

# Fisica Generale 1 – 018IN

## Energia

Prof. Pierre Thibault  
[pthibault@units.it](mailto:pthibault@units.it)



# Vis viva



Gottfried Wilhelm von Leibniz  
(1646-1716)

Thomas Young: "energy"

Coriolis: "énergie cinétique"  $\frac{1}{2}mv^2$



quasi  
quantità di  
moto



René Descartes (1596-1650)

# Energia cinetica

$$v^2 = |\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

punto materiale di massa  $m$

insieme di punti materiali

scalare!

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Macchina di 1000 kg a  $50 \text{ km/h}$  :  $K = \frac{1}{2} 1000 \text{ kg} \cdot \left( \frac{50}{3.6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2$   
 $= 96.5 \text{ kJ}$

a  $60 \text{ km/h}$  :  $K = 139 \text{ kJ}$

# Teorema lavoro-energia cinetica

Ricordo: Moto uniformemente accelerato in 1D:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

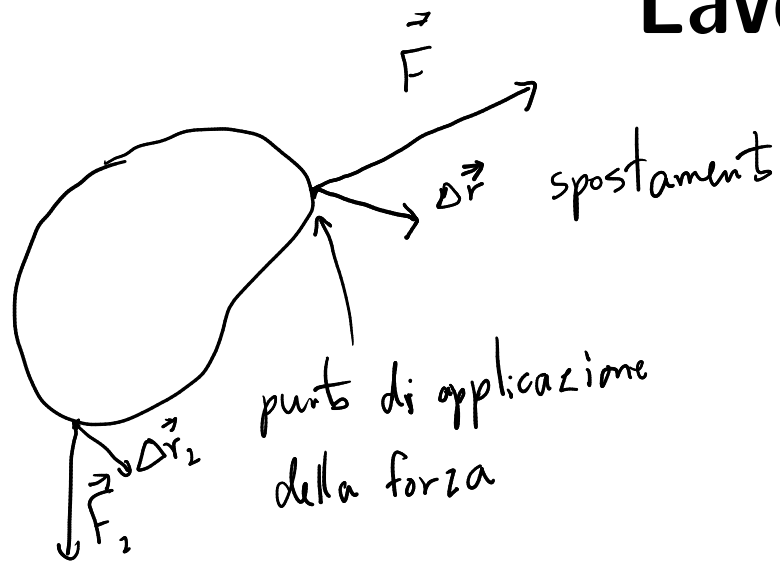
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = ma(x - x_0)$$

$$K - K_0 = F(x - x_0)$$

$$\Delta K = F \underbrace{\Delta x}_W$$

lavoro compiuto sul sistema  
da una forza esterna  
(trasferimento di energia)

# Lavoro



$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

\*  $\vec{F}$  parallelo a  $\Delta \vec{r}$  :  $W = F \Delta r$

\*  $\vec{F}$  perpendicolare a  $\Delta \vec{r}$  :  $W = 0$

\*  $\vec{F}$  verso opposto a  $\Delta \vec{r}$  :  $W = -F \Delta r$

$$W_{\text{tot}} = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{r}_2 + \dots$$

se il corpo non ruota e non si deforma:  $\Delta \vec{r}_1 = \Delta \vec{r}_2 = \Delta \vec{r}$

$$\Rightarrow W_{\text{tot}} = (\sum \vec{F}) \cdot \Delta \vec{r}$$

# Teorema lavoro-energia cinetica

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

← 2<sup>a</sup> legge di Newton per  
un punto materiale di  
massa  $m$

spostamento  
infinitesimale  $d\vec{r}$   
( $\Delta\vec{r}$  con modulo che  
tende a 0)

$$dW = (\sum \vec{F}) \cdot d\vec{r}$$

$$= m\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

$$= m\vec{a} \cdot \vec{v} dt$$

$$= m \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v^2) dt$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} v^2} = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \boxed{2 \vec{a} \cdot \vec{v}}$$

$$W_{tot} = \int_i^f (\sum \vec{F}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(v^2) dt = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

iniziale → finale

$$\boxed{W_{tot} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2}$$

# Teorema lavoro-energia cinetica

Teorema

$$W_{\text{tot}} = \Delta K$$

Osservazioni:

\* conseguenza diretta di  $\vec{F} = m\vec{a}$   
↳ si applica a punti materiali

\* non è conservazione dell'energia

anche se dà risultati  
uguali in importanti casi

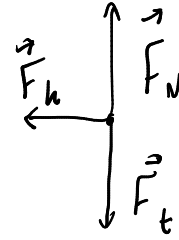
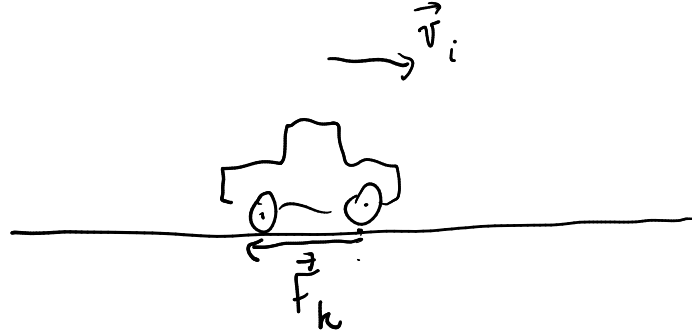
\*  $W_{\text{tot}}$  non è "lavoro" nel senso termodinamico

Lavoro di una forza costante:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_i) = \vec{F} \cdot \vec{l} \leftarrow \text{spostamento totale}$$

# Esempio

La distanza di arresto di una macchina



$$F_N = F_t = mg$$

$$F_k = \mu_k F_N = \mu_k mg$$

Lavoro compiuto dalla forza di attrito:

$$W = \int_i^f \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = \int_0^d -F_k dx = -F_k d = -\mu_k mg d$$

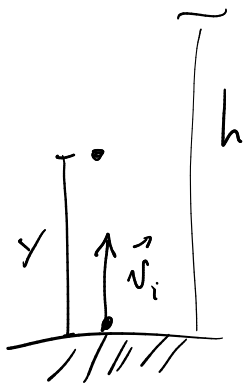
$$W = \Delta K$$

$$-\mu_k mg d = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$d = \frac{v_i^2}{2\mu_k g}$$

# Esempio

Proiettile sparato con velocità sufficiente per raggiungere un'altitudine dove l'accelerazione gravitazionale non può essere considerata costante.



$$\vec{F} = -\frac{Gm_t m}{(R_t + y)^2} \hat{j}$$

$$W = \int_0^h \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^h -\frac{Gm_t m}{(R_t + y)^2} dy$$

$$= \int_{R_t}^{R_t+h} -\frac{Gm_t m}{y'^2} dy'$$

$$\left( \begin{array}{l} y' = R_t + y \\ dy = dy' \end{array} \right)$$

$$W = Gm_t m \left( \frac{1}{R_t+h} - \frac{1}{R_t} \right) \quad \left( \int \frac{-1}{x^2} dx = \frac{1}{x} \right)$$

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2 = W = \underbrace{\frac{Gm_t m}{R_t}}_{g R_t m} \left( \frac{1}{1 + h/R_t} - 1 \right)$$

$$v_i^2 = 2gR_t \left( 1 - \frac{1}{1 + h/R_t} \right)$$

$$h = \frac{v^2}{2g} \left( 1 - \frac{v^2}{2gR_t} \right)^{-1}$$

# Lavoro compiuto da una forza variabile



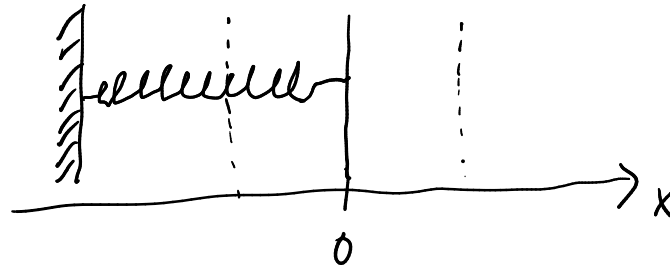
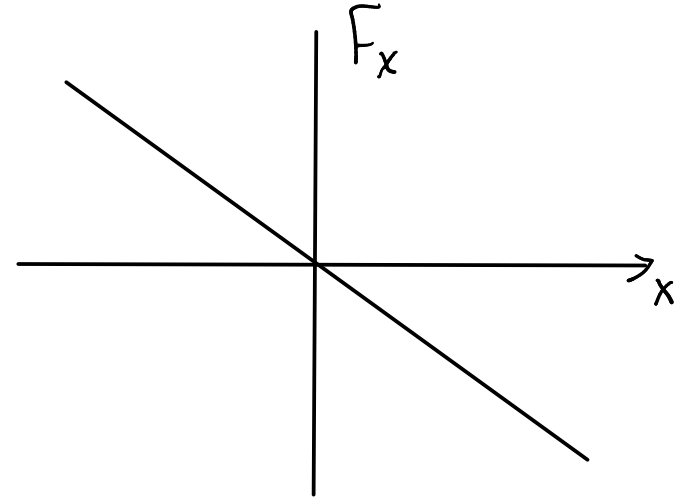
Robert Hooke (1635-1703)

Caso importante : relazione lineare tra forza e distanza

$$F_x = -kx$$

"legge di Hooke"

$$\begin{array}{c} F_x \quad \leftarrow F_x \\ \rightarrow \quad \leftarrow \end{array}$$



$$W = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$

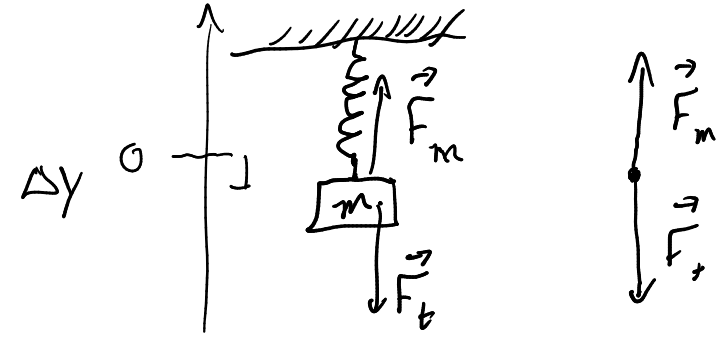
← indipendente del percorso

# Esempio

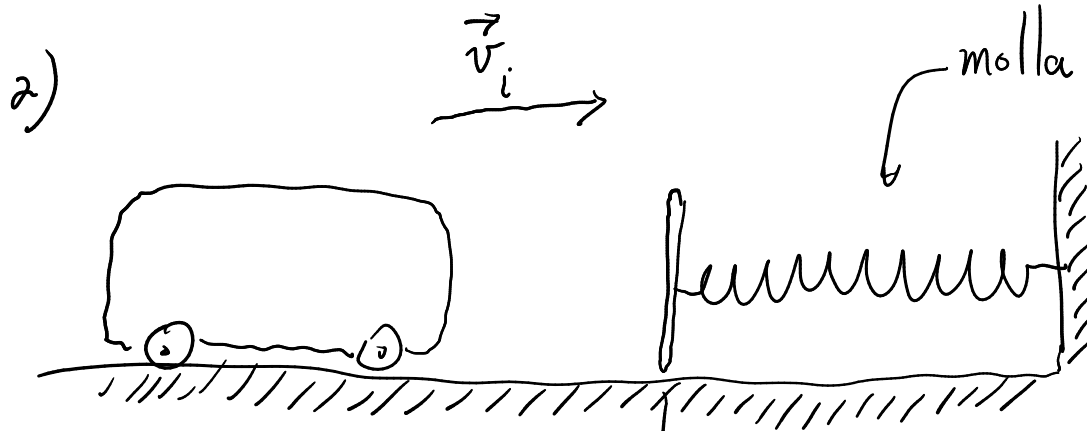
1) blocco sospeso con una molla

\* costante della molla:  $k$

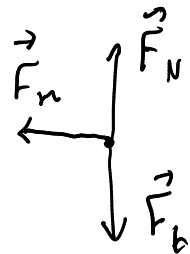
\* blocco immobile:  $\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0$



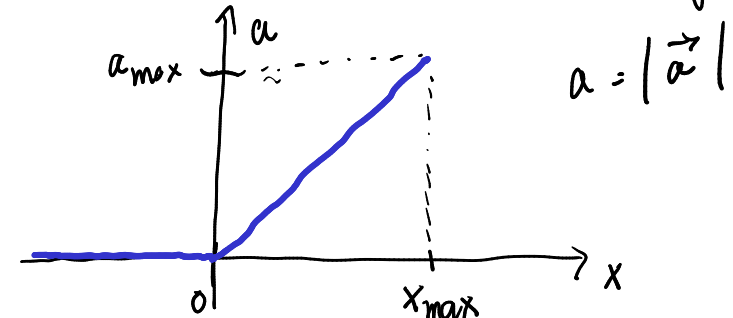
$$k\Delta y = mg \quad \rightarrow \quad \Delta y = \frac{mg}{k}$$



dopo contatto  
con la molla



quale deve essere  $k$  in tal  
modo che l'accelerazione  
sia al massimo  $a_{max} = 5g$ ?



# Esempio

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$$

$$F_x = m a_x$$

$$-kx = m a_x$$

$$a_x = -\frac{k}{m} x$$

Teorema Lavoro - energia cinetica:

$$W = \Delta K$$

iniziale :  $\vec{v}_i$   $x_i = 0$

finale :  $v_f = 0$   $x_f = x_{\max}$

$$W = -\frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2)$$

$$= -\frac{1}{2} k x_{\max}^2$$

$$\Delta K = K_f - K_i$$

$$= 0 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$-\frac{1}{2} k x_{\max}^2 = -\frac{1}{2} m v_i^2$$

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{m}{k}} v_i$$

$$a_{\max} = \left| \frac{k}{m} x_{\max} \right| = \sqrt{\frac{k}{m}} v_i$$

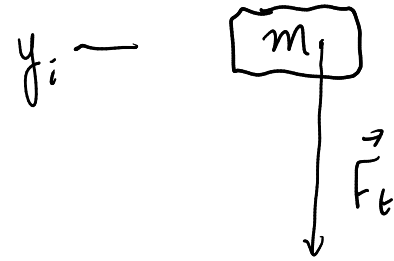
$$a_{\max} = 5g = \sqrt{\frac{k}{m}} v_i$$

$$k \leq \frac{a_{\max}^2}{v_i^2} m$$

$$= \frac{25g^2}{v_i^2} m$$

$$k \leq 25 m \left( \frac{g}{v_i} \right)^2$$

# Lavoro compiuto dalla forza di gravità



$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg(y_f - y_i)$$

indipendente del percorso!

$$W = \Delta K$$

$$-mg(y_f - y_i) = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

Esempio

$y_i$

$\vec{v}_i = 0$

$$h = y_i - y_f$$

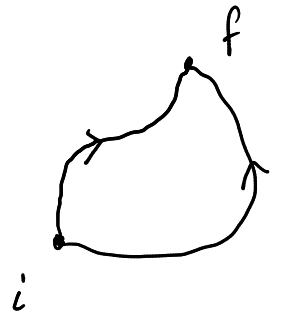
positivo

$y_f$

$\vec{v}_f$

# Forze conservative

Una forza è definita come conservativa se



\*  $\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$  è indipendente del percorso

$$* \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

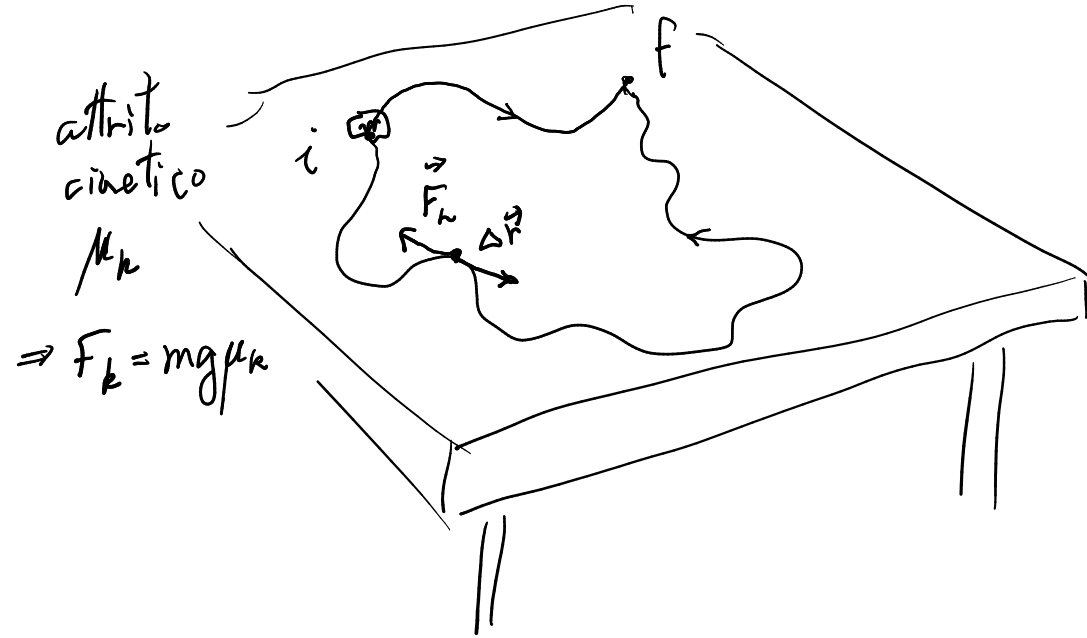
\*  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  ← integrale su un percorso chiuso "nabla"

\* esiste una funzione  $U$  tale che  $\vec{F} = \nabla U$  gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}$$

# Forze conservative

Forza non-conservativa : attrito



lunghezza del  
percorso

$$W = -\mu mg \cdot S$$

# Forze conservative e non conservative

Conservative

- \* Gravità
- \* Forza elastica
- \* Forza elettrica
- \* ...

Non-conservative

- \* Attrito
- \* Resistenza dell'aria
- \* Forza compiuta da una persona

Abbiamo speso un tempo considerevole per discutere le forze conservative; che cosa diremo delle forze non conservative? Approfondiremo l'argomento più di quanto non si faccia solitamente, e stabiliremo che non esistono forze non conservative! In realtà, tutte le forze fondamentali nella natura appaiono conservative. Questa non è una conseguenza delle leggi di Newton. Infatti, per quanto ne sapeva Newton, le forze avrebbero potuto essere non conservative, come apparentemente è l'attrito. Quando diciamo che l'attrito *apparentemente* lo è, usiamo un punto di vista moderno, essendo stato scoperto che tutte le forze elementari, le forze fra le particelle a livello fondamentale, sono conservative.



# Energia potenziale

Forza conservativa  $\vec{F}$

$$W_{if} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow \text{dipende solo da } \vec{r}_i, \vec{r}_f$$

$$= (-U(\vec{r}_f)) - (-U(\vec{r}_i))$$

perché  $\vec{F} = \nabla U$

In altre parole:

$$U(\vec{r}) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} + \text{costante}$$

← energia potenziale

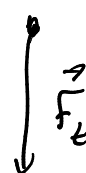
$$W_{i,f} = -\Delta U_{i,f}$$

il lavoro compiuto da  $i$  a  $f$   
è uguale a meno la differenza  
di energia potenziale

# Energia potenziale

\* Modo di immagazzinare energia per usare successivamente per compiere un lavoro "potenziale di compiere un lavoro"

\* Gravità


$$\vec{F}_g = -mg\hat{j} \quad d\vec{r} = dy\hat{j}$$

$$U(y) = mgy$$

$$U(y) = -\int (-mg dy) = mgy + \text{cost.}$$

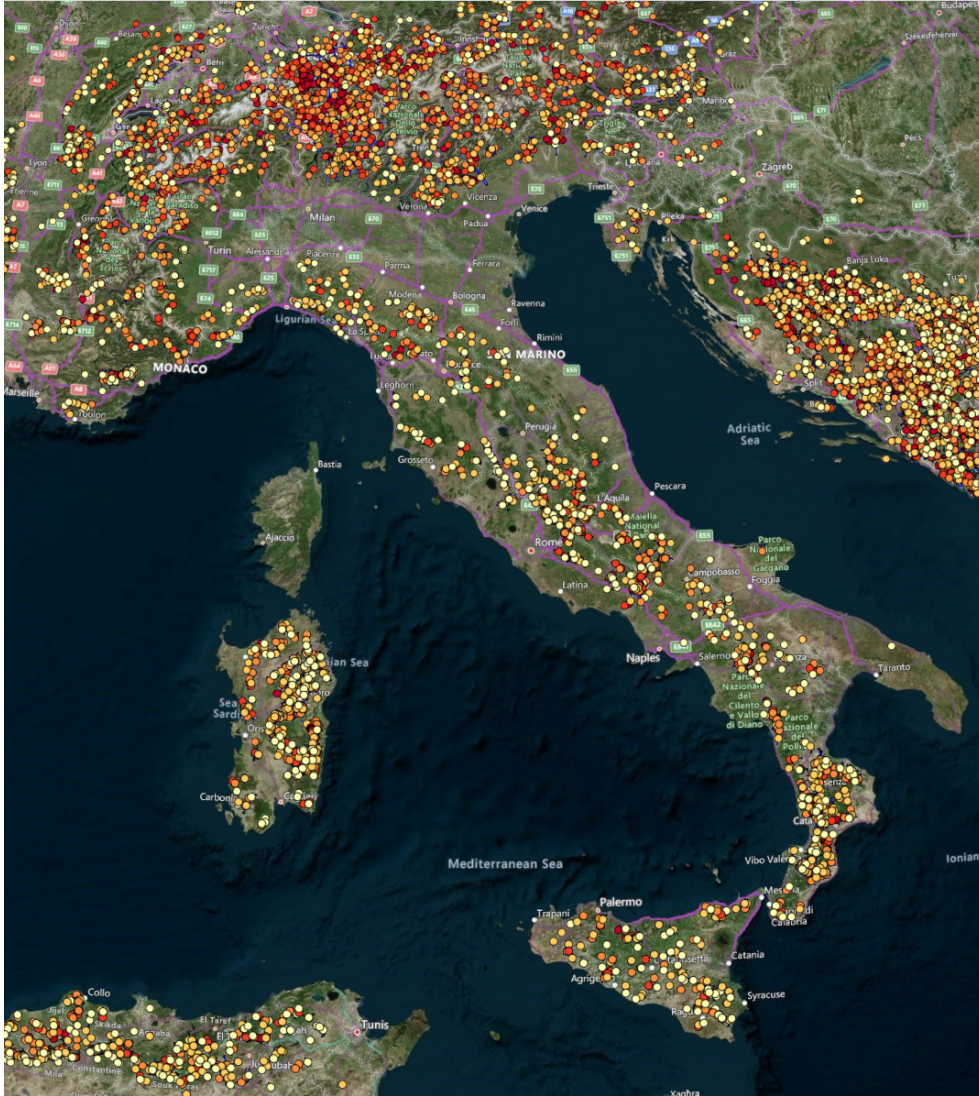
\* Elastica:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -kx dx$$

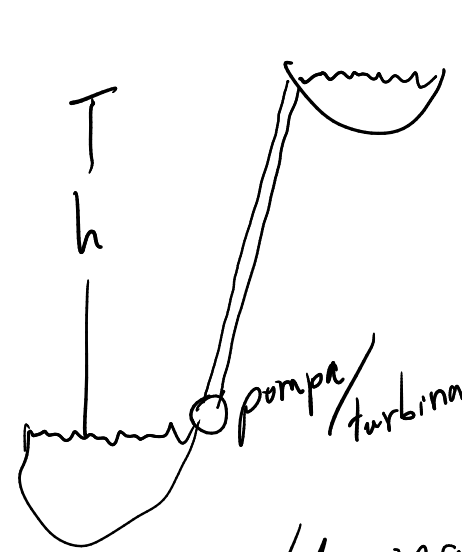
$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$U(x) = -\int (-kx) dx = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cost.}$$

# Pompaggio idroelettrico



- Fonti di energia rinnovabile spesso variabile
- Stoccaggio è essenziale
- Pompaggio idroelettrico in Italia: capacità 8 TWh annui.



Entraque  
 $h = 1050 \text{ m}$   
 $V = 9\,000\,000 \text{ m}^3$   
 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$

$$U = mgh = V\rho gh = 90 \text{ TJ}$$

# Potenza

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \text{quantità di energia trasferita per unità di tempo}$$

$$\text{Unità: Watt} \quad 1W = \frac{1J}{1s}$$

$$(\text{Unità di energia } 1kWh = 1000W \cdot 3600s = 3.6MJ)$$

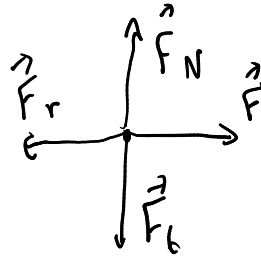
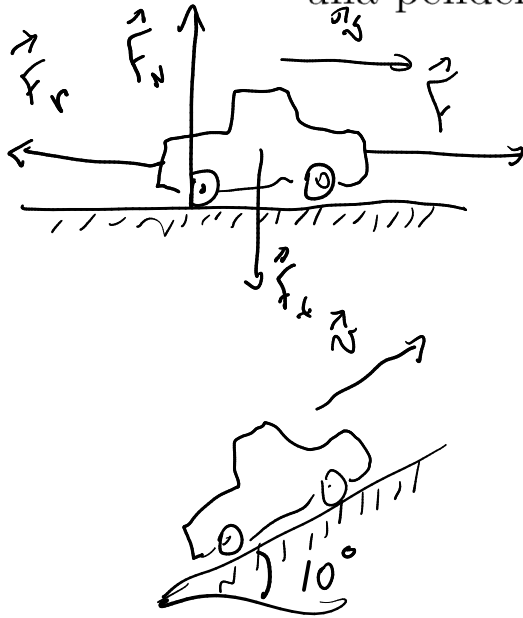
$$90TJ = 25GWh = 25 \times 10^6 kWh$$

$$\text{Entrata: flusso massimo per la turbina } 130 \frac{m^3}{s}$$

$$\begin{aligned} \text{Potenza massima?} \quad P &= \left| \frac{dW}{dt} \right| = \left| \frac{dU}{dt} \right| = \frac{d}{dt}(mgh) = \frac{dm}{dt} gh \\ &= \rho \frac{dV}{dt} gh = 1.4 MW \end{aligned}$$

# Esercizio

Una macchina di  $10^3 \text{ kg}$  necessita  $16 \text{ hp}$  di potenza per andare a velocità costante di  $80 \text{ km/h}$ . Quale potenza è necessaria per salire una pendenza di  $10^\circ$ ? ( $1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$ )



velocità costante  $\Rightarrow \vec{a} = 0$

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$F = F_r$$

teorema lavoro - energia cinetica

$$\Delta K = W$$

$$0 = W$$

$$= W_m + W_r$$

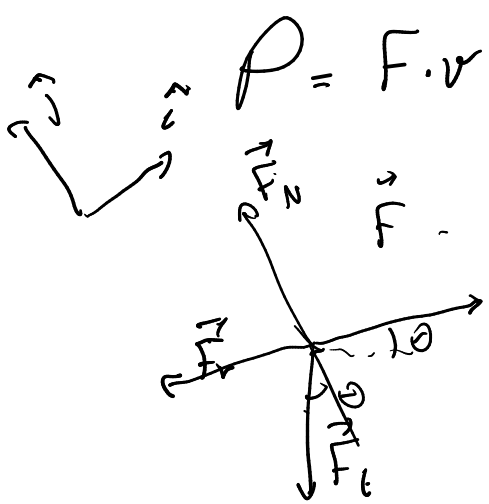
$$W_m = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad W_r = \int \vec{F}_r \cdot d\vec{r}$$

$$= F d \leftarrow \text{distanza}$$

$$P = \frac{d}{dt} W_m = \frac{d}{dt} F d = F v$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

# Esercizio


 $P = F \cdot v = 16 \text{ hp}$  per la strada orizzontale

$$\Sigma \vec{F} = 0 = \vec{F}_r + \vec{F}_N + \vec{F}_t + \vec{F}_g = 0$$

$$\hat{j}: F_N - F_t \cos \theta = 0$$

$$\hat{i}: F - F_r - F_t \sin \theta = 0$$

$$P = Fv = (F_r + F_t \sin \theta) v = F_r v + mg \sin \theta v$$

$$= 16 \text{ hp} + 10^3 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \sin 10^\circ \cdot 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

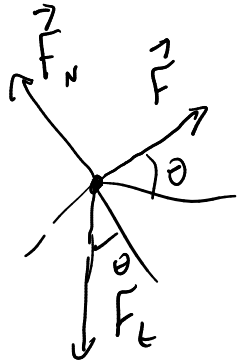
$$= 16 \text{ hp} + 9.8 \times 10^3 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} \sin 10^\circ \cdot \frac{80}{3.6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= 16 \text{ hp} + 34.8 \times 10^3 \text{ W} = 67 \text{ hp}$$

# Esercizio

Velocità di un motorino elettrico di 3000 W in salita di 10%.

La massa motorino + guidatore: 200 kg  
(si trascura la resistenza dell'aria)



$v$  costante  $\vec{a} = 0$

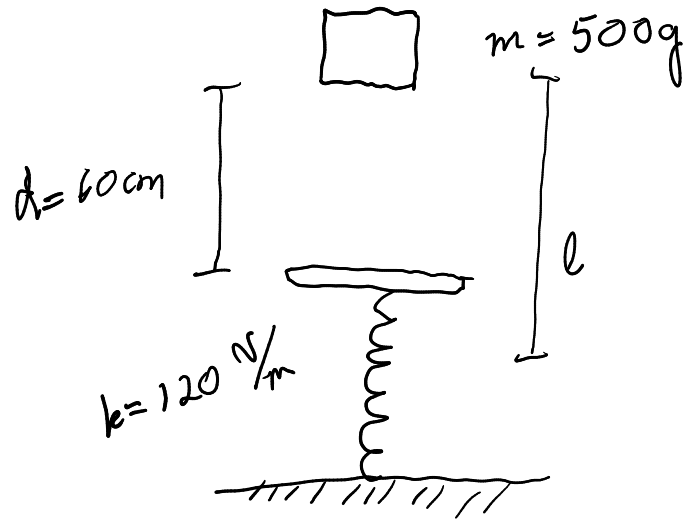
$$F = mg \sin \theta$$

$$P = mg \sin \theta v = F v \left( = \frac{d}{dt} (U(y)) = mg \frac{dy}{dt} \right)$$

$$v = \frac{P}{mg \sin \theta} = 55 \text{ km/h}$$

# Esercizio

Qual è  $l$  al momento dove l'assieme blocco-piattaforma si ferma?



Teorema lavoro-energia cinetica

$W = \Delta K$   
 initiale dopo contatto:



$$\Delta K = 0$$

$$W = 0 = W_g + W_m$$

$$= mgl - \frac{1}{2}k(l-d)^2 = 0$$

$$mgl - \frac{1}{2}kl^2 + kld - \frac{1}{2}kd^2 = 0$$

$$-\frac{2mg}{k}l + l^2 - 2ld + d^2 = 0$$

$$l^2 - 2\left(\frac{mg}{k} + d\right)l + d^2 = 0$$

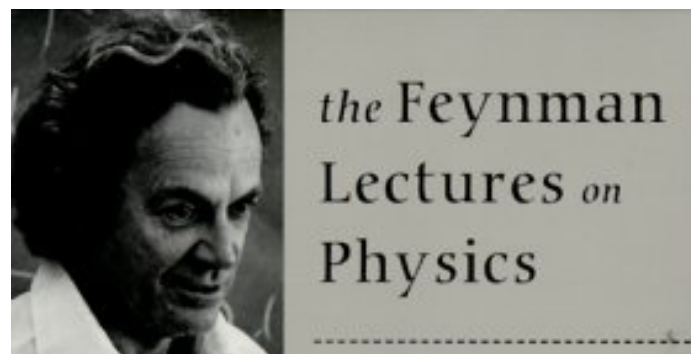
$$\boxed{\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x &= \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}}$$

$$l = \left(\frac{mg}{k} + d\right) \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k} + d\right)^2 - d^2}$$

per la nostra soluzione

$$l = \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kd}{mg}}\right) + d = 86.6 \text{ cm}$$

# Conservazione dell'energia

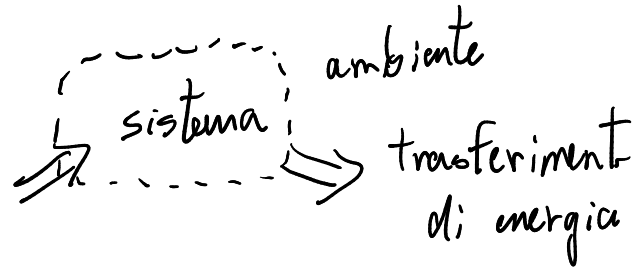


There is a fact, or if you wish, a *law*, governing all natural phenomena that are known to date. There is no known exception to this law—it is exact so far as we know. The law is called the *conservation of energy*. It states that there is a certain quantity, which we call energy, that does not change in the manifold changes which nature undergoes.

It is important to realize that in physics today, we have no knowledge of what energy *is*.

# Conservazione dell'energia

1) sistema



2) conservazione dell'energia

$$E_{\text{sistema}} = \boxed{K + U} + Q$$

energia meccanica

energia interna

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \sum \text{trasferimenti} \quad (\text{lavoro} + \text{calore})$$

esempi di sistema

- \* un corpo solo

- \* due (o più) corpi che interagiscono

- \* un corpo deformabile

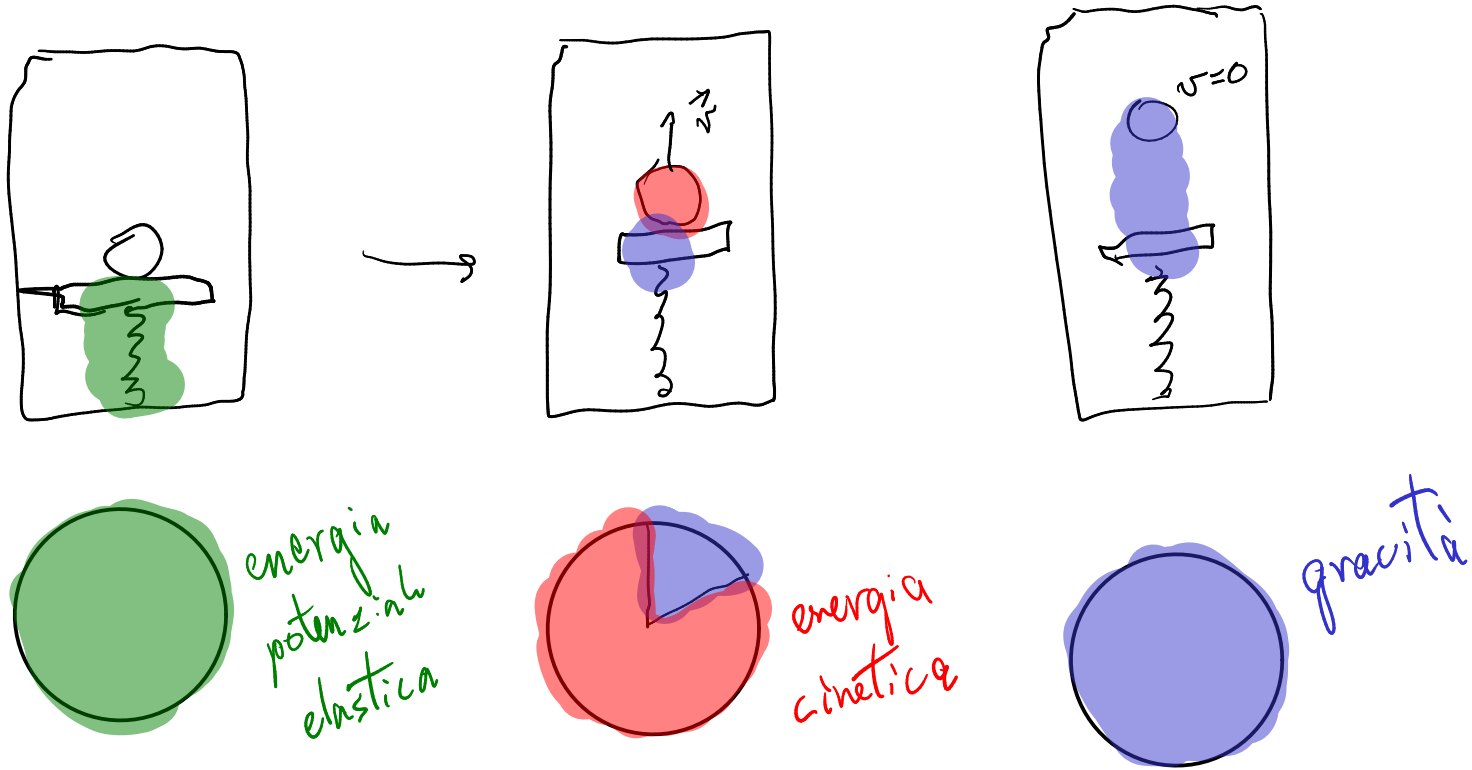
- \* una regione dello spazio

Meccanica:

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \Delta K + \Delta U = W$$

lavoro compiuto  
sul sistema

# Conservazione dell'energia

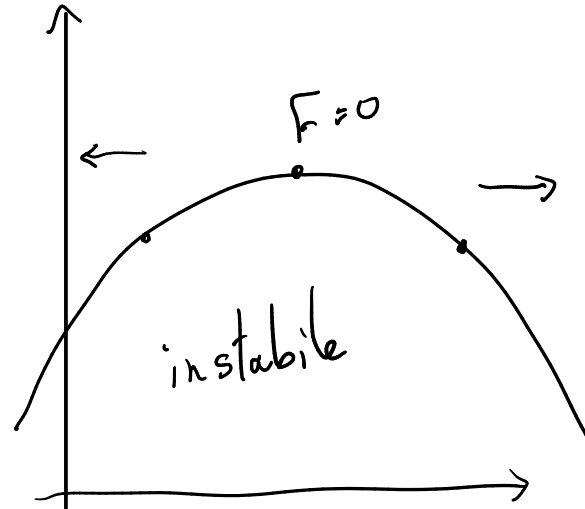
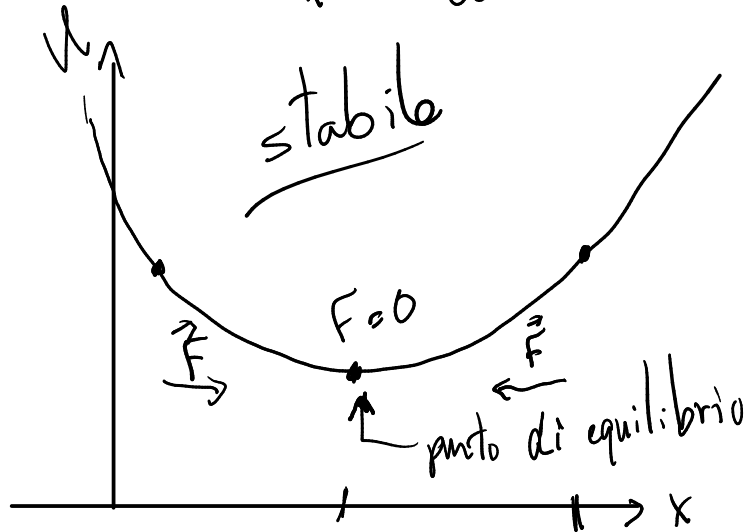
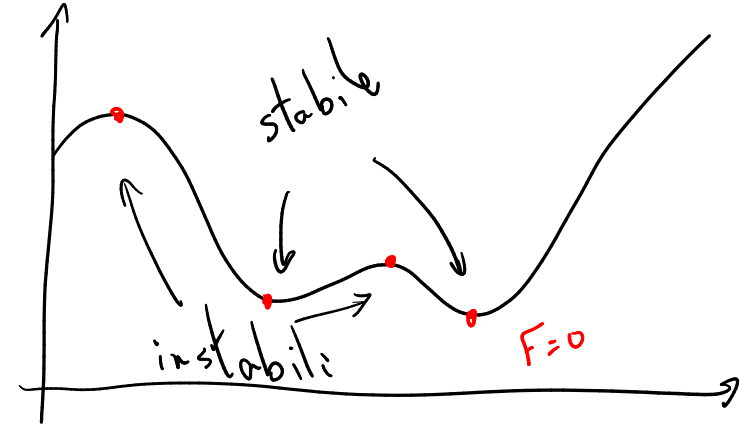


# Energia potenziale

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{forze conservative}$$

1D:  $U(x) = - \int F(x) dx$

$$F_x = - \frac{dU}{dx} \quad \text{forza} = - \text{pendenza}$$



$$\frac{d^2 U}{dx^2} > 0 \quad \text{stabile}$$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} < 0 \quad \text{instabile}$$

# Energia potenziale

2<sup>a</sup> legge di Newton



$$\vec{F}_m + \vec{F}_t = m\vec{a} = 0$$

$$F_m = F_t$$

$$-ky = mg$$

$$y = -\frac{mg}{k}$$

Energia potenziale totale:

$$U(y) = mgy + \frac{1}{2}ky^2$$

minimo

equilibrio:  $\frac{dU}{dy} = 0 = mg + ky$

$$\rightarrow y = -\frac{mg}{k}$$

8.17 Es. risolti

8.18

Prob. risolti

8.4

7.21 Es. risolti

8.2 Prob. risolti

# Energia potenziale gravitazionale

$$U(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

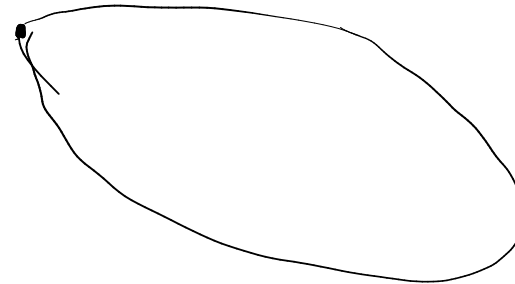
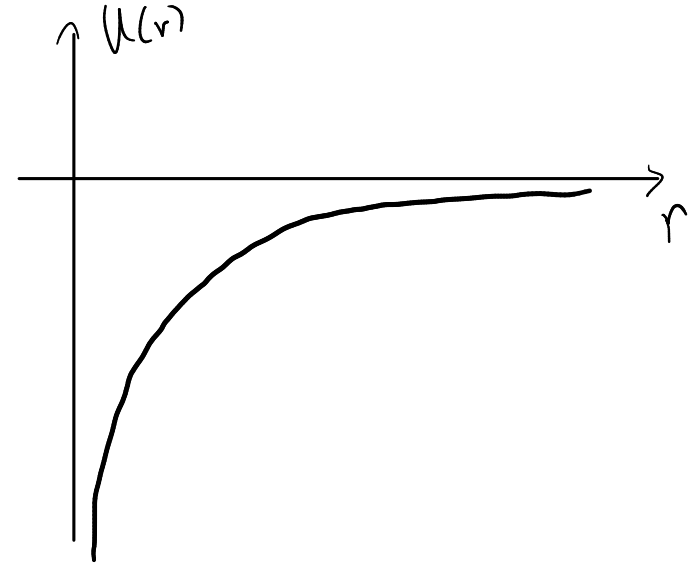
Energia meccanica totale di un satellite in orbita attorno la terra

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_K - \underbrace{\frac{G m_t m}{r}}_U$$

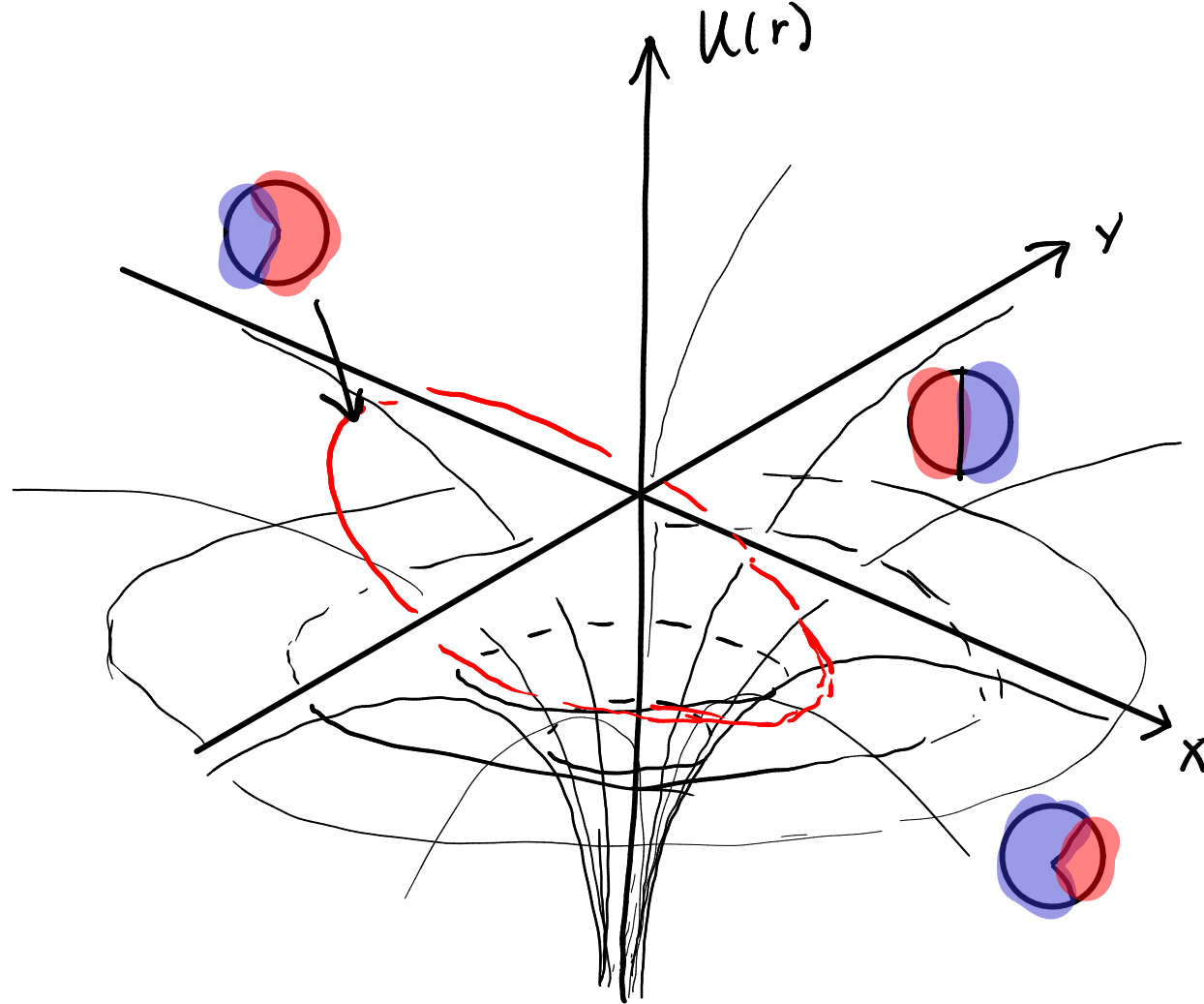
$$\Delta E = 0 \quad K + U = \text{costante}$$

$E$  : energia di legame

$E < 0$  : condizione per orbita



# Energia potenziale gravitazionale



# Velocità di fuga

$E = 0$  : condizione che permette al satellite di fuggire, uscire del campo gravitazionale.

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{G m_t m}{r}$$

$$v_{fuga} = \sqrt{2 \frac{G m_t}{r}}$$

Terra:

$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2 G m_t}{R_t}} = \sqrt{2} \sqrt{g R_t}$$

$$\approx 11000 \text{ m/s} \approx 40000 \text{ km/h}$$