due sottili rivelatori, da inserire tra l'uscita del tubo di fascio ed il bersaglio, la cui risposta identifichi in modo univoco il passaggio di un mesone K^+.

Soluzione esercizio 3

SOLUZIONE.

Sfruttando la diversa soglia Cherenkov delle tre particelle si vuole vedere se e' possibile far si' che le 3 particelle diano una risposta diversa nei 2 rivelatori. In particolare si vogliono delle soglie tali che il pione dia risposta in entrambi i rivelatori (sopra soglia per entrambi), il Kaone dia risposta (sia sopra la soglia Ch.) solo in uno dei rivelatori ed infne che il protone non sia mai sopra soglia Cherenkov (nessuna risposta). Valutiamo pertantoil valore di β per le tre particelle ed i valori di soglia dei tre rivelatori. Il valore di β si puo' calcolare come $\beta = p/E$, essendo

$$E = \gamma mc^2$$

,

$$p = \gamma m\beta c$$

. Risulta pertanto:

$$\beta_{\pi+} = 400/\sqrt{400^2 + 139.6^2} = 0.944$$

$$\beta_{K^+} = 400/\sqrt{400^2 + 493.7^2}) = 0.6295$$

$$\beta_p = 400/\sqrt{400^2 + 938^2} = 0.3923$$

Il valore di soglia Cherenkov per i 3 materiali e'

PLEXI: $\beta_t h = 1/1.491 = 0.67069$

SF5: $\beta_t h = 1/1.67 = 0.5988$

SF6: $\beta_t h = 1/1.81 = 0.552$

Ne risulta pertanto che il pi+ e' sopra la soglia di tutti i rivelatori, il K solo dei due vetri, mentre il protone non e' sopra soglia in nessun caso. Utilizzando pertanto un rivelatore di plexigla e uno dei due rivelatori di vetro (indifferente quale), al passaggio di un kaone si avra' segnale nel solo rivelatore di vetro.Tale risposta mi caratterizza in modo univoco il passaggio di un kaone.

0.3 Prova scritta del 07, 09, 2018

Esercizio 1

Il $^{210}_{84}$Po ha un tempo di dimezzamento per decadimento α pari a $T_{1/2} = 138$ giorni. Sapendo che l'energia cinetica della particella α prodotta in ogni suo decadimento è pari a $E_{k,\alpha} = 5.3$ MeV, e che il nucleo figlio risultante è praticamente sempre prodotto nel suo stato fondamentale, si deduca la quantità di calore generata da 5 mg di ^{210}Po in un tempo pari alla sua vita media.

Si esprimano le masse in gioco come il prodotto fra il numero di nucleoni costituenti ogni struttura considerata ed il valore dell'unità di massa atomica $m_U \simeq 931.49$ MeV/c^2.

Si ricordi che 1 J $\simeq 6.242 \times 10^{18}$ eV.

Soluzione esercizio 1

Il decadimento considerato è: $^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\text{Pb} + {}^{4}_{2}\text{He}$, e si conosce l'energia cinetica della particella α emessa: $E_{k,\alpha} = 5.3$ MeV.

Per la descrizione del moto della particella α e del nucleo di rinculo si può in questo caso ricorrere all'approssimazione non relativistica e in base alla conservazione dell'impulso l'energia cinetica del nucleo prodotto nel decadimento è quindi esprimibile come

$$E_{k,nuc} \simeq E_{k,\alpha}\frac{m_\alpha}{M_{nuc}}$$

Conseguentemente, l'energia complessiva liberata in un decadimento radioattivo del tipo considerato è data da

$$E_\alpha \equiv E_{k,\alpha} + E_{k,nuc} \;\simeq\; E_{k,\alpha}\left(1+\frac{m_\alpha}{M_{nuc}}\right) \;\simeq\; 5.3\cdot\frac{210}{206}\ \text{MeV} \;\simeq\; 5.4\ \text{MeV}$$

Il numero medio $n_d(\tau)$ di decadimenti che si verificano in un intervallo di tempo pari alla vita media $\tau = \left(T_{1/2}/ln2\right) \simeq 199$ giorni, del nucleo $^{210}_{84}\text{Po}$ è dato da

$$n_d\left(\tau\right) \;=\; N_0 - N\left(\tau\right) \;=\; N_0\left(1-e^{-\lambda\tau}\right) \;=\; N_0\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

dove N_0 è il numero di nuclei radioattivi presenti all'istante iniziale ($t = 0$), con $N(t)$ il numero di nuclei radioattivi presenti al generico istante t e $\lambda = 1/\tau$ la costante di decadimento del nucleo $^{210}_{84}\text{Po}$.
N_0 è a sua volta dato da

$$N_0 \;=\; N_A\,\frac{m_{\text{Po}}}{A_{\text{Po}}}$$

con N_A il numero di Avogadro, $m_{\text{Po}} = 5$ mg la massa di $^{210}_{84}\text{Po}$ isotopicamente puro inizialmente presente e $A_{\text{Po}} \simeq 210$ g mol^{-1} è il peso atomico dell'isotopo radioattivo considerato.
La quantità di calore $Q(\tau)$ prodotta nell'intervallo temporale compreso fra $t = 0$ e $t = \tau$ è quindi data da

$$\begin{aligned}
Q\left(\tau\right) = \;& n_d\left(\tau\right)E_\alpha \;=\; N_0\left(1-\frac{1}{e}\right)E_\alpha \;=\; N_A\frac{m_{\text{Po}}}{A_{\text{Po}}}\left(1-\frac{1}{e}\right)E_\alpha \simeq \\
& \simeq 6.022\times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}\ \frac{5\times 10^{-3}\ \text{g}}{210\ \text{g mol}^{-1}}\left(1-\frac{1}{e}\right)\times 5.4\ \text{MeV} \simeq \\
& \simeq 4.9\times 10^{19}\ \text{MeV} \simeq \\
& \simeq 7.9\times 10^{6}\ \text{J}
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Una particella carica, di massa ignota M e momento $\mathbf{p}$ molto maggiore della massa dell'elettrone m_e, attraversa un rivelatore. Ad una certa profondità all'interno del materiale attivo del rivelatore, un elettrone atomico viene urtato dalla particella entrante. Vengono misurati l'angolo polare dell'elettrone θ_e rispetto a p e la sua energia E_e. Mostrare che la massa M può essere stimata con la formula:

$$M = |\mathbf{p}| \left[\frac{E_e + m_e}{E_e - m_e} \cdot \cos^2\theta_e - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(Suggerimento: si trascuri il fattore $m_e/|\mathbf{p}|$).

Soluzione esercizio 2

Siano P, P' il quadri-momento della particella sconosciuta, e k, k' il quadri-momento dell'elettrone, prima e dopo l'urto. Con una scelta opportuna del sistema di riferimento:

$$P = (\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + M^2}, |\mathbf{p}|, 0, 0)$$

$$k = (m_e, 0, 0, 0)$$

$$k' = (E_e, \sqrt{E_e^2 - m_e^2}\cos\theta_e, \sqrt{E_e^2 - m_e^2}\sin\theta_e, 0)$$

$$P' = P + k - k'$$

A partire dall'ultima equazione:

$$P'^2 = P^2 + 2Pk - 2Pk' + k^2 + k'^2 - 2kk'$$

$$M^2 = M^2 + 2(m_e - E_e)\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + M^2} + 2|\mathbf{p}|\sqrt{E_e^2 - m_e^2}\cos\theta_e + 2m_e(m_e - E_e)$$

$$0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + M^2} - |\mathbf{p}|\sqrt{\frac{E_e + m_e}{E_e - m_e}}\cos\theta_e + m_e$$

$$0 = \sqrt{1 + \frac{M^2}{|\mathbf{p}|^2}} - \sqrt{\frac{E_e + m_e}{E_e - m_e}}\cos\theta_e + \frac{m_e}{|\mathbf{p}|}$$

$$M \approx |\mathbf{p}| \left[\frac{E_e + m_e}{E_e - m_e}\cos^2\theta_e - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

dove il fattore $m_e/|\mathbf{p}|$ è stato trascurato.

Esercizio 3

Dal centro di uno spettrometro vengono emesse, in seguito all'interazione tra due fasci collidenti, particelle cariche di impulso variabile fino a 0.5 GeV/c. Lo spettrometro ha una simmetria cilindrica (l'asse coincide con quello dei fasci collidenti), un raggio di 0.5 m ed è equipaggiato con 3 strati di rivelatori traccianti, anch'essi a simmetria cilindrica, posti a raggi $R1 = 10$ cm,

$R2 = 30$ cm e $R3 = 50$ cm, e costituiti da camere a fili con i fili paralleli all'asse del cilindro. Si è interessati a rivelare particelle anche nella regione

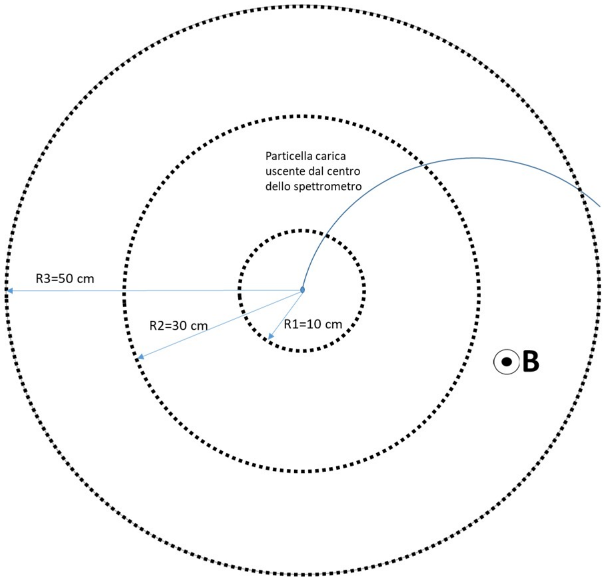


Figura 2: Sezione trasversale dello spettrometro con indicate le posizioni delle 3 camere a fili concentriche e ed un esempio di una particella carica uscente dal centro dello spettrometro

di basso impulso, a partire da $p_m = 0.05$ GeV/c. Qual è il valore massimo B_M dell'intensità del campo magnetico utilizzabile che permette di rivelare particelle di carica unitaria e di impulso 0.05 GeV/c ?
Si noti che per poter essere rivelata una particella deve uscire dallo spettrometro in modo da poter interagire con il resto dell'apparato esterno allo spettrometro (non mostrato in figura).
Si consideri per semplicità il problema proiettato su un piano perpendicolare all'asse dello spettrometro (vedi figura).
Supponendo di aver applicato il campo magnetico B_M si valuti quale potere di risoluzione spaziale σ_x è richiesto alle camere a fili per ottenere un potere risolutivo $\frac{\sigma_p}{p}$ sull'impulso pari al 5% quando l'impulso è pari a $p = 0.5$ GeV/c.
Si supponga di utilizzare il metodo della saggitta per la misura dell'impulso e si giustifichi se è ragionevole farlo.

Soluzione esercizio 3

Affinche' una particella carica possa venir rivelata essa deve avere un raggio di curvatura ρ superiore a meta' del raggio dello spettrometro. A soglia dev'essere pertanto $\rho = 0.5/2\ m = 0.25\ m$. Essendo $p[GeV/c] = 0.3B[T]\rho[m]$, per un impulso di 0.05 GeV/c questo implica l'introduzione di un campo magnetico non superiore a un valore massimo pari a $B_M = \frac{0.05}{0.3\ 0.25}\ m = 0.67\ T$. Siccome il potere risolutivo sull'impulso ha la seguente dipendenza dagli altri parametri

$$\frac{\sigma_p}{p} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{8p}{0.3BL^2} \sigma_x \tag{1}$$

Siccome per un valore dell'impulso $p = 0.5GeV/c$ risulta $\rho = 2.5m$, ne viene che e' ragionevole assumere che la sagitta equivalga all'incirca alla distanza tra la prima e la terza camera a fili ($L = 40cm$) e che l'angolo di deflessione θ sia sufficientemente piccolo: $\theta \sim 0.4/2.5 = 0.16$. Ne viene che dovra' essere

$$\frac{\sigma_p}{p} = 0.05 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{8 \cdot 0.5}{0.3 \cdot 0.67 \cdot 0.4^2} \sigma_x \tag{2}$$

ovvero

$$\sigma_x = 0.05 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{0.3\ 0.67\ 0.4^2}{8 \cdot 0.5} m = 0.00033\ m \tag{3}$$

Il potere risolutivo spaziale dev'essere pertanto pari a $330 \mu m$

0.4 Prova scritta del 21, 09, 2018

Esercizio 1

Si consideri un muone prodotto nell'atmosfera, all'altezza di 8.5 km, dall'interazione fra un raggio cosmico primario e l'atmosfera stessa. Sapendo che dopo prodotto il muone viaggia verso il suolo inclinato di 18 gradi rispetto alla verticale con un impulso di 4.8 GeV/c, e trascurando ogni possibile interazione significativa tra il muone e l'atmosfera, si calcoli la probabilitè che esso raggiunga il suolo prima di decadere.
Si ricordi che la vita media del muone è $\tau_\mu \simeq 2.2\ \mu$s e che la sua massa è $m_\mu \simeq 106$ MeV/c^2.

Soluzione esercizio 1

Un muone, una volta prodotto alla quota z, per giungere al suolo con traiettoria rettilinea inclinata di un angolo ϑ_μ rispetto alla verticale, percorre un tragitto di lunghezza

$$\Delta z_0 \ = \ \sqrt{z^2\left(1+\mathrm{tg}^2\vartheta_\mu\right)} \ = \ \frac{z}{\cos\vartheta_\mu}$$

Lo spazio s percorso dal muone in funzione del suo impulso è dato da

$$s \ = \ \gamma\ v\ t \ = \ \frac{m_\mu \gamma\ v}{m_\mu}\ t \ = \ \frac{p_\mu}{m_\mu}\ t$$

Il tempo necessario al muone per raggiungere il suolo nel proprio sistema di riferimento è quindi

$$t_0 \ = \ \frac{\Delta z_0\ m_\mu}{p_\mu} \ = \ \frac{m_\mu\ z}{p_\mu\ \cos\vartheta_\mu}$$

La probabilità P che il muone raggiunga il suolo è data dalla probabilità che decada solo dopo aver percorso almeno una distanza pari a Δz_0, quindi

$$P \ = \ \frac{\int_{t_0}^{+\infty} e^{-t/\tau_\mu}\mathrm{d}t}{\int_{0}^{+\infty} e^{-t/\tau_\mu}\mathrm{d}t} \ = \ \frac{-\tau_\mu\left[e^{-t/\tau_\mu}\right]_{t_0}^{+\infty}}{-\tau_\mu\left[e^{-t/\tau_\mu}\right]_{0}^{+\infty}} \ = \ e^{-\dfrac{m_\mu\ z}{\tau_\mu\ p\ \cos\vartheta_\mu}} \ =$$

$$\simeq \ e^{\left[-\dfrac{106\ \mathrm{MeV/c^2} \times 8.5\times 10^3\ \mathrm{m}}{2.2\times 10^{-6}\ \mathrm{s}\times 4.8\times 10^3\ \mathrm{MeV/c^2}\times 0.951}\right]} =$$

$$\simeq \ e^{\left[-\dfrac{89.72\times 10^6}{c}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]} \ \simeq \ e^{-0.299} \ \simeq \ 0.74$$

La probabilità che il muone raggiunga il suolo prima di decadere è quindi del 74%, nell'ipotesi che le sue interazioni con i gas dell'atmosfera siano $\approx$ trascurabili.

Esercizio 2

Si dimostri che un fotone non può decadere in un elettrone e un positrone. Posto $c = 1$, si considerino elettrone e positrone come due particelle identiche di quadri-impulsi $P_1 = m_0\,(\gamma_1, \gamma_1\vec{v}_1)$ e $P_2 = m_0\,(\gamma_2, \gamma_2\vec{v}_2)$, e sia $K = \left(\omega, \vec{k}\right)$, con $\vec{k}$ il numero d'onda, il quadri-impulso del fotone.

Soluzione esercizio 2

Utilizzando la conservazione energia-impulso e i prodotti scalari dei quadrivettori si può verificare che il processo di trasformazione di un singolo fotone in una coppia elettrone-positrone è cinematicamente proibito.
Dalla conservazione di energia-impulso si ha $K = P_1 + P_2$. quindi quadrando entrambi i termini si ha

$$K^2 \;=\; 0 \;=\; (P_1 + P_2)^2 \;=\; P_1^2 + 2P_1 \cdot P_2 + P_2^2 \;=\; m_0^2c^2 + 2\left(\frac{E_1E_2}{c^2} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2\right) + m_0^2c^2$$

che implica

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \;=\; m_0^2c^2 + \frac{E_1}{c}\frac{E_2}{c}$$

Ma questo risultato è impossibile in quanto

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 \;=\; p^2 + m^2c^2$$

che vale sempre, implica a sua volta che per particelle dotate di massa sia $p_1 < E_1/c$ e $p_2 < E_2/c$.
Ciò significa infine che il processo è proibito come conseguenza della validità della relatività.

Esercizio 3

Kaoni e pioni carichi di impulso massimo pari a 700 MeV/c vengono rivelati mediante uno spettrometro che ne misura l'impulso. Accoppiato allo spettrometro vi è un misuratore di tempo di volo che viene utilizzato per discriminare in massa le particelle cariche.
Il misuratore di tempo di volo "tof" è composto da $START$ e $STOP$, due

rivelatori identici ($tof = STOP - START$) posti ad una distanza $L = 1$ m e con un potere risolutivo temporale pari a σ_t.
Si calcoli quale valore di σ_t devono possedere i due rivelatori affinchè sia possibile discriminare in massa i Kaoni dai pioni quando questi possiedono il massimo dell'impulso. Si consideri significativa una differenza in tempo di volo se essa è maggiore di $3 \times \sigma_{tof}$.
Qualora si avessero a disposizione due rivelatori con $\sigma_t = 800$ ps, quanto dovrebbero essere distanti i due rivelatori $START$ e $STOP$ affinchè sia possibile discriminare in massa i Kaoni dai pioni a 700 MeV/c?
Si usino i seguenti valori approssimati per la masse e per la velocità della luce:
$m_K = 494\ MeV/c^2$, $m_\pi = 140\ MeV/c^2$, $c = 3\ 10^8\ m/s$

Soluzione esercizio 3

Si calcoli l'energia dei pioni e K:

$$E_\pi = \sqrt{140^2 + 700^2} MeV = 714\ MeV$$
$$E_K = \sqrt{493^2 + 700^2} MeV = 857\ MeV$$

Siccome $\beta = cp/E$ si possono calcolare i valori di β per i pioni e K:

$$\beta_\pi = 0.98$$

$$\beta_K = 0.82$$

Ne viene che

$$tof_\pi = L/\beta_\pi c = 3.4\ ns$$
$$tof_K = L/\beta_K c = 4.1\ ns$$

e quindi la differenza di tempo di volo è

$$\Delta_{tof} = 0.7\ ns$$

Siccome $\sigma_{tof} = \sqrt{2}\sigma_t$ e dev'essere

$$\Delta_{tof} \geq 3\sigma_{tof} = 3\sqrt{2}\sigma_t$$

$$\sigma_t \leq \Delta_{tof}/3\sqrt{2} = 0.7/\sqrt{2}3 = 165\ ps$$

Qualora fosse $\sigma_t = 800\ ps$ sarebbe, definendo $L^{'} = kL$

$$k \times \Delta_{tof} = k \times 0.7\ ns \geq 3\sqrt{2}0.8$$

cioè

$$k \geq 3\sqrt{2} \cdot 0.8/0.7 = 4.5$$

e quindi $L^{'} = 4.5\ m$

0.5 Prova scritta del 31, 01, 2019

Esercizio 1

L'energia di legame del nucleo di deuterio ${}^2_1$H è di 2.23 MeV e quella del nucleo di tritio ${}^3_1$H è di 8.48 MeV.
Quale energia serve per portare due nuclei di deuterio alla distanza di 1.44×10^{-13} cm? (Si giustifichi la risposta).
Se una volta raggiunta questa configurazione ha luogo la reazione di fusione

$$ {}^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^3_1\mathrm{H} + \mathrm{X} $$

si calcolino la temperatura corrispondente e l'energia prodotta nella fusione e si dica a quale particella corrisponde X.
(Si ricordi che la costante di Boltzman vale: 8.6×10^{-11} MeV/K)

Soluzione esercizio 1

Assumendo per il deutone "d" un raggio medio $\langle R_d \rangle$ dato dalla relazione $R = R_0 A^{1/3}$ per il raggio dei nuclei, con $R_0 = 1.16 \times 10^{-15}$ m, si nota che alla distanza di 1.44×10^{-13} cm l'interazione fra i due nuclei di deuterio è praticamente ancora tutta elettromagnetica, di fatto elettrostatica.
Per calcolare l'energia cinetica necessaria a portarli a quella distanza reciproca, basta quindi valutare l'energia elettrostatica E_{el} di due cariche protoniche q puntiformi poste a quella stessa distanza, con velocità relativa nulla:

$$ E_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\langle R_d \rangle} = \frac{\alpha \, \hbar \, c}{\langle R_d \rangle} $$

e ricordando che:
$\alpha = 1/(137.036)$,
$\hbar = 6.582 \times 10^{-22}$ MeV×s,
$c = 2.998 \times 10^8$ m/s
si ottiene:

$$ E_{el} \simeq 1 \text{ MeV} $$

Per stimare la temperatura T alla quale si trova il sistema di due nuclei di deuterio nella configurazione descritta si ponga

$$ E_{el} = k \, T \qquad \text{da cui} \qquad T = \frac{E_{el}}{k} $$

da cui sostituendo i valori per k ed E_{el}

$$ T \simeq 1.16 \times 10^{10} \text{ K} $$

La particella X che viene prodotta assieme al tritio nel processo di fusione dei due deutoni è un protone. Applicando quindi la conservazione dell'energia alla reazione

$$^2_1\mathrm{H} + ^2_1\mathrm{H} \longrightarrow \, ^3_1\mathrm{H} + p$$

e ricordando che

$$m_p \;\simeq\; 938.27 \text{ MeV}/c^2 \quad \text{ed} \quad m_n \;\simeq\; 939.56 \text{ MeV}/c^2$$

si ha,

$$2\,(m_p + m_n)\,c^2 - 2 \times 2.23 \text{ (MeV)} \;=\; (2m_n + m_p)\,c^2 + m_p c^2 - 8.48 \text{ (MeV)} + Q$$

da cui, sostituendo

$$Q \;=\; 4.02 \text{ MeV}$$

che è il Q-valore della reazione, ovvero l'energia prodotta nella fusione.

Esercizio 2

Si intende effettuare un esperimento utilizzando un fascio di Kaoni carichi di 300 MeV/c forniti da un canale di trasporto magnetico. Il fascio di Kaoni è tuttavia contaminato da un numero non trascurabile di protoni.
Si vuole misurare la percentuale di protoni presenti nel fascio mediante una discriminazione basata sul range, da effettuarsi con un contatore di particelle e un assorbitore costituito da spessori di 1 cm di materiale plastico (lucite, densità 1 g/cm^3) da porsi davanti al contatore.
Si conosce il range di protoni di 500 MeV/c che è pari a 14.2 g/cm^2.
È possibile discriminare le 2 particelle?
Quanti spessori si dovranno usare?

Soluzione esercizio 2

Nella zona non relativistica il range di una particella di massa M, carica z ed energia E è:

$$R(E) = \frac{k}{Mz^2} E^2$$

Siccome le particelle sono non relativistiche (giustificare), possiamo usare la formula precedente. Calcoliamo le energie in gioco:

$E_K(p = 300\ MeV/c) = 84\ MeV$
$E_p(p = \ 300 MeV/c) = 48\ MeV$
$E_p(p = \ 500 MeV/c) = 125\ MeV$

Sapendo che $R(E_p = 125\ MeV) = 14.2\ g/cm^2$, possiamo ricavare k:
$k = 14.2 \times 938/(125)^2 = 0.85\ gMeV^{-1}cm^{-2}$

Pertanto il range del Kaone sarà
$R_K(300\ MeV/c) = k \cdot (84)^2/494\ gcm^{-2} = 12.1\ gcm^{-2}$
mentre quello dei protoni sarà
$R_p(300 MeV/c) = k \cdot (48)^2/938\ gcm^{-2} = 2.1 g\ cm^{-2}$.

Tenendo conto della densità ne viene che

$r_K(300\ MeV/c) = 12.1\ cm$ ed $r_p(300\ MeV/c) = 2.1\ cm$

Basterà quindi introdurre uno spessore di 3 cm per fermare tutti protoni e lasciar passare tutti i K.

Esercizio 3

Nel 1955 Emilio Segrè, Owen Chamberlain e collaboratori scoprirono al Bevatron di Berkeley l'antiprotone, nelle collisioni di un fascio di protoni su bersaglio fisso. Assumendo che il bersaglio sia costituito da soli protoni:

1) qual'è il numero minimo di particelle che è necessario siano presenti nello stato finale per produrre un antiprotone ?

2) qual'è il momento minimo del protone proiettile p_{min} necessario per la reazione 1) ?

3) qual'è la velocità delle particelle prodotte nel sistema di riferimento del laboratorio ?

4) quale famiglia di rivelatori potrebbe essere utilizzata per distinguere le particelle prodotte in questo processo dal fondo causato da altri tipi di collisioni ?

Soluzione esercizio 3

1) Per la conservazione del numero barionico, lo stato finale deve contenere almeno due barioni, se lo stato finale include un antiprotone per la conservazione del nomero barionico e per la conservazione della carica elettrica è necessario un ulteriore barione, quindi lo stato finale deve contenere 4 particelle, 3 protoni ed un antiprotone.

2) Nel sistema del centro di massa: $s_{min} = (4m_p)^2 = 16m_p^2$.
Nel sistema del laboratorio: $s_{min} = ((E_{min}, p_{min}) + (m_p, 0))^2 = m_p^2 + 2E_{min}m_p + m_p^2 = 2m_p^2 + 2E_{min}m_p$.
Quindi $E_{min} = 7m_p = 6.568$ GeV, e $p_{min} = \sqrt{E_{min}^2 - m_p^2} = \sqrt{48}m_p = 6.501$ GeV.

3) Le particelle dello stato finale sono a riposo nel sistema del centro di massa (perchè siamo all'energia di soglia del processo), e quindi si muovono nel sistema del laboratorio alla stessa velocità del centro di massa. Siano E_C e p_C l'energia ed il momento del centro di massa nel sistema del laboratorio. Usando $p_C = p_{min} = \sqrt{48} m_p$ (per la conservazione del momento) ed $E_C = E_{min} + m_p = 8 m_p$, la velocità del centro di massa è $v_C = p_C/E_C = \sqrt{48}/8 = 0.866$.

0.6 Prova scritta del 21, 02, 2019

Esercizio 1

Un fascio di muoni percorre un anello di raggio $r = 14$ m, sottoposto a un campo magnetico uniforme di intensità $B = 0.5$ T, orientato ortogonalmente al piano dell'anello.
Si calcolino l'impulso dei muoni, il loro periodo di rivoluzione e la frazione di essi che decade nell'arco di tempo di un periodo.
(Si ricordi che la massa m_μ di un muone è pari a 105 MeV/c^2, e che la sua vita media τ_μ vale 2.2×10^{-6} s)

Soluzione esercizio 1

- Impulso -
Impostando l'uguaglianza tra forza centripeta e forza di Lorentz sul muone, e ricordando l'equivalenza Joule%eV, si ottiene $p = 2.1$ GeV/c.

- Periodo di rivoluzione -
Osservando che un muone da 2.1 GeV/c è praticamente relativistico e che quindi la sua velocità è praticamente pari a c, si trova il periodo banalmente come $T = \dfrac{2\pi r}{c}$ per cui $T = 2.9 \times 10^{-7}$ s.

Si può anche partire da $p = m_\mu \gamma v$, ricordando che $\gamma = 1/\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$, per ottenere $v = \sqrt{\dfrac{p^2/m_\mu^2}{1 - p^2/m_\mu^2 c^2}}$, da cui $v/c \simeq 0.99875\ c$.

- Frazione di μ che decade nell'arco di un periodo T -
Il numero $N(t)$ di muoni presenti al tempo t è dato dalla legge $N(t) = N_0 e^{-t/\tau_\mu}$.
Detta $f(T)$ la frazione di muoni che decade in un periodo T si ha:
$f(T) = [N(t) - N(t + \mathrm{T})]/N(t) = (1 - e^{-T/\tau})$.
Ma la vita media da considerarsi è quella τ_μ^* *dilatata* del fattore γ dei muoni di impulso p, cioè $\gamma = \sqrt{1 + p^2/m_\mu^2 c^2}$. Per muoni da 2.1 GeV/$c$ si ha $\gamma \simeq 14.82$ e quindi $\tau_\mu^* \simeq 3.26 \times 10^{-5}$ s.
Se ne deduce quindi: $f(T) \simeq 0.0088$ ovvero lo 0.88%.

Esercizio 2

A causa di un intenso flusso di fotoni di bassa energia è necessario provvedere a schermare una estesa area di lavoro.

I fotoni hanno energie variabili fino a circa 1 MeV, cioè ad un valore inferiore a quello (di circa 8 MeV) dove il ferro presenta la massima trasparenza in seguito a una progressiva diminuzione del coefficiente di assorbimento.
Si pensa di utilizzaare degli spessori di ferro ($\rho = 7.8gcm^{-3}$).
Si intende ridurre, su tutto lo spettro energetico, il flusso di fotoni di un un fattore 10^{-3} almeno e si conosce il valore del coefficiente di assorbimento a 1 MeV:

$$\mu(1MeV) = 7 \times 10^{-2} cm^2 g^{-1}$$

Quale spessore di ferro è necessario introdurre?
Il coefficiente di assorbimento relativo alla sezione d'urto fotoelettrica a E=100 KeV è pari a

$$\mu(0.1MeV) = 2 \times 10^{-1} cm^2 g^{-1}$$

Se il flusso di fotoni fosse tutto di questa energia quale spessore sarebbe sufficiente? Tale spessore sarebbe sufficiente per schermare le energie inferiori ai 100 KeV?

Soluzione esercizio 2

Siccome il coefficiente di attenuazione decresce fino al valore di minimo posto a 10 MeV, il valore a 1 MeV e' il valore minimo nell'intervallo 0-1 MeV. Pertanto lo spessore di ferro sufficiente a schermare ad 1 MeV sara' a maggior ragione sufficiente a schermare a energie inferiori. Siano Φ e Φ_0 i flussi di fotoni incidenti e trasmessi attraverso lo spessore di ferro; dovrà essere

$$\Phi/\Phi_0 = 10^{-3} = e^{-\mu(1MeV)\cdot X} = e^{-\mu(1MeV)\cdot\rho\cdot x}$$

pertanto

$$ln(10^{-3}) = ln(e^{-0.07\cdot 7.8x})$$

ovvero

$$x = 3/[0.546 \cdot ln(10)] = 12.6cm$$

A 100 keV non conosciamo il coeff. di assorbimento ma solo la sua componente fotoelettrica, che sarà inferiore a quella totale. Possiamo perciò calcolarci solamente un valore di spessore che sarà sicuramente sovrastimato. Come prima

$$10^{-3} = e^{-\mu(0.1MeV)\cdot\rho\cdot x}$$

$$ln(10^{-3}) = ln(e^{-0.2\cdot 7.8\cdot x})$$

$$x = 3/[0.2 \cdot 7.8 \cdot ln(10)] = 1.92cm$$

Data la dipendenza energetica della sezione d'urto fotoelettrica, velocemente discendente con l'energia, tale spessore sarà sicuramente sufficiente a schermare alle energie inferiori a 100 KeV.

Esercizio 3

Un positrone e^+ con energia cinetica pari a 1.000 MeV urta frontalmente un elettrone e^- a riposo. Nella collisione le due particelle annichiliscono e producono due fotoni di uguale energia, ciascuno ad un angolo θ rispetto alla direzione di volo del positrone.
Determinare l'energia E, il momento p, e l'angolo θ di ciascun fotone.

Soluzione esercizio 3

Il positrone incidente, con una massa a riposo $m = 0.511$ MeV$/c^2$, ha un momento p lungo la direzione x ed energia cinetica K.
Usando le relazioni: $v = \frac{c}{\sqrt{1+(mc/p)^2}}$ e $K = (\gamma - 1)mc^2$, si ha che $p = \sqrt{K(K + 2m^2c^4}/c$, da cui $p = 1.422$ MeV$/c$ per $K = 1.000$ MeV.
L'energia totale del positrone in moto e dell'elettrone a riposo è $E = K + 2mc^2 = 2.022$ MeV.
I due fotoni prodotti dalla collisione hanno ciascuno energia $E_\gamma = \frac{1}{2}E = 1.011$ MeV, in base alla conservazione dell'energia, e momento $p_\gamma = E_\gamma/c = 1.011$ MeV$/c$.
I due fotoni hanno entrambi direzioni che fanno angoli $\pm\theta$ rispetto all'asse x. Per la conservazione del momento lungo l'asse x, $p = 2p_\gamma \cos\theta$, da cui $\theta = 45.3°$.

0.7 Prova scritta del 19, 06, 2019

Esercizio 1

In un acceleratore circolare di lunghezza $L = 300$ m scorre un fascio di antiprotoni di impulso $|\vec{p}| = 6$ GeV/c che produce una corrente di intensità pari ad $I = 0.16$ mA.
A ogni rivoluzione il fascio incontra un bersaglio di idrogeno gassoso di densità superficiale $\delta = 10^{14}$ cm^{-2}.
Si valuti la luminosità integrata in un intervallo di tempo $\Delta t = 10$ min.
Si valuti l'energia di fascio che sarebbe stata necessaria per ottenere la stessa energia nel sistema del centro di massa all'interno di un collisore protoni-antiprotoni.

Soluzione esercizio 1

Per la velocità degli antiprotoni del fascio si ha

$$|\vec{v}| = \frac{|\vec{p}|c^2}{\sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m_p^2c^4}} \simeq 0.988\ c$$

che è inferiore a c dell' 1% circa. Si ha quindi, per la frequenza di rivoluzione degli antiprotoni nell'anello dell'acceleratore:

$$\nu_r = \frac{|\vec{v}|}{L} \ \approx\ \frac{3 \times 10^8}{300}\ [\mathrm{s}^{-1}] \ =\ 1.0\ \mathrm{MHz}$$

da cui si ottiene il numero $n_{\overline{p}}$ di antiprotoni circolanti col fascio

$$n_{\overline{p}} \ =\ \frac{I}{e \cdot \nu_r} \ =\ \frac{0.16 \times 10^{-3}}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^6} \ =\ 1.0 \times 10^9$$

Gli atomi di idrogeno del bersaglio gassoso possono essere considerati praticamente in quiete, a confronto delle velocità degli antiprotoni incidenti, per cui la luminosità sarà data dall'espressione

$$L \ =\ \Phi_{\overline{p}} \cdot \delta \ =\ \frac{I}{e} \cdot \delta \ =\ \frac{0.16 \times 10^{-3} \times 10^{14}}{1.6 \times 10^{-19}}\ \mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1} \ =\ 10^{29}\ \mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$$

La luminosità integrata dopo un tempo $\Delta t = 10$ min è quindi

$$L_{int} \ =\ L \cdot \Delta t \ = 10^{29} \times (10 \times 60)\ \mathrm{cm}^{-2} \ =\ 60\ \mu\mathrm{b}^{-1}$$

ricordando che 1 cm$^2 = 10^{24}$ b.
Per quanto concerne l'energia di fascio necessaria nel caso di un collider con fasci di protoni e antiprotoni, per disporre nel centro di massa della stessa energia ottenibile nel caso di bersaglio gassoso sopra citato, si ricordi che

la quantità s è un invariante relativistico che nel caso di bersaglio fisso si scrive:

$$\sqrt{s} \;=\; \sqrt{m_p^2 c^4 + m_{\overline{p}}^2 c^4 + 2E_p m_p c^2} = \sqrt{2m^2c^4 + 2E_p mc^2}$$

essendo E_p l'energia cinetica dei protoni nel Laboratorio ed $m = m_p = m_{\overline{p}}$. Nel caso di collider si trova che $\sqrt{s} \;= 2E^*$, essendo E^* l'energia sia delle particelle del fascio di p che di quello di $\overline{p}$. Si ha quindi:

$$\sqrt{s} \;=\; 2E^* \;=\; \sqrt{2m^2c^4 + 2E_p mc^2} \;=\; \sqrt{2m^2c^4 + 2mc^2\left(|\vec{p}|^2 + m^2c^4\right)^{1/2}}$$

e sostituendo i valori per mc^2 e per $|\vec{p}|$ si ottiene $E^* \simeq 1.81$ GeV.

Esercizio 2

Un apparato sperimentale costituito da uno spettrometro per la misura dell'impulso, e da un sottile rivelatore di scintillatore plastico (0.5 cm), posto subito fuori dallo spettrometro allo scopo di misurare il rilascio di energia delle particelle cariche, viene utilizzato per identificare in massa frammenti nucleari costituiti da nuclei di deuterio, trizio ed ^{3}He.
Si è interessati in particolare a identificare tali nuclei leggeri nella regione di impulso vicina a $p = 4$ GeV/c.
A 4 GeV/c la perdita media di energia dei tritoni nello scintillatore è pari a $\langle \Delta E_t \rangle = 1$ MeV.

Si chiede se sarà possibile discriminare la massa dei deutoni e dei nuclei di ^{3}He da quella dei tritoni, richiedendo come criterio di discriminazione che la differenza delle energie medie rilasciate sia maggiore della somma delle FWHM (larghezze a metà altezza).
Si consideri che la risposta dello scintillatore fluttua all'incirca del 20% (cioè la risoluzione $R = \mathrm{FWHM}/\langle \Delta E \rangle = 20\%$).
Per semplicità si assuma che le masse dei nuclei in oggetto siano: $m_t = m_{^3He} = 3/2(m_d)$, essendo $m_d = 1.88$ GeV/c^2 e si trascurino le dipendenze logaritmiche.

Soluzione esercizio 2

Siccome la perdita di energia per collisione, descritta dalla curva di B-B, dipende da z^2/β^2 della particella incidente, trascurando la dipendenza logaritmica, e' possibile valutare, a partire dalla perdita di energia del tritone, $\langle E_t \rangle = 1MeV$, quella degli altri nuclei.

$$\langle \Delta E_d \rangle = \langle \Delta E_t \rangle \frac{z_d^2}{z_t^2} \times \frac{\beta_t^2}{\beta_d^2}$$

Si tratta pertanto di valutare la velocita' dei 3 nuclei, ad esempio tramite la relazione $\beta = P/E$

$m_t = m_{^3He} = m_d * 3/2 = 2.82$ GeV/c^2
$E_d = \sqrt{P^2 + m_d^2} = \sqrt{16 + 1.88^2}$ GeV = 4.42 GeV
$E_t = E_{^3He} = \sqrt{P^2 + m_t^2} = \sqrt{16 + 2.82^2} \sim$ GeV = 4.89 GeV
$\beta_d = 0.90$
$\beta_t = \beta_{^3He} = 0.82$

Pertanto,
$\langle \Delta E_d \rangle = \langle \Delta E_t \rangle \frac{z_d^2}{z_t^2} \times \frac{\beta_t^2}{\beta_d^2} = 1 \text{ MeV} \times (0.82/0.9)^2 = 0.83 \text{ MeV}$

e
$\langle \Delta E_{^3He} \rangle = \langle \Delta E_t \rangle \frac{z_{^3He}^2}{z_t^2} \times \frac{\beta_t^2}{\beta_{^3He}^2} = 1 \text{ MeV} \times 4 = 4 \text{ MeV}$

Ne viene che
$\text{FWHM}_d = 0.2 \times 0.86 \text{ MeV} = 0.172 MeV$
$\text{FWHM}_t = 0.2 \times 1 \text{ MeV} = 0.2 MeV$
$\text{FWHM}^3 He = 0.2 \times 4 \text{ MeV} = 0.8 MeV$

e
$\text{FWHM}_d + \text{FWHM}t = 0.372$ MeV
$\text{FWHM}_{^3He} + \text{FWHM}_t = 1$ MeV

$\langle \Delta E_{^3He} \rangle - \langle \Delta E_t \rangle = 3MeV > 1$ MeV

$\langle \Delta E_t \rangle - \langle \Delta E_d \rangle = 0.17MeV < 0.372$ MeV

È pertanto possibile discriminare il tritone dal nucleo di ^3He ma non dal deutone.

Esercizio 3

Quali dei seguenti decadimenti non possono avvenire perchè la legge di conservazione del numero leptonico è violata ?

- $n \to pe^-$
- $\mu^+ \to e^+ \bar{\nu}_e$
- $\pi^+ \to e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$

- $p \to ne^+\nu_e$
- $\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e$
- $\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_m u$
- $\Lambda^0 \to \pi^- p$
- $K^+ \to \mu^+\nu_\mu$

Quali delle seguenti reazioni non possono avvenire perchla legge di conservazione della stranezza è violata ?

- $pn \to pp\pi^-$
- $pn \to ppK^-$
- $K^-p \to K^-\Sigma^+$
- $\pi^-p \to K^+\Sigma^-$
- $K^-p \to \Xi^0 K^+\pi^-$
- $K^-p \to \Xi^0\pi^-\pi^-$
- $\pi^+p \to \Sigma^+K^+$
- $\pi^-n \to K^-\Lambda^0$

Identificare possibili canali di decadimento per le seguenti antiparticelle:

- $\bar{n}$
- $\bar{\Lambda}^0$
- Ω^-
- K^-
- Σ^-

Le seguenti reazioni nuclearti forti sono vietate. Identificare una legge di conservazione violata in ciascun caso.

- $p\bar{p} \to pn\bar{p}$
- $pn \to p\bar{p}n\pi^+$
- $\pi^-p \to \Sigma^+K^+$
- $K^-p \to \Lambda^0 n$

In ciascuna delle seguenti reazioni manca una particella X. Identificare quale.

- $p\bar{p} \to nX$
- $pp \to p\Lambda^0 X$
- $\pi^- p \to \Sigma^- X$
- $K^- n \to \Lambda^0 X$
- $\tau^+ \to e^+ \nu_e X$
- $\bar{\nu}_e p \to nX$

Soluzione esercizio 3

Lasciata al lettore.

0.8 Prova scritta dell' 1, 07, 2019

Esercizio 1

Si determini l'energia di legame di una particella α nel nucleo di ${}^{20}_{10}$Ne sapendo che l'energia media di legame di un nucleone nel nucleo di ${}^{4}_{2}$He è pari a -7.08 MeV.
Cosa si può dire, in base al risultato ottenuto, in merito alla possibilità per il ${}^{20}_{10}$Ne di decadere α?

Soluzione esercizio 1

Il nucleo di ${}^{20}_{10}$Ne e quello di ${}^{16}_{8}$O che si ottiene dal precedente togliendogli due protoni e due neutroni, si trovano entrambi in quella zona dove l'energia di legame di un nucleo può essere ben rappresentata dalla formula di Weizsäker:

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_0(A,Z) &= \mathrm{B}_V(A) + \mathrm{B}_S(A) + \mathrm{B}_C(A,Z) + \mathrm{B}_{sim}(A,Z) + \mathrm{B}_{ac}(A,Z) = \\ &= b_V A + b_S A^{2/3} + b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + b_{sim}\frac{(A-2Z)^2}{A} + b_{ac}\frac{\delta(A,Z)}{A}\end{aligned}$$

con,

$$\begin{cases} b_V = -15.56 & \mathrm{MeV} \\ b_S = +17.23 & \mathrm{MeV} \\ b_C = +0.697 & \mathrm{MeV} \\ b_{sim} = +19.1 & \mathrm{MeV} \\ b_{ac} = +135.0 & \mathrm{MeV} \end{cases}$$

L'analisi fenomenologica delle sequenze isobariche suggerisce di porre $\delta(A,Z) = -1$ se N e Z sono entrambi pari, $\delta(A,Z) = 0$ se N e Z sono l'uno pari e l'altro dispari, o viceversa, e $\delta(A,Z) = +1$ se N e Z sono entrambi dispari.
L'energia di legame della particella α è

$$\mathrm{B}(\alpha) \ = \ 4 \times -7.08 \ = \ -28.32 \text{ MeV}$$

Le energie di legame dei nuclei di ${}^{20}_{10}$Ne e ${}^{16}_{8}$O, calcolate tramite la formula di Weizsäker tenendo conto che sono entrambi nuclei pari-pari, risultano

$$\begin{aligned}\mathrm{B}({}^{20}_{10}Ne) \ &= \ -(161.14 + 6.75) \ = \ -167.89 \text{ MeV} \\ \mathrm{B}({}^{16}_{8}O) \ &= \ -(124.07 + 8.44) \ = \ -132.50 \text{ MeV}\end{aligned}$$

L'energia di legame di un'ipotetica particella α formatasi entro un nucleo di neon sarebbe quindi data da

$$\mathrm{B}({}^{20}_{10}Ne) - \mathrm{B}({}^{16}_{8}O) - \mathrm{B}(\alpha) \ = \ -167.89 + 132.50 + 28.32 \ = \ -7.07 \text{ MeV}$$

Essendo negativa non vi è possibilità che la particella α possa attraversare la barriera coulombiana per effetto tunnel ed essere emessa come radioattività

α dal neon.

Esercizio 2

Si considerino i decadimenti del mesone K^0 in due pioni carichi, $\mathrm{K}^0 \to \pi^+\pi^-$. Come indicato, i pioni hanno cariche uguali ed opposte, ed uguale massa a riposo, $m_\pi = 140$ MeV/c^2.
Supponendo che nel decadimento a riposo di un K^0 in due pioni in una cameraa bolle immersa in un campo magnetico $B = 2.0$ T il raggio di curvatura delle tracce prodotte dai pioni sia misurata essere pari a 34.4 cm, si determinino i momenti e le velocità dei pioni e la massa a riposo del K^0.

Soluzione esercizio 2

Il momento p, la carica elettrica e, ed il campo magnetico B sono legati al raggio di curvatura R dalla relazione: $p = eBR$.
Usando $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C, 1 MeV=1.602×10^{-13} J e $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, si ottiene $p = 300BR$, con p in MeV/c, B in Tesla, ed R in metri, da cui il momento di ciascun pione risulta essere $p = 206$ MeV/c.
Dalla relazione: $v = \frac{c}{\sqrt{1+(mc/p)^2}}$, la velocità di ciascun pione è $v = 0.827c$.
Dalla relazione: $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, l'energia di ciascun pione è $E = 249$ MeV. Usando la conservazione dell'energia, $m_Kc^2 = 2E$, si ottiene $m_K = 498$ MeV/c^2.

Esercizio 3

Un fascio di kaoni positivi di 5 MeV viene fatto incidere su di uno scintillatore di 1 mm di spessore, all'interno del quale i K^+ si fermano. Il K^+ decade nel 63.6 % dei casi nella coppia $\mu^+\nu_\mu$.
Si vuole misurare la vita media dei kaoni andando a porre un rivelatore a luce Cherenkov subito di fronte allo scintillatore misurando l'intervallo di tempo intercorso tra l'arrivo del K^+ sullo scintillatore (START) e quello del muone di decadimento (STOP).
Il rivelatore Cherenkov è composto da uno spessore di 2 cm di perspex (n=1.49, $\rho = 1.2$ g/cm^3) accoppiato ad un fotomoltiplicatore.
1) Il muone sarà in grado di dare un segnale Cherenkov? In che modo si potrebbe determinare la vita media del kaone?
2) Siccome il fotomoltiplicatore fornisce molti segnali di STOP dovuti al rumore elettronico si decide di mettere in coincidenza un secondo rivelatore Cherenkov identico al primo e subito adiacente ad esso. Il secondo rivelatore

darà un segnale Cherenkov al passaggio del muone? Si assuma che il muone abbia una $dE/dX = 2.5\ MeV/g * cm^2$ e si considerino per semplicità solo muoni incidenti perperpendicolarmente ai rivelatori.
3) Si sarebbe potuto utilizzare un rivelatore Cherenkov anche per la rivelazione dei K^+ e la determinazione dello START?
Si trascuri l'energia persa dal muone all'interno dello scintillatore.
Si usino i seguenti valori per le particelle in gioco: $m_K = 494\ MeV$, $m_\nu = 0\ MeV$, $m_\mu = 106\ MeV$.

Soluzione esercizio 3

1) Il decadimento in due corpi comporta che le due particelle siano emesse al medesimo impulso calcolabile tramite la relazione

$$|\vec{p}\,| = \frac{\sqrt{\left[M^2c - (m_1 - m_2)^2 c\right]\left[M^2c - (m_1 + m_2)^2 c\right]}}{2M} \tag{4}$$

Utilizzando i valori indicati si ottiene
$p = 236 MeV/c$
Siccome vogliamo calcolarci $\beta = p/E$ calcoliamo $E_\mu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} = \sqrt{236^2 + 106^2} = 259 MeV$
ed infine
$\beta_\mu = 236/259 = 0.91$
Siccome la soglia Cherenkov per il rivelatore è a $\beta = 1/n = 0.67$ il muone fornirà sicuramente un segnale Cherenkov.

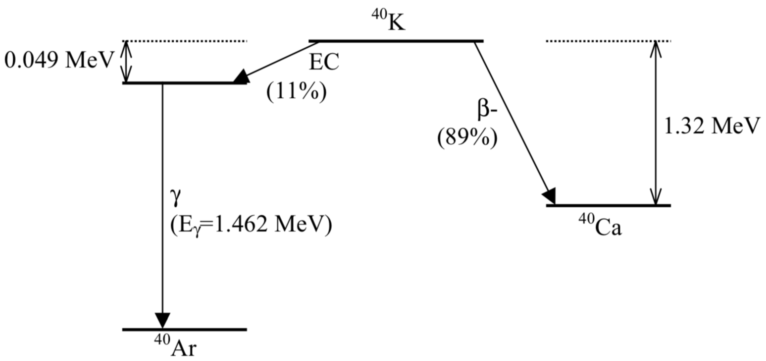
2) La perdita di energia nel primo rivelatore è pari a $\Delta E = dE/dX \times 2cm \times 1.2g/cm^3 = 2.5MeV/g * cm^2 \times 2cm \times 1.2g/cm^3 = 6MeV$ e quindi il muone entra nel secondo rivelatore con un'energia pari a 259-6=253 MeV e un impulso pari a $p_{\mu 2} = \sqrt{253^2 - 106^2} = 230MeV/c$.
Ne viene che la velocità $\beta_{\mu 2} = 230/253 \sim 0.91$ è ancora largamente sopra soglia.

3) Un K di 6 MeV ha una velocità $\beta \sim 0.02$ che è largamente sotto soglia e quindi non può fornire alcun segnale Cherenkov.

0.9 Prova scritta del 15, 07, 2019

Esercizio 1

Un importante nucleo radioattivo non appartenente a catene di decadimenti in cascata è l'isotopo ^{40}K del potassio, presente in molti minerali utilizzati come materiali per costruzioni, oltre che in alcuni frutti come le banane. Esso decade β^- e per cattura elettronica K secondo lo schema



Sapendo che il tempo di dimezzamento del ^{40}K è $T^{1/2} = 1.27 \times 10^9$ anni, che l'abbondanza naturale di tale isotopo del potassio è pari allo 0.0118 %, e che la composizione isotopica del potassio naturale è $\sim 93\%$ di ^{39}K e $\sim 7\%$ di ^{41}K, si calcoli l'attività specifica del potassio naturale.

Soluzione esercizio 1

Il tempo di dimezzamento del ^{40}K, pari a $T^{1/2} = 1.27 \times 10^9$ anni $\simeq 4.01 \times 10^{16}$ s è così lungo a confronto delle scale temporali direttamente accessibili sperimentalmente che l'attività $\mathcal{A}$ del ^{40}K può con buona approssimazione essere considerata costante.
Detti $\lambda = \ln 2/T^{1/2}$ la costante di decadimento del ^{40}K ed N il numero di isotopi di ^{40}K in un campione naturale di potassio di massa m, l'attività specifica cercata a è

$$a \equiv \frac{\mathcal{A}}{m} = \frac{\lambda N}{m}$$

essendo

$$N = N_A \frac{m^*}{A} = N_A \frac{fm}{A}$$

con N_A il numero di Avogadro, m^* la massa di ^{40}K presente in un campione naturale di potassio di massa m, $f = 0.018$ % la frazione di ^{40}K presente nel campione considerato, essendo $A = (39 \times 0.93 + 41 \times 0.07)$ g mol^{-1} il peso atomico del potassio nella sua composizione naturale (~ 93 % di ^{39}K,

~ 7 % di ^{41}K).
Per l'attività specifica a del potassio naturale si ha quindi

$$\begin{aligned} a &= \frac{\ln 2 \; N_A \; f \; m}{m \; A \; T^{1/2}} = \frac{\ln 2 \; N_A \; f}{A \; T^{1/2}} \simeq \\ &\simeq \frac{(6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1})(1.18 \times 10^{-4})}{(39.14 \text{ g mol}^{-1})(4.01 \times 10^{16} \text{ s})} \simeq \\ &\simeq 31.4 \text{ s}^{-1} \text{ g}^{-1} = 31.4 \text{ Bq g}^{-1} \end{aligned}$$

per cui l'attività specifica del potassio naturale è pari a circa 0.85 nCi g^{-1}.

Esercizio 2

Quali dei seguenti decadimenti non possono avvenire tramite interazione forte ? Perchè ?

- $K^- p \rightarrow K^0 n$
- $K^0 p \rightarrow K^+ n$
- $K^0 p \rightarrow K^+ \pi^0$
- $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- p$

Stabilire quali di questi processi sono proibiti e quali sono permessi. Specificare la natura dell'interazione dei processi consentiti e le leggi di conservazione violate nel caso dei processi proibiti.

- $p \rightarrow n e^+ \nu_e$
- $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma$
- $\mu^- p \rightarrow \Lambda^0 \nu_\mu$
- $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 \mu^+ \nu_\mu$
- $\Sigma^+ d \rightarrow \pi^+ \Sigma^-$
- $\Delta^0 \rightarrow p \pi^-$

Soluzione esercizio 2

- $K^- p \rightarrow K^0 n$: si tratta di un processo consentito perchè conserva sia la carica che il numero barionico, ma lo è per le interazioni deboli e non per le interazioni forti perchè è violata la stranezza.

- $K^0 p \to K^+ n$: il processo è consentito in quanto conserva sia la carica che il numero barionico, e poichè è conservata anche la stranezza, è un processo consentito per le interazioni forti.

- $K^0 p \to K^+ \pi^0$: il processo viola il numero barionico pertanto è un processo non consentito per nessun tipo di interazione.

- $\Lambda^0 \to \pi^- p$: la massa della Λ^0 è circa 1116 MeV, quella del protone circa 938 MeV e quella del pione circa 140 MeV, quindi il decadimento è cinematicamente permesso. È un processo debole perchè non conserva la stranezza.

- $p \to n e^+ \nu_e$: la massa del protone è minore di quella del neutrone, pertanto il processo non è permesso.

- $\Sigma^0 \to \Lambda^0 \gamma$: la massa della Σ è 1193 MeV e quella della Λ è 116 MeV. Il processo è permesso dal punto di vista energetico, è permesso dalle leggi di conservazione ed è un processo elettromagnetico in quanto coinvolge un fotone.

- $\mu^- p \to \Lambda^0 \nu_\mu$: il processo è permesso, non conserva la stranezza, è dunque possibile per interazione debole.

- $\Sigma^+ \to \Lambda^0 \mu^+ \nu_\mu$: la massa della Σ^+ è 1189 MeV, quella della Λ è circa 1116 MeV e quella del μ è circa 105 MeV. Pertanto il decadimento è energeticamente proibito. Il decadimento non è possibile anche se tutte le altre leggi di conservazione sarebbero rispettate.

- $\Sigma^+ d \to \pi^+ \Sigma^-$: la reazione non è permeessa per nessun tipo di interazione perchè viola sia la carica che il numero barionico.

- $\Delta^0 \to p \pi^-$: la massa della Δ^0 è circa 1232 MeV, quella del protone circa 938 MeV e quella del pione circa 140 MeV, quindi il decadimento è cinematicamente permesso. È un processo forte.

Esercizio 3

Un fascio monocromatico e collimato di raggi gamma di 0.8 MeV viene utilizzato per ottenere degli elettroni di energia ben definita facendo incidere i fotoni su un sottile bersaglio di carbonio e utilizzando solo gli elettroni uscenti dalla sorgente in coincidenza ad un fotone diffuso e rivelato ad un angolo ben definito mediante un rivelatore di piccola accettanza.
Per validare il metodo gli sperimentatori mettono il rivelatore di fotoni a 30 cm dal bersaglio e ad un angolo di 60 gradi e misurano il tempo di volo degli elettroni emessi in coincidenza mediante uno scintillatore a grande copertura angolare posto a 90 cm dal bersaglio.

I due scintillatori, opportunamente calibrati, vengono utilizzati per fornire lo START (il rivelatore di fotoni) e lo STOP (lo scintillatore) e misurare quindi l'intervallo di tempo TOF = STOP − START.
Qual'è l'energia attesa dell'elettrone? Quale intervallo di tempo TOF ci si attende di misurare come valor medio?

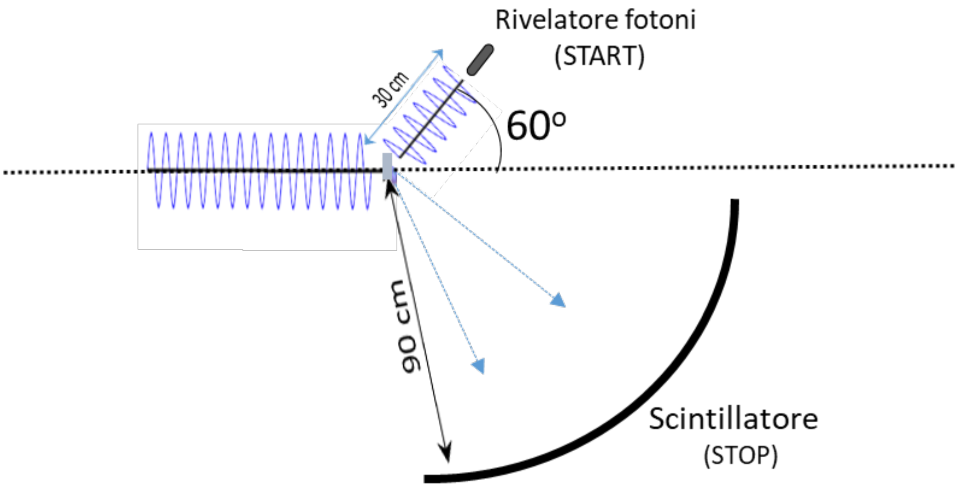


Figura 3: Schema dell'apparato sperimentale

Soluzione esercizio 3

La formula (nota) dell'energia dell'elettrone diffuso in seguito a diffusione Compton di un fotone ad angolo θ è

$$E_e = E_\gamma \frac{(E_\gamma/mc^2)(1 - cos\theta)}{1 + (E_\gamma/mc^2)(1 - cos\theta)} \tag{5}$$

e quindi, essendo $\theta = 60^o$ e $E_\gamma = 0.8MeV/c^2$ ne viene

$$E_e = 0.8\frac{(0.8/0.51)0.5}{1 + (0.8/0.51)0.5}MeV = 0.351MeV \tag{6}$$

Siccome

$$\beta = pc/E$$

calcoliamo

$$E = (20.351 + 0.511)MeV = 0.863MeV$$

$$p = \sqrt{0.863^2 - 0.511^2}MeV/c = 0.695MeV/c$$

E quindi

$$\beta = pc/E = 0.695/0.863 = 0.805$$

Il TOF atteso dato dalla differenza tra il tempo impiegato dall'elettrone e quello impiegato dal fotone per raggiungere i rispettivi rivelatori, per cui

$$\text{TOF} = 90cm/0.805c - 30cm/c = (3/0.805 - 1)ns = 2.73ns$$

0.10 Prova scritta del 09, 09, 2019

Esercizio 1

La reazione $d+^3\mathrm{H} \longrightarrow n+^4\mathrm{He}$, con un Q_valore $Q = 17.6$ MeV, è utilizzata spesso per produrre fasci etichettati di neutroni di energia definita, tramite la rivelazione della particella carica (^{4}He) associata.
Si consideri un fascio di deutoni incidenti con un'intensità $i = 2$ μA e un'energia $E_d = 2.5$ MeV su un bersaglio fisso di tritio di densità $\delta = 0.2$ mg/cm^2.
Sapendo che a quest'energia la sezione d'urto differenziale σ_{30^o} della reazione considerata vale 13 mb/sr all'angolo azimutale $\vartheta = 30^o$, si calcoli l'intensità Φ_n del flusso di neutroni che attraversa un rivelatore di 1 cm^2 posto alla distanza di 1 m dal bersaglio, all'angolo $\vartheta = 30^o$ rispetto al fascio incidente.

Soluzione esercizio 1

Essendo q$_e \simeq 1.6022 \times 10^{-19}$ C la carica elettrica di un singolo deutone, l'intensità di fasio di 2 μA corrisponde ad un numero dn_d/dt di deutoni incidenti al secondo pari a

$$\frac{\mathrm{d}n_d}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{2\ \mu\mathrm{A}}{1.6022 \times 10^{-19}\mathrm{C}} = \frac{2 \times 10^{-6}\mathrm{C/s}}{1.6022 \times 10^{-19}\mathrm{C}} = 1.2483 \times 10^{13}\ \mathrm{d/s}$$

La massa atomica del tritio è pari a M$(t) = 3.01605$ u, quindi una mole di tritio, che contiene un numero di Avogadro $N_A = 6.0221 \times 10^{23}$ di nuclei di tritio, ha una massa di 3.01605 g.
Ne consegue che la densità del bersaglio di tritio espressa in (nuclei di tritio)/cm^2 è

$$\delta_t = \frac{2 \times\ 10^{-4} \times 6.0221 \times 10^{23}}{3.01605} = 3.9934 \times 10^{19}\ \mathrm{t/cm^2}$$

L'angolo solido $\Delta\Omega$ sotteso dal rivelatore si ottiene moltiplicando 4π per il rapporto fra l'area del rivelatore e quella della superficie sferica di raggio $r = 1$ m

$$\Delta\Omega = 4\pi \times \frac{1}{4\pi \times 10^4} = 10^{-4}\ \mathrm{sr}$$

Data la piccole entità di $\Delta\Omega$ si possono supporre trascurabili le variazioni in esso del valore assegnato per la sezione d'urto differenziale, che quindi si assume costante su tutto $\Delta\Omega$. Per l'intensità Φ_n del flusso cercato di neutroni si ha quindi

$$\Phi_n = \frac{\mathrm{d}n_d}{\mathrm{d}t} \times \Delta\Omega \times \delta_t \times \sigma_{30^o} =$$

$$= 1.2484 \times 10^{13} \times 10^{-4} \times 3.9934 \times 10^{19} \times 1.3 \times 10^{-26} = 648\ \mathrm{s}^{-1}$$

Esercizio 2

Un'infrastruttura di ricerca recentemente costruita per effettuare terapie con fasci di ioni fornisce fasci di protoni e ioni ad energia variabile. I protoni hanno un'energia variabile tra 62.4 e 252.7 MeV. Si sa che il range massimo dei protoni e' pari a 380 mm in acqua. Quale sara' il range minimo disponibile?
È inoltre noto che gli ioni possono essere accelerati fino ad un'energia pari a 4834 MeV, corrispondente ad un range di 32.2 cm in acqua.
D1: Di quale specie di ioni si tratta?
Si assuma A=2 Z (A: massa atomica, Z: numero atomico del nucleo in questione) e si trascuri l'energia di legame del nucleo e la differenza in massa tra neutroni e protoni.
D2: La sala dove avviene la terapia viene schermata con dei muri di calcestruzzo ad alta densità ($\rho = 4\ g/cm^3$) in modo tale che in nessuna occasione radiazione possa fuoriuscire dalla stanza.
Con quale spessore minimo dev'essere costruito il muro?

Soluzione esercizio 2

D1.
Ricordando che

$$R = \int_0^{E_0} -\frac{dE}{dE/dx} \approx \frac{K}{Mz^2}\int_{E_0}^{0} EdE = \frac{K}{Mz^2}E_0^2 \tag{7}$$

possiamo calcolare il range minimo dei protoni

$$R_{min} = R_p(62.4\ MeV) = \frac{K}{m_p z_p^2}(62.4\ MeV)^2$$

$$R_{min} = \frac{K}{m_p z_p^2}\frac{252.7^2}{62.4^2}(62.4\ MeV)^2 = R_p(252.7\ MeV) \times \frac{252.7^2}{62.4^2}$$

e quindi $R_{min} = 2.3$ cm.
Per quanto concerne il range dello ione (A,Z) lo possiamo scrivere come

$$R_A(4834\ MeV) = \frac{K}{m_A Z^2}(4834\ MeV)^2$$

Ricordando che $m_A = A \cdot m_p$ e $A = 2Z$ possiamo scrivere

$$R_A(4834\ MeV) = 32.2cm = \frac{K}{m_p z_p^2}(252.7\ MeV)^2\frac{(4834)^2}{(252.7)^2}\frac{1}{2Z \cdot Z^2} =$$

$$= R_p(252.7\ MeV)\frac{(4834)^2}{(252.7)^2}\frac{1}{2Z \cdot Z^2}$$

ed infine

$$Z^3 = R_p(252.7\ MeV)\frac{(4834)^2}{(252.7)^2}\frac{1}{2}$$

da cui $Z = 216^{1/3} = 6$. Lo ione in questione è pertanto quello di carbonio.

D2.
La particella che percorre il cammino più lungo è il protone ad energia massima, il cui range è $R_p(252.7 MeV) = 38\ cm$.
Assumendo che la densità dell'acqua sia $1 g/cm^3$ ne consegue

$$R_p(252.7\ MeV)\ [g/cm^2] = 38\ g/cm^2$$

e quindi il range nel calcestruzzo sarà pari a

$$R_p(252.7\ MeV)[cm] = \frac{38}{\rho}\ cm = 38/4\ cm = 9.5\ cm$$

Il muro dovrà quindi essere spesso almeno 9.5 cm.

Esercizio 3

Al collisore lineare PEP -11 a Stanford, un fascio di elettroni di energia E= 9 GeV (lungo l'asse Z positivo) collide con un fascio di positroni di energia di 3.1 GeV che viaggiano nel verso opposto. In ciascuna collisione vengono prodotti due mesoni neutri B^0 e $\bar{B}^0$ di massa $m_B = 5.279$ GeV. L'impulso del mesone B^0 forma un angolo di 30^o rispetto alla direzione degli elettroni nel sistema del centro di massa, come mostrato in figura:

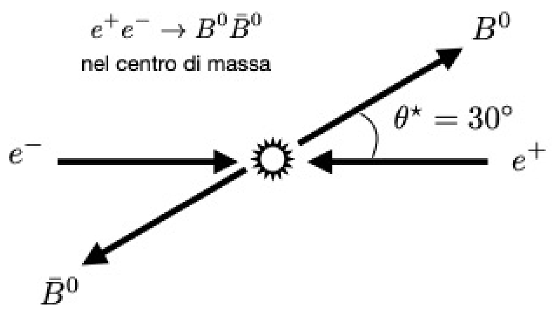


Figure 1: Collisione $e^+e^- \to B^0\bar{B}^0$ nel sistema di riferimento del centro di massa.

- Calcolare l'energia totale nel centro di massa e il boost $(\beta\gamma)$ del centro di massa.

- Calcolare l'energia e le componenti dell'impulso $\vec{p}$ dei due mesoni nel sistema di riferimento del Laboratorio.

- La vita media propria del mesone B neutro è di 1.5 ps. Assumendo che il mesone $\bar{B}^0$ decada a $t_0 = 0$ nell'origine ($z = 0$) e il mesone B^0 a un tempo successivo $t > 0$, stimare la distanza media lungo l'asse Z tra i vertici di decadimento dei due mesoni nel sistema del centro di massa (Δz^*) e del laboratorio (Δz). Gli spostamenti lungo gli assi X e Y sono del tutto trascurabili e vanno ignorati.

- Se il rivelatore di vertice misura la distanza con una risoluzione di 50 μm, calcolare la significanza (numero di deviazioni standard) con cui possiamo dire se i valori di Δz e Δz^* stimati sono diversi da zero.

Soluzione esercizio 3

- Il quadrimpulso dell'elettrone è $P_e = (9, 0, 0, 9)$ e quello del positrone $P = (3.1, 0, 0, -3.1)$ da cui si ottiene il quadrimpulso totale $P_{tot} = (12.1, 0, 0, 5.9)$. L'energia nel centro di massa è $\sqrt{s} = \sqrt{12.1^2 - 5.9^2} = 10.564$ GeV. Il boost del centro di massa (cdm) è $\beta\gamma = |\vec{p}_{tot}|/\sqrt{s} = 5.9/10.564 = 0.56$, dove $\beta_{cdm} = |\vec{p}_{tot}|/E_{tot} = 5.9/12.1 = 0.49$ e $\gamma_{cdm} = 1.15$.

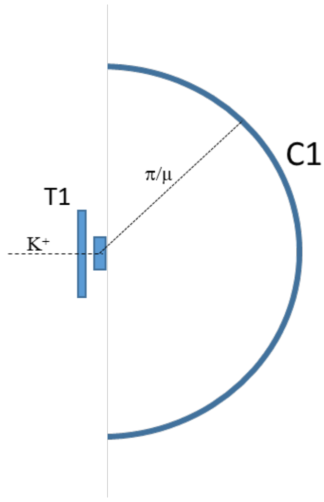
- Ciascun mesone neutro ha l'energia $E^*_B = 10.564/2 = 5.282$ GeV e quindi l'impulso $p^* = 178$ MeV. Le componenti dell'impulso sono dunque $\vec{p}^*_B = (p^*_\perp, p^*_z) = (p^* \sin\theta^*, p^* \cos\theta^*) = (89, 154)$ MeV e $\vec{p}^*_{\bar{B}} = -\vec{p}^*_B$. Le componenti del momento nel laboratorio si ottengono tramite la trasformazione di Lorentz: $p_z = (\beta\gamma)_{cdm} E^* + \gamma_{cdm} p^*_z$: mentre $p_\perp = p^*_\perp$. Quindi si ha $p^B_z = 3.13$ GeV e $p^{\bar{B}}_z = 2.78$ GeV.

- Nel cdm $\Delta z^* = (\beta\gamma)^*_B c\tau_0, = (p^*_B/m_B)c\tau_o = (0.154/5.279)c\tau_o = 13$ μm. Nel Laboratorio $\Delta z^* = (\beta\gamma)_B c\tau_0 = (p_z/m_B)c\tau_0 = (3.13/5.279)c\tau_0 = 267$ μm.

- Data la risoluzione di 50 μm, la misura della distanza nel cdm è compatibile con zero entro 1 σ. Invece grazie al boost relativistico, la distanza nel laboratorio si può misurare come diversa da zero con una significanza di 5 σ.

0.11 Prova scritta del 25, 09, 2019

Esercizio 1



Kaoni positivi di 10 MeV vengono fatti passare attraverso un sottile scintillatore T1 prima di essere fermati in un assorbitore di carbonio di 2 mm di spessore posto 1 mm dopo T1. Un rivelatore plastico usato come rivelatore Cherenkov (C1), con indice di rifrazione n = 1.6, di 5 mm di spessore e a forma di calotta sferica di raggio 60 cm, centrato sull'assorbitore, viene posto nella direzione in avanti a coprire metà dell'angolo solido.
Entrambi gli scintillatori sono utilizzati per fare delle misure di tempo e sia σ_t il loro identico potere risolutivo.
I principali canali di decadimento dei K^+ sono $(\mu^+\nu_\mu)$ e $(\pi^+\pi^o)$. Si misura il tempo TOF tra lo START (T_{T1}) dato dal Kaone sullo scintillatore T1 e lo STOP (T_{C1}) dato dalle particelle uscenti su C1 (TOF = $(\mathrm{T}_{C1} - \mathrm{T}_{T1})$).
Si valuti se il μ^+ ed il π^+ sono in grado di fornire un segnale Cherenkov e trascurando il tempo necessario al K^+ per fermarsi, si valuti quale potere risolutivo σ_t sia necessario per affinchè il sistema sia in grado di distinguere tra i due canali di decadimento, considerando necessaria una differenza di almeno $2\sigma_{TOF}$ per distinguere due tempi di volo.
Si assuma che tutti i K^+ si fermino nell'assorbitore esattamente nella posizione relativa al centro della calotta.
Talvolta un γ dal decadimento dei π^0 fornisce su C1 un segnale al posto del π^+. E' possibile distinguerlo in tempo di volo con la capacità risolutiva σ_t precedentemente determinata?
Dati:
$m(K^+) = 494$ MeV$/c^2$,
$m(\pi^+) = 140$MeV$/c^2$,

$m(\pi^0) = 135\mathrm{MeV}/c^2$,
$m(\mu^+) = 106\mathrm{MeV}/c^2$,
$m(\nu) = 0\mathrm{MeV}/c^2$

Soluzione esercizio 1

Dapprima calcoliamo la velocità delle particelle uscenti: $\beta = p/E$.
Servono dunque i valori degli impulsi relativi ai decadimenti in due corpi (formule note...)

$p_\mu = 236$ MeV/c
$p_\pi = 205$ MeV/c
$\beta_\mu = 236/\sqrt{106^2 + 236^2} = 0.91$
$\beta_\pi = 205/\sqrt{140^2 + 205^2} = 0.83$

La soglia Cherenkov è $\beta_{th} = 1/n = 1/1.6 = 0.62$ per cui entrambi sono sopra soglia.

$TOF_\mu = 60cm/0.91c = 2.2ns$
$TOF_\pi = 60cm/0.83c = 2.4ns$
$\Delta_{TOF} = 0.2ns$
$\sigma_{TOF} = \sqrt{2}\sigma_t$

Dev'essere quindi: $\Delta_{TOF} = 0.2ns \geq 2\sigma_{TOF} = 2\sqrt{2}\sigma_t$
cioè $\sigma_t \leq 0.2/\sqrt{2} \times 2$ ns $= 0.071$ ns

Se lo stop è dato da un γ, $TOF_\gamma = 60/c = 2ns$ e $\Delta_{TOF}(\mu - \gamma) = 0.2$ ns come nel caso precedente, per cui la discriminazione è ancora possibile.

Esercizio 2

La differenza in massa fra i due nuclei $^{27}_{14}$Si e $^{27}_{13}$Al è di 6.0 MeV/c^2.
Trascurando la differenza di massa fra protone e neutrone si stimi il raggio dei due nuclei.

Soluzione esercizio 2

$^{27}_{14}$Si e $^{27}_{13}$Al sono due nuclei speculari di media grandezza e si può ragionevolmente ascrivere quasi tutta la differenza fra le loro masse al diverso contributo di energia potenziale coulombiana.
Supponendo che i due nuclei abbiano simmetria circa sferica e supponendo altresì di poter considerare uniformemente distribuito in tali sfere il contenu-

to di carica elettrica per ognuno dei due nuclei, si ha che le energie associate alle due distribuzioni di carica per due nuclei speculari sono rispettivamente

$$E_Z \;=\; \frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad \text{e} \qquad E_{(Z-1)} \;=\; \frac{3}{5}\frac{[(Z-1)\,e]^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

con R il raggio della distribuzione sferica e uniforme di carica considerata, che rappresenta un stima del "raggio" di ognuno dei due nuclei.
Osservando che per ${}^{27}_{14}\mathrm{Si}$ e ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$

$$6.0\ \mathrm{MeV} = E_Z - E_{(Z-1)} \;=\; \Delta E \;=\; \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}\frac{(2Z-1)\,\hbar c}{R} \;=\; \frac{3}{5}\alpha\frac{(2Z-1)\,\hbar c}{R}$$

si ottiene

$$R \;=\; \frac{1}{10.0}\alpha\,(2Z-1)\,\hbar c \;=\; \frac{27}{1370}\times 3\times 10^{8}\times 6.582\times 10^{-22} \;=\; 3.89\times 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

Esercizio 3

Esercizio 3.a
Una particella K^+ di massa $m_K = 494$ MeV/c^2 decade in $\pi^0 e^+ \nu_e$. Calcolare l'impulso minimo e massimo che il π^0 può avere nel sistema di riferimento del K^+ [$m_\pi = 135$ MeV/c^2, $m_e = 0.511$ MeV/c^2].

Esercizio 3.b
Stabilire quali delle reazioni e dei decadimenti sotto indicati sono permessi e quali sono proibiti. Per quelli proibiti, indicare tutti i numeri quantici (o le leggi di conservazione) che sono violati. Per quelli permessi, indicare la forza che media l'interazione.

Reazioni:

- $\bar{\nu_\mu} + n \to \mu^+ + n + \pi^-$
- $e^- + p \to \bar{\nu_e} + \pi^0$
- $\pi^+ + n \to \Xi^0 + K^-$
- $K^+ + p \to \Sigma^0 + \pi^+ + \pi^+$
- $\bar{p} + p \to \Lambda + \bar{\Lambda}$

Decadimenti:

- $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu_\mu}$
- $\pi^0 \to e^+ + e^- + \gamma$

- $K^+ \to \pi^+ + K^0$
- $p \to n + e^+ + \nu_e$
- $\Omega^- \to \Xi^0 + \pi^-$

Soluzione esercizio 3.a

Nel sistema di riferimento del K^+ il π^0 può essere emesso in quiete, quindi si ha: $p^*_{\pi,min} = 0$.
Inoltre, per la conservazione del 4-impulso: $P^*_K - P^*_\pi = P^*_e + P^*_\nu$.
Elevando al quadrato si ottiene:
$m_K^2 + m_\pi^2 - 2m_K E^*\pi = m_e^2 + 2E^*_e E^*_\nu - 2p^*_e E^*_\nu \cos\theta^*_{e\nu}$
da cui $E^*_\pi = (m_K^2 + m_\pi^2 - m_e^2 - 2E^*_\nu(E^*_e - p^*_e \cos\theta^*_{e\nu}))/2m_K$
che è massima quando $E^*_\nu = 0$ (essendo sempre positivo il termine in parentesi).
Quindi: $E^*_{\pi,max} = (m_K^2 + m_\pi^2 - m_e^2)/2m_K = 265$ MeV
$p^*_{\pi,max} = \sqrt{E^{*2}_{\pi,max} - m_\pi^2} = 229$ MeV.

Soluzione esercizio 3.b

Reazioni:

- Si, debole
- No: B, L(e)
- No: Q, ΔS=3
- No: ΔS=2
- Si, forte

Decadimenti:

- Si, debole
- Si, e.m.
- No: ΔM< 0
- No: ΔM< 0
- Si, debole

0.12 Prova scritta del 20, 11, 2019

Esercizio 1

Si inietta nel flusso sanguigno di una persona una piccola quantità di una soluzione contenente ^{24}Na, che decade β^- con $T_{1/2} = 14.96$ h, e un'attività iniziale $A_0 = 2.00 \times 10^3$ Bq.
Prelevando alla stessa persona, dopo 5 ore, un campione di sangue di 1 cm^3, l'attività in esso riscontrata risulta $A = 16$ min^{-1}.
Qual'è il volume sanguigno totale della persona?

Soluzione esercizio 1

Si ricordi che $T_{1/2} = \tau \ln 2$ e che per l'attività si ha

$$A(t) = \left| \frac{dN}{dt} \right| = N(t)\lambda = N_0 \lambda e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t} \tag{8}$$

Indicando con Δt l'intervallo di 5 ore dopo il quale si preleva il sangue alla persona si ha dunque: $A(\Delta t) = A_0 e^{-\lambda \Delta t}$.
Sia poi $a(\Delta t) = A(\Delta t)/V$ l'attività per unità di volume sanguigno, da cui si ottiene:

$$V = \frac{A(\Delta t)}{a(\Delta t)} = \frac{A_0}{a(\Delta t)}\ e^{-\lambda \Delta t} = \frac{A_0}{a(\Delta t)}\ e^{-\frac{\Delta t \ \ln 2}{T_{1/2}}} \tag{9}$$

Sostituendo opportunamente i valori forniti nel testo, tenuto conto che $a = 16$ min$^{-1} \simeq 0.267 s^{-1} cm^{-3}$, si ha:

$$V \simeq \frac{2.00 \times 10^3}{0.267} e^{-\frac{5 \ \ln 2}{14.96}} \simeq 5.94 \times 10^3 \text{ cm}^3 = 5.94\ l \tag{10}$$

Esercizio 2

Uno spettrometro magnetico viene utilizzato per la misura dell'impulso di particelle cariche in un esperimento ove è necessario rivelare pioni, kaoni e protoni con elevata risoluzione in impulso. Lo spettrometro, schematicamente rappresentato in figura (si faccia attenzione alla definizione delle coordinate), è caratterizzato da un campo magnetico $\mathbf{B}$ ($|\mathbf{B}| = 0.7$ T) e 3 piani di tracciatori di rivelatori a microstrisce al silicio (posizionati a 12.5 cm uno dall'altro) capaci di misurare la coordinata x con una risoluzione $\sigma_x = 15\ \mu m$. Una particella di energia 100 MeV entra nella spettrometro alla coordinata (x_1=10 cm, z_1=0) ed esce alla coordinata (x_3=10 cm, z_3=25

cm).
Si calcoli il valore del raggio di curvatura nei tre possibili casi e si verifichi se la variazione angolare della direzione di propagazione tra l'entrata e l'uscita possa essere considerata piccola. Si valuti se lo spettrometro è in grado di effettuare una misura con una risoluzione migliore dello 0.5% indipendentemente dall'identità della particella in questione.

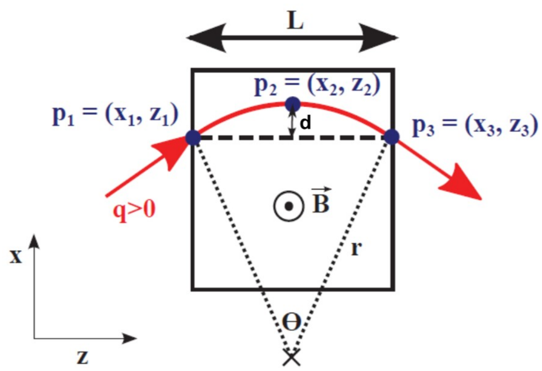


Figura 4:

Soluzione esercizio 2

Si calcoli dapprima il valore dell'impulso relativo ad un'energia di 100 MeV

$$p_{\pi} = 195 MeV/c$$

$$p_K = 330 MeV/c$$

$$p_p = 445 MeV/c$$

Siccome

$$\rho = p/(0.3B) \tag{11}$$

ne viene

$$\rho_{\pi} = 0.195 GeV/(0.3\ 0.7T) = 0.93m$$

$$\rho_K = 0.33 GeV/(0.3\ 0.7T) = 1.57m$$

$$\rho_p = 0.445 GeV/(0.3\ 0.7T) = 2.12m$$

Inoltre, siccome L = z2 - z1 = 0.25 m, L$\ll$ ρ e possiamo quindi valutare $\theta \sim L/\rho$ che risulta essere un piccolo angolo:

$$\theta_{\pi} = 0.25/0.93 = 0.27$$

$$\theta_K = 0.25/1.57 = 0.16$$

$$\theta_p = 0.25/2.12 = 0.12$$

Per piccoli valori di θ

$$s = \frac{0.3BL^2}{8p} \tag{12}$$

e quindi il valore della sagitta nei 3 casi' risultera':

$$s_\pi = \frac{0.3\ 0.7\ 0.25^2}{8\ 0.195} = 0.0084m$$

$$s_K = \frac{0.3\ 0.7\ 0.25^2}{8\ 0.33} = 0.005m$$

$$s_p = \frac{0.3\ 0.7\ 0.25^2}{8\ 0.445} = 0.004m$$

ed infine

$$\frac{\sigma_p}{p} = \frac{\sigma_s}{s} = \frac{\sigma_x}{s}\sqrt{3/2} \tag{13}$$

$$Pioni : \frac{\sigma_p}{p} = 0.22\% \tag{14}$$

$$K : \frac{\sigma_p}{p} = 0.37\% \tag{15}$$

$$protoni : \frac{\sigma_p}{p} = 0.41\% \tag{16}$$

Ne segue che in tutti i possibili casi la risoluzione dello spettrometro risulta essere migliore di quella richiesta.

Esercizio 3

Una particella Ω^- viene prodotta nell'interazione di un kaone con un protone fermo, secondo la reazione:

$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^0 + K^+.$$

Calcolare:

a. La minima energia che il K^- deve possedere perché la reazione sia possibile.

b. L'energia nel riferimento del centro di massa del sistema alla soglia di produzione.

c. L'impulso nel laboratorio della Ω^- alla soglia di produzione.

[$m_{\Omega^-} = 1672$ MeV/c^2, $m_{K^\pm} = 494$ MeV/c^2, $m_{K^0} = 498$ MeV/c^2, $m_p = 938$ MeV/c^2, $m_\Lambda = 1116$ MeV/c^2]

Soluzione esercizio 3

a. Alla soglia di produzione l'energia cinetica della particella incidente è

$$K_{soglia} = \frac{(m_{\Omega^-}+m_{K^0}+m_{K^+})^2-(m_{K^-}+m_p)^2}{2m_p}$$

$$K_{soglia} = \frac{(1672+494+498)^2-(494+498)^2}{2\times 938} = 2690 \text{ MeV}$$

da cui

$$E_{K^-} = K_{soglia} + m_{K^-} = 2690 + 494 = 3184 \text{ MeV}$$

e

$$p_{K^-} = \sqrt{E^2_{K^-} - m^2_{K^-}} = \sqrt{3184^2 - 494^2} = 3145 \text{ MeV}.$$

b. L'interazione avviene all'energia nel riferimento del centro di massa data dalla relazione:

$$\sqrt{s} = \sqrt{(E_{K^-} + E_p)^2 - (\vec{\mathbf{p}}_{K^-} + \vec{\mathbf{p}}_p)^2} = \sqrt{(E_{K^-} + m_p)^2 - (\vec{\mathbf{p}}_{K^-})^2}$$

$$\sqrt{s} = \sqrt{m^2_{K^-} + m^2_p + 2E_{K^-}m_p}$$

$$\sqrt{s} = \sqrt{494^2 + 938^2 + 2 \times 3184 \times 938} = 2664 \text{ MeV}.$$

c. Per il centro di massa valgono le relazioni:

$$\beta_{CM} = |\vec{\mathbf{p}}^{tot}_{LAB}|/E^{tot}_{LAB} = p_{K^-}/(E_{K^-} + m_p)$$

$$\beta_{CM} = 3145/(3184 + 938) = 0.763$$

e

$$\gamma_{CM} = E^{tot}_{LAB}/\sqrt{s} = (E_{K^-} + m_p)/\sqrt{s}$$

$$\gamma_{CM} = (3184 + 938)/2664 = 1.547.$$

Nella produzione a soglia la particella Ω^- viene prodotta ferma nel sistema di riferimento del centro di massa.

$$p_{\Omega^-} = \beta_{CM}\gamma_{CM}E^*_{\Omega^-} = \beta_{CM}\gamma_{CM}m_{\Omega^-}$$

$$p_{\Omega^-} = 0.763 \times 1.547 \times 1672 = 1974 \text{ MeV},$$

da cui

$$E^{LAB}_{\Omega^-} = \sqrt{p^2_{\Omega^-} + m^2_{\Omega^-}}$$

$$E^{LAB}_{\Omega^-} = \sqrt{1974^2 + 1672^2} = 2587 \text{ MeV}.$$

0.13 Prova scritta del 30, 01, 2020

Esercizio 1

Si ha un nucleo pesante di massa M^*, inizialmente a riposo nel sistema di riferimento del Laboratorio, che si diseccita verso lo stato fondamentale di massa M emettendo un fotone γ.
Si determini in seconda approssimazione l'energia E_γ del fotone.
Si immagini una possibile tecnica per sopprimere quasi totalmente lo shift δE_γ in energia dovuto alla conservazione dell'impulso.

Soluzione esercizio 1

Si indica con ϵ la differenza in energia tra i livelli energetici fondamentale ed eccitato del nucleo, per cui:

$$M^* c^2 = Mc^2 + \epsilon \tag{17}$$

Si supponga ragionevolmente che sia

$$\frac{\epsilon}{Mc^2} \ll 1 \tag{18}$$

(Tipicamente le transizioni nucleari producono γ con energie dell'ordine $0.1 \div 1$ MeV).
Si ha quindi

$$Mc^2 + \epsilon = E_\gamma + \sqrt{M^2c^4 + E_\gamma^2} \simeq E_\gamma + Mc^2 + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \tag{19}$$

Si assume inoltre che sia ragionevolmente $\epsilon \approx E_\gamma$, per cui

$$E_\gamma \simeq \epsilon - \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \simeq \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2Mc^2} = \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2Mc^2}\right) \tag{20}$$

L'energia E_γ del fotone $\sqrt{}$ő$quindiminoredi\epsilon$ di una frazione $\delta E_\gamma = \epsilon/2Mc^2$, a causa dell'energia di rinculo del nucleo.

Aumentando M si riduce il termine $\epsilon/2Mc^2$ e quindi la frazione di energia di rinculo trasportata dal nucleo. Un modo per aumentare M è avere l'atomo col nucleo di massa M inglobato in un reticolo cristallino con energia di legame dello stesso nel reticolo maggiore di $\epsilon^2/2Mc^2$. In tal modo la massa efficace che dovrebbe rinculare contro l'emissione del γ sarebbe praticamente tutta quella macroscopica del cristallo in cui $\sqrt{}$ő$inglobatoilnucleochestaperdecadere\gamma$ (Effetto Mossbauer).

Esercizio 2

Un mesone π^+ decade tramite la reazione $\pi^+ \to \mu^+\bar{\nu}_\mu$.
1) Calcolare l'energia e il momento del muone nel sistema di riferimento del pione a riposo.
2) Calcolare l'energia massima e minima del muone se il pione decade in volo con una energia di 1 TeV.
($m_{\pi^\pm} = 139$ MeV, $m_{\mu^\pm} = 106$ MeV, and $m_\nu = 0$.)

Soluzione esercizio 2

1) Combinando le informazioni: $m_{\pi^\pm} = E_\nu + E_\mu$, $E_\nu = p_\nu$ e $\vec{p_\nu} = -\vec{p_\mu}$ si ottiene:

$E_\mu^2 - |\vec{p_\mu}|^2 - 2(E_\mu m_{\pi^\pm} + m_\pi^2) = 0 \to m_\mu^2 + m_\pi^2 = 2E_\mu m_{\pi^\pm} \to E_\mu = \frac{m_\mu^2+m_\pi^2}{2m_\pi}$ $= 111$ MeV.

$|\vec{p_\mu}|^2 = (\frac{m_\mu^2+m_\pi^2}{2m_\pi})^2 - m_\mu^2 = \frac{m_\pi}{2}(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}) = 29{,}1$ MeV.

2) L'energia nel sistema di riferimento del pione in volo si ricava dalla trasformazione di Lorentz $E' = \gamma(E + \beta p cos\theta)$, dove θ e' l'angolo tra la direzione del pione e quella del muone. L'energia massima (minima) si trova per valori di E' tali per cui $cos\theta = \pm 1$, ovvero muone parallelo (antiparallelo) alla direzione di volo del pione. Inserendo le espressioni ottenute al punto precedente si ottiene:

$$E_{min}^{max} = \frac{\gamma m_\pi}{2}(1 + \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \pm \beta(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}))$$

Inserendo i valori numerici $\gamma \approx 7200$, $\beta \approx 1$, si ottiene:

$E^{max} \approx \gamma m_\pi = E_\pi$, $E^{min} \approx 0.58 E_\pi$.

Esercizio 3

Un fascio di elettroni di 23 MeV passa attraverso una lastra di metallo di 0.2 cm di spessore. Nel passare attraverso il metallo gli elettroni perdono in media il 10.75% della loro energia per radiazione di frenamento.
1) Di quale dei metalli indicati in tabella è composta la lastra?

Tabella

Materiale	Densità (g/cm^3)	Z	LR (g/cm^2)
Al	2.7	13	24.01
Fe	7.87	26	13.84
Cu	8.92	29	12.86
Pb	11.4	82	6.37

2) Tenendo conto che vi è anche una perdita di energia dovuta alla collisione con gli elettroni atomici, è possibile valutare, perlomeno approssimativamente, l'energia media totale persa dagli elettroni nell'attraversare la lastra?
3) Qualora la lastra fosse investita da muoni, quale energia dovrebbero possedere i muoni per avere la stessa perdita di energia media per radiazione di frenamento degli elettroni?

Soluzione esercizio 3

1) Siccome

$$E(x) = E_0 e^{\frac{-x}{L_R}}$$

ne viene che

$$E(x)/E_0 = e^{\frac{-x}{L_R}} = 1 - 0.1075 = 0.8925$$

da cui, essendo x=0.2 cm

$$0.2/L_R = -ln(0.8925) = 0.1137$$

Dobbiamo pertanto verificare per quale metallo 0.2 cm corrispondono all' 11.37% della lunghezza di radiazione. Calcoliamo L_R in cm:

$$L_R(cm) = L_R\ (g/cm^2)/\rho\ (g/cm^3)$$

$$L_R(cm) = 8.88(Al), 1.7586(Fe), 1.44(Cu), 0.59(Pb)$$

e infine

$$0.2cm/L_R(cm) = 0.022(Al), 0.1137(Fe), 0.139(Cu), 0.358(Pb)$$

Pertanto il materiale in questione è il ferro.
2) Proviamo a valutare se l'energia in gioco è superiore o inferiore a quella critica. Sappiamo che $E_c \sim 600/Z$ MeV, per cui $E_c \sim 600/26 = 23.1\ MeV$. Siccome l'energia degli elettroni corrisponde proprio con quella critica, ne viene che la perdita totale di energia sarà il doppio di quella media per radiazione:

$$\Delta E = \Delta E_{coll} + \Delta E_{Bremm}$$

$$\Delta E_{Bremm} = 23 * 0.1075 MeV = 2.4725\ MeV$$

e infine

$$\Delta E = 4.945\ MeV$$

è l'energia media persa da un elettrone nel passare attraverso la lastra.

3) Siccome $\left(\frac{dE}{dX}\right)_{rad} \propto E/M^2$ con E ed M rispettivamente l'energia e la massa della particella in questione, ne viene che sarà

$$\frac{dE}{dX}_{\mu} = \frac{dE}{dX}_{e}$$

quando

$$E_\mu = E_e \times (M_\mu/m_e)^2$$

ovvero per

$$E_\mu = E_e \times 42705 = 982\ GeV$$

0.14 Prova scritta del 20, 02, 2020

Esercizio 1

Un nucleo di ^{6}He a riposo decade β^- nello stato fondamentale del ^{6}Li.
Le masse dei due nuclei sono rispettivamente: $M(^6\mathrm{He}) = 5605.538$ MeV$/c^2$; $M(^6\mathrm{Li}) = 5601.519$ MeV$/c^2$.
Si valuti l'energia cinetica massima ammissibile $E^{(k)}_{e,max}$ per l'elettrone di decadimento, giustificando il risultato.

Soluzione esercizio 1

Trascurando la massa dell'antineutrino l'energia totale rilasciata nel decadimento $^6\mathrm{He} \longrightarrow\ ^6\mathrm{Li} + e^- + \overline{\nu}_e$, è

$$Q = \left[M(^6\mathrm{He}) - \left(M(^6\mathrm{Li}) + m_e\right)\right] c^2 = 5605.538 - (5601.519 + 0.511) = 3.508\mathrm{MeV} \tag{21}$$

Il decadimento è a tre corpi per cui le energie cinetiche dei prodotti di decadimento non sono univocamente determinate dalle masse presenti negli stati iniziale e finale.
Avendo assunto $m_{\overline{\nu}_e} \simeq 0$, l'elettrone raggiungerà l'energia massima consentita $E^{(k)}_{e,max}$ in concomitanza col nucleo figlio ^{6}Li $\left(E^{(k)}_{^6\mathrm{Li},max}\right)$, e ciò avverrà quando al limite tende a zero l'energia dell'antineutrino. In tal caso

$$Q = E^{(k)}_{e,max} + E^{(k)}_{^6\mathrm{Li},max} \tag{22}$$

In questa ben precisa condizione cinematica anche il modulo dell'impulso dell'antineutrino tente a zero e dalla conservazione dell'impulso si ha
$p_{e,max} = p_{^6\mathrm{Li},max}$, e poichè

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m^2c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{E^{(k)}[E^{(k)} + 2mc^2]} \tag{23}$$

si ha

$$E^{(k)}_{e,max}\left(E^{(k)}_{e,max} + 2m_ec^2\right) = E^{(k)}_{^6\mathrm{Li},max}\left[E^{(k)}_{^6\mathrm{Li},max} + 2M(^6\mathrm{Li})c^2\right] \tag{24}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} E^{(k)}_{e,max} &= \frac{Q\left[M(^6\mathrm{He}) + M(^6\mathrm{Li}) - m_e\right]}{2M(^6\mathrm{He})]} \\ E^{(k)}_{^6\mathrm{Li},max} &= \frac{Q\left[M(^6\mathrm{He}) + m_e - M(^6\mathrm{Li})\right]}{2M(^6\mathrm{He})} \end{aligned} \tag{25}$$

Essendo $M(^6\mathrm{Li}) >> m_e$, ne deriva che $E^{(k)}_{^6\mathrm{Li},max} << E^{(k)}_{e,max}$ infatti dalle (5) si ha

$$\frac{E^{(k)}_{e,max} - E^{(k)}_{^6\mathrm{Li},max}}{Q} = \frac{M(^6\mathrm{Li}) - m_e}{M(^6\mathrm{He})} \tag{26}$$

quindi dall'essere $\frac{M(^6\mathrm{Li})}{M(^6\mathrm{He})} \simeq 1 >> \frac{m_e}{M(^6\mathrm{He})}$ segue

$$E^{(k)}_{e,max} - E^{(k)}_{^6\mathrm{Li},max} \simeq Q \tag{27}$$

Dovendo quindi valere contemporaneamente sia la (7) che la (2), si ha

$$E^{(k)}_{e,max} \ \simeq \ Q \ = \ 3.508 \ \ \mathrm{MeV}$$

Esercizio 2

Per ognuno dei seguenti decadimenti dire se sono permessi o proibiti, e se sono proibiti quali leggi di conservazione sono violate:

- $p + p \to p + \bar{p} + \bar{p} + p$
- $\mu^+ \to e^+ + \tau^+ + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_\mu + \bar{\nu}_\tau$
- $e^+ + e^- \to \nu_e + \bar{\nu}_e$
- ${}^{60}_{27}Co \to {}^{60}_{28}Ni + e^- + \nu_e + 2\gamma$
- $p \to \gamma\gamma$
- $K^0 \to \pi^+\pi^-$
- $\eta \to \gamma\gamma$
- $\Omega^- \to \Lambda^0 K^-$
- $\Omega^- \to K^0 \bar{K}^0$
- $J/\psi \to p\bar{p}\pi^+\pi^-\pi^0$
- $J/\psi \to \tau^+\tau^-$
- $\nu_e \to e^+e^-$
- $\pi^0 \to \gamma\gamma\gamma$
- $\mu^- \to e^-\gamma$

Soluzione esercizio 2

- B
- LMQ
- interazione debole

- L
- BQI
- interazione debole
- M
- interazione elettromagnetica
- interazione forte
- S
- interazione forte
- M
- ML
- C
- L

Esercizio 3

Protoni e pioni di impulso compreso nell'intervallo 700-1000 MeV/c dopo essere stati tracciati da uno spettrometro che ne determina l'impulso vengono fatti passare attraverso due rivelatori T1 e T2, posti subito fuori dallo spettrometro, costituiti ciascuno di un sottile spessore di lucite. Questi vengono utilizzati come rivelatori Cherenkov per misurare il tempo di volo ($tof = t_{T2} - t_{T1}$) delle particelle tra i due rivelatori.
Ciascun rivelatore è caratterizzato da un potere risolutivo temporale pari a $\sigma_t = 700ps$ e i due rivelatori sono posti ad una distanza di 2 m.
Si valuti se il sistema sarà capace di distinguere tra pioni e protoni all'impulso massimo di 1000 MeV/c.
Si consideri significativa una differenza in tempo di volo $> 3\sigma_{tof}$.
Si risponda alla stessa domanda qualora venissero utilizzati due rivelatori costituiti d'acqua al posto della lucite.
Dati utili:
Indice di rifrazione della lucite: n=1.49
Indice di rifrazione dell'acqua: n=1.33
$m_\pi = 140MeV/c^2, m_p = 938MeV/c^2$
Velocit$\surd\dagger dellaluce$:c=3 $10^8 m/s$

Soluzione esercizio 3

La soglia Cherenkov risulta essere $\beta_{Th} = 1/1.49 = 0.671$ In primo luogo si deve calcolare la velocità delle particelle per verificare se sono sopra soglia Cherenkov all'impulso di 1000 MeV/c

$$E_\pi = \sqrt{140^2 + 1000^2} MeV = 1010 MeV$$
$$E_K = \sqrt{938^2 + 1000^2} MeV = 1371 MeV$$

Siccome $\beta = cp/E$ ne viene

$$\beta_\pi = 0.99$$

$$\beta_p = 0.73$$

entrambi sopra soglia. Per cui

$$tof_\pi = L/\beta_\pi c = 6.7 ns$$

$$tof_p = L/\beta_p c = 9.1 ns$$

e quindi la differenza di tempo di volo è $\Delta_{tof} = 2.4 ns$
Siccome i due rivelatori hanno le stesse caratteristiche, $\sigma_{tof} = \sqrt{2}\sigma_t = 0.99 ns$ e per distinguere i due tempi di volo questi devono differire di almeno $3\sigma_{tof}$ dev'essere

$$\Delta_{tof} \geq 3\sigma_{tof} = 3\sqrt{2}\sigma_t = 2.97 ns$$

La condizione non è verificata, essendo

$$\Delta_{tof} = 2.4 ns$$

e quindi non è possibile discriminare pioni da protoni all'impulso di 1000 MeV/c.
Qualora il rivelatore fosse composto d'acqua la soglia Cherenkov sarebbe

$$\beta_{Th}^{H2O} = 1/1.33 = 0.75$$

e i protoni non sarebbero sopra soglia, al contrario dei pioni e sarebbe pertanto possibile discriminare i pioni dai protoni.