Risposta allo scalino di sistemi LTI a tempo discreto

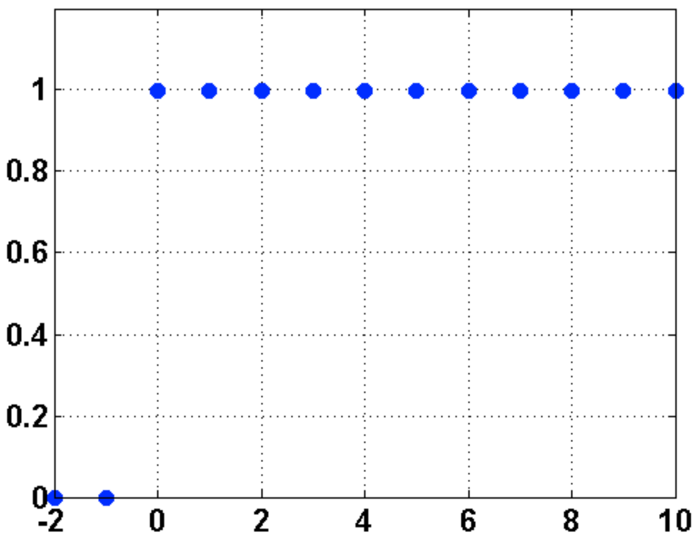
Risposta allo scalino

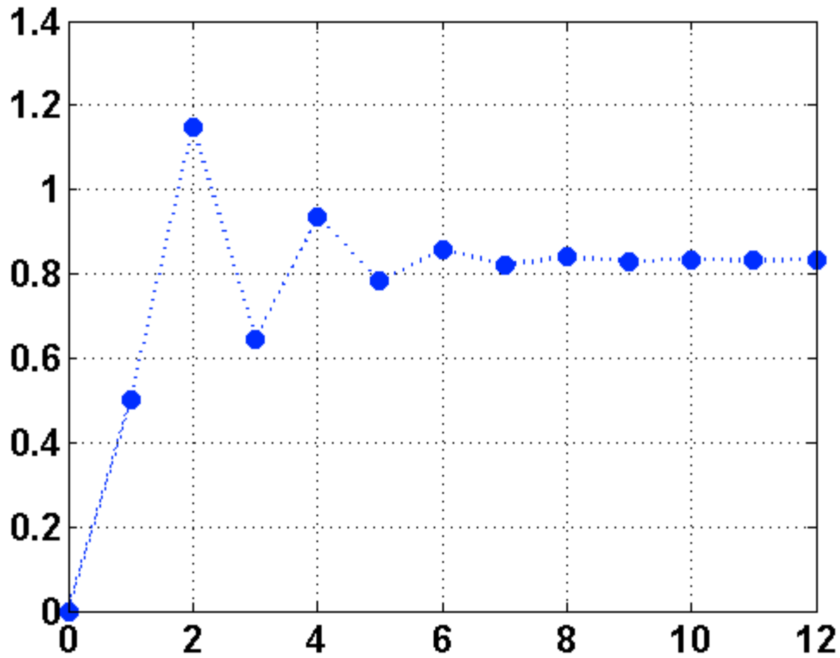
$$x(0) = 0$$

$$G(z)$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$y(k) = ?$$



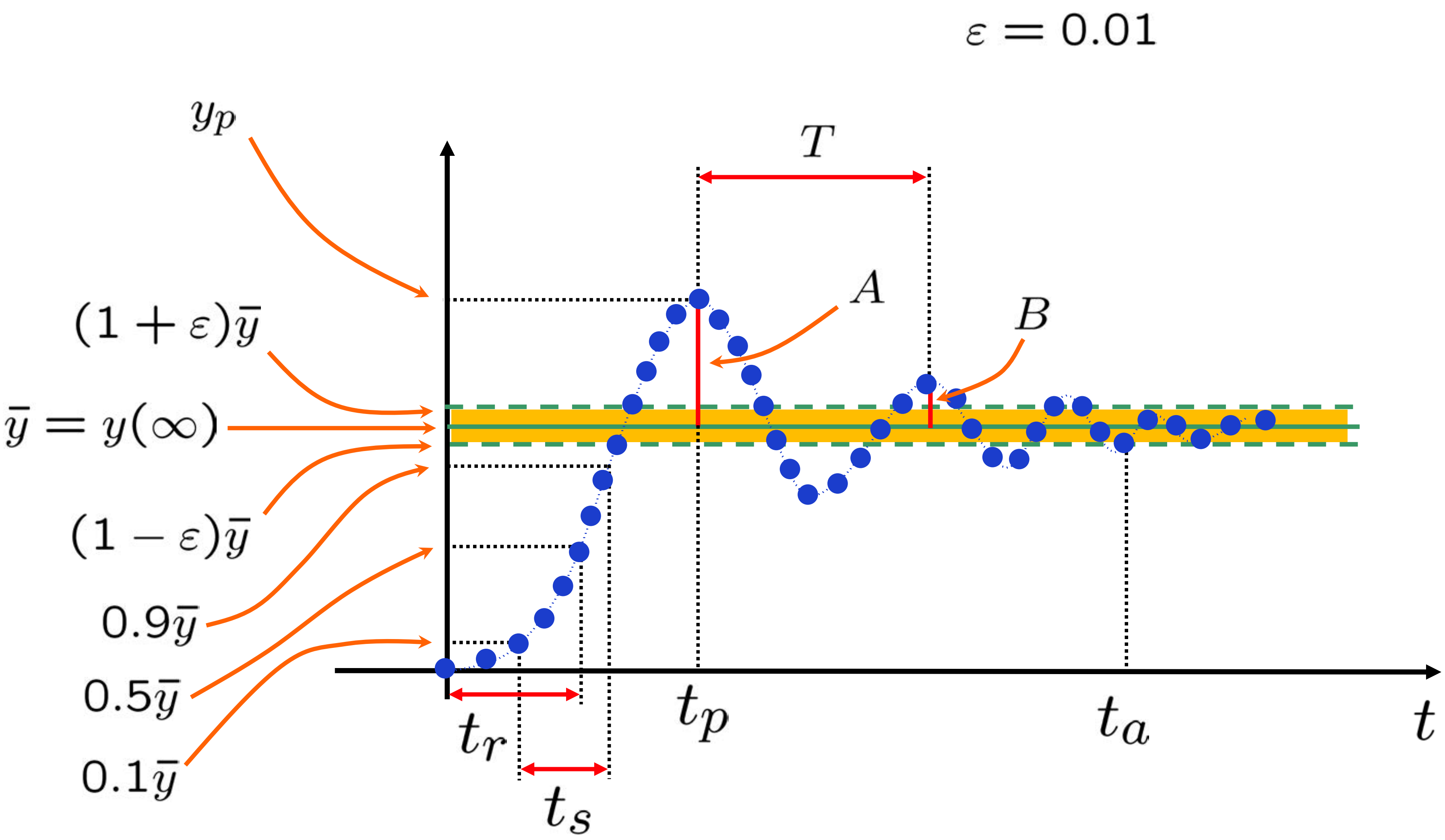


- Risposta allo scalino: parametri caratteristici

- I **parametri** definiti in precedenza per la **risposta allo scalino unitario** di sistemi LTI a tempo continuo (cfr. Parte 7, slide #7, 8) sono definibili allo stesso modo anche nel caso di sistemi LTI a tempo discreto (si veda la slide successiva).

- Tuttavia le **formule** trovate in precedenza (Parte 7, slide # 12 e 34) per calcolare (in modo esatto oppure approssimato) i valori di quei parametri nel caso di sistemi a tempo continuo **non sono applicabili ne' facilmente adattabili** al **caso a tempo discreto**.

- Risposta allo scalino: parametri caratteristici



Valore iniziale e finale

$$Y(z) = \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0} \frac{z}{z-1}$$

Valore iniziale

Uso il teorema del valore iniziale

$$y(0) = \lim_{z \to \infty} \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0} \frac{z}{z-1}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad m < n \\ \dfrac{\beta_m}{\alpha_n} & , \quad m = n \end{cases}$$

Iterando il procedimento posso calcolare anche i campioni successivi

Nell' ipotesi che sia m < n, si arriva così al risultato seguente

$$y(k) = \begin{cases} 0 & , \quad k < n-m-1 \\ \dfrac{\beta_m}{\alpha_n} & , \quad k = n-m \end{cases}$$

Il numero dei campioni nulli iniziali della risposta allo scalino prende il nome di **tempo di latenza**

$$n - m \stackrel{\triangle}{=} \text{tempo di latenza}$$

Il tempo di latenza è pari al **grado relativo della FdT** (cioè alla differenza di grado tra polinomio a denominatore e polinomio a numeratore della stessa).

Valore finale

Supponendo **verificate le ipotesi** di applicabilità, utilizzo il teorema del valore finale

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^g} \; \gamma \; \frac{\prod_i (z - z_i)}{\prod_i (z - p_i)} \; \frac{\prod_i \left(z^2 - 2\delta_i \cos(\zeta_i)\, z + \delta_i^2\right)}{\prod_i \left(z^2 - 2\rho_i \cos(\vartheta_i)\, z + \rho_i^2\right)}$$

$$\lim_{z \to 1} \left[\left(1 - z^{-1}\right) Y(z)\right] = \begin{cases} \mu = y(\infty) & , \quad g = 0 \\ 0 = y(\infty) & , \quad g < 0 \\ \infty & , \quad g > 0 \end{cases}$$

In quest' ultimo caso il teorema non è applicabile! Perché? 

Riassumendo

Utilizzando i teoremi del **valore iniziale** e del **valore finale** (quando applicabile) siamo in grado di determinare quantitativamente l'andamento della **risposta allo scalino** negli istanti iniziali (tempo di latenza ed istanti immediatamente successivi) ed il valore di regime della risposta (quindi la risposta a tempo lungo) allo scalino.

In realtà i due teoremi permettono di analizzare gli istanti iniziali ed il comportamento a tempo lungo della risposta di un sistema dinamico a tempo discreto asintoticamente stabile, qualsiasi sia l'ingresso applicato.

Studio del transitorio

$$G(z) = \frac{N_G(z)}{D_G(z)} = \frac{N_G(z)}{\prod_i (z - p_i) \prod_h \left(z^2 - 2\rho_h \cos(\vartheta_h)\, z + \rho_h^2\right)}$$

Supponiamo che i poli siano tutti distinti, $|p_i| < 1 \ \forall i$ e $g = 0$. Allora si ottiene

$$y(k) = \frac{N_G(1)}{D_G(1)} 1(k) + \sum_i P_i\, p_i^k + \sum_h 2\, |Q_h|\, \rho_h^k \cos(\vartheta_h k + \angle Q_h)\, 1(k)$$

$\frac{N_G(1)}{D_G(1)} \rightarrow \mu$

$$P_i = \frac{N_G(p_i)}{(p_i - 1) \left.\frac{d\,D_G(z)}{dz}\right|_{z=p_i}} \qquad Q_h = \frac{N_G(\rho_h\, e^{j\vartheta_h})}{(\rho_h\, e^{j\vartheta_h} - 1) \left.\frac{d\,D_G(z)}{dz}\right|_{z=\rho_h\, e^{j\vartheta_h}}}$$

$$y(k) = \overbrace{\mu\, 1(k)}^{\text{Regime permanente}} + \underbrace{\sum_i P_i p_i^k + \sum_h 2\,|Q_h|\,\rho_h^k \cos(\vartheta_h k + \angle Q_h)\, 1(k)}_{\text{transitorio}}$$

La risposta allo scalino, nelle ipotesi adottate, possiede un **transitorio**, determinato sia dai poli reali che da quelli complessi coniugati della FdT, che tende a svanire al trascorrere del tempo k.

Esiste inoltre un termine di **regime**, dato da un segnale a scalino di ampiezza pari al guadagno statico della FdT.

Sistemi del primo ordine

$$G(z) = \frac{\mu(1-p)}{z-p},\ p \neq 0$$

$$|p| < 1$$

$$y(k) = \mu(1-p^k)\,1(k)$$

Se $0 < p < 1$ la risposta è monotona, altrimenti è oscillante.

In ogni caso, la risposta raggiunge la condizione di regime tanto più velocemente quanto più è piccolo $|p|$

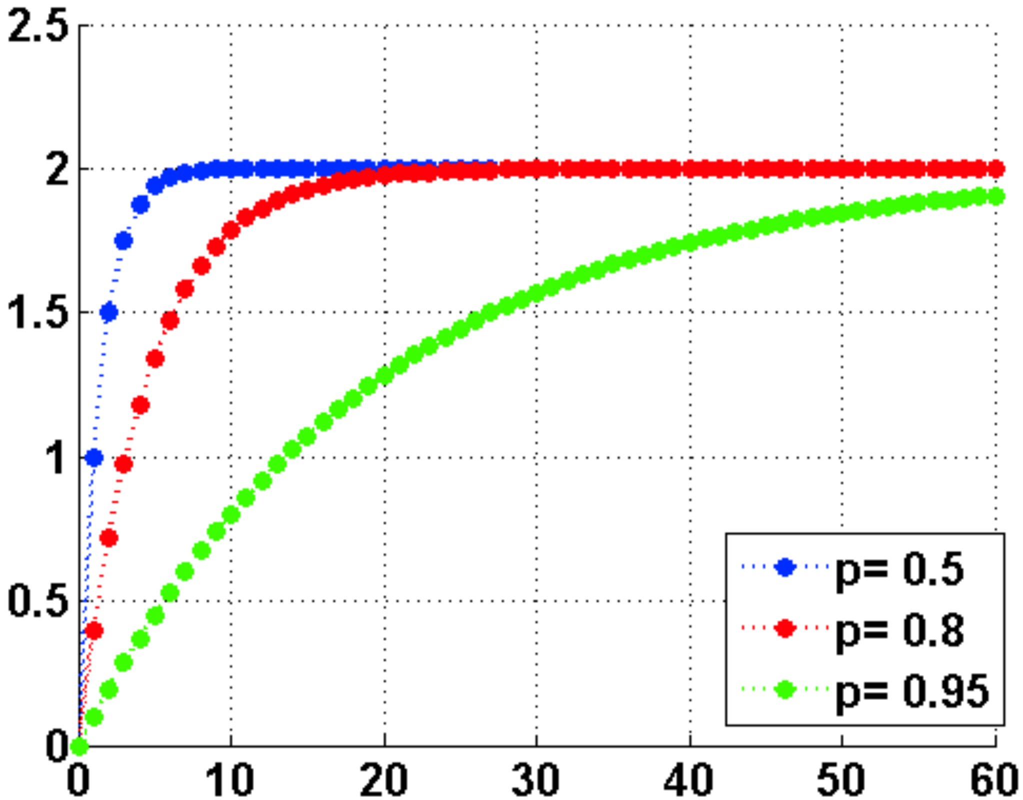
Cfr. slide # 55

Tempo di assestamento al (100-ε)%

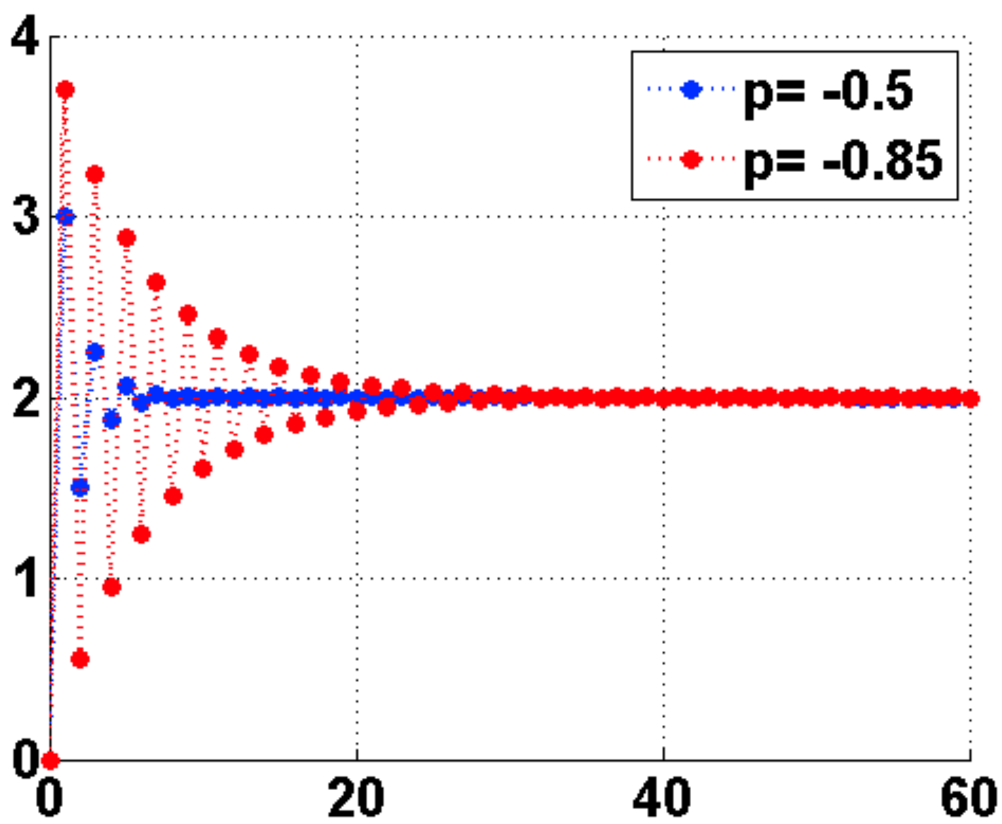
Il più piccolo numero intero che rispetta la relazione $k_{as} \geq \dfrac{\ln 0.01\varepsilon}{\ln |p|}$

Risposta allo scalino del sistema del 1º ordine, al variare della posizione del polo.

$$0 < p < 1$$



- La risposta allo scalino in queste condizioni è sempre monotona crescente.
- Quanto più il polo si avvicina ad 1, tanto più lenta è la risposta del sistema.



Risposta allo scalino del sistema del 1º ordine, al variare della posizione del polo.

$$-1 < p < 0$$

- La risposta allo scalino in queste condizioni è sempre oscillante, con campioni alternativamente sopra/sotto il valore di regime.
- Quanto più $|p| \to 1$, tanto più lenta è la risposta del sistema.

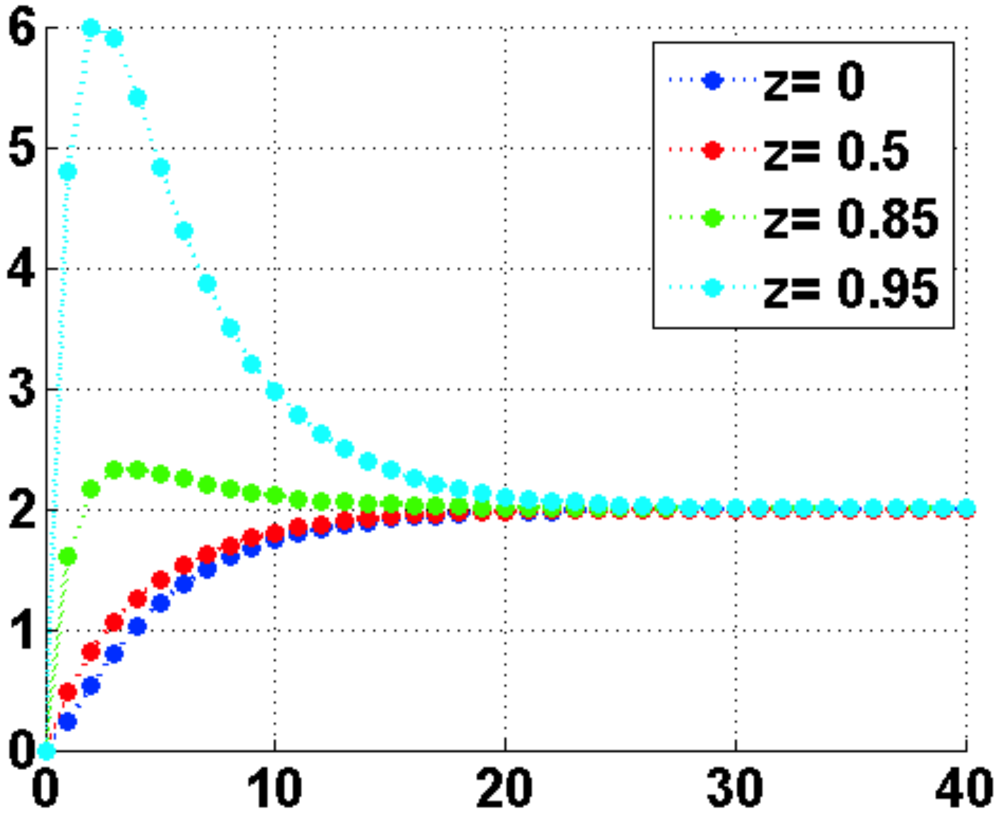
Sistemi del secondo ordine: poli reali

$$G(z) = \frac{\mu(1-p_1)(1-p_2)}{1-z_1} \frac{z-z_1}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

$$y(k) = \mu\,1(k) + P_1\,p_1^k\,1(k) + P_2\,p_2^k\,1(k)$$

- L'andamento della risposta dipende dalla **posizione relativa** tra lo zero ed i due poli. Lo **zero** può **velocizzare** la risposta, oppure provocare **sovra/sotto-elongazioni**, oppure essere ininfluente a seconda della sua posizione rispetto ai due poli.

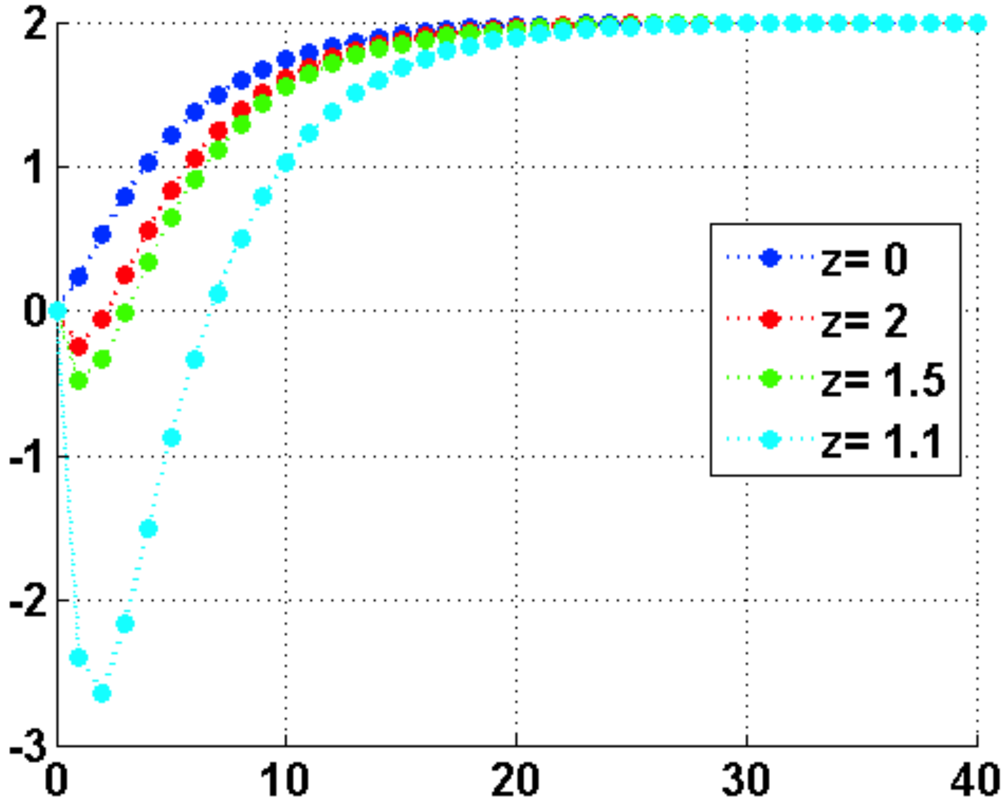
- Per il contributo dei poli valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per i sistemi del primo ordine.



Risposta allo scalino del sistema del 2° ordine, al variare della posizione dello zero.

$$p_1 = 0.4$$
$$p_2 = 0.8$$
$$0 < z_1 < 1$$

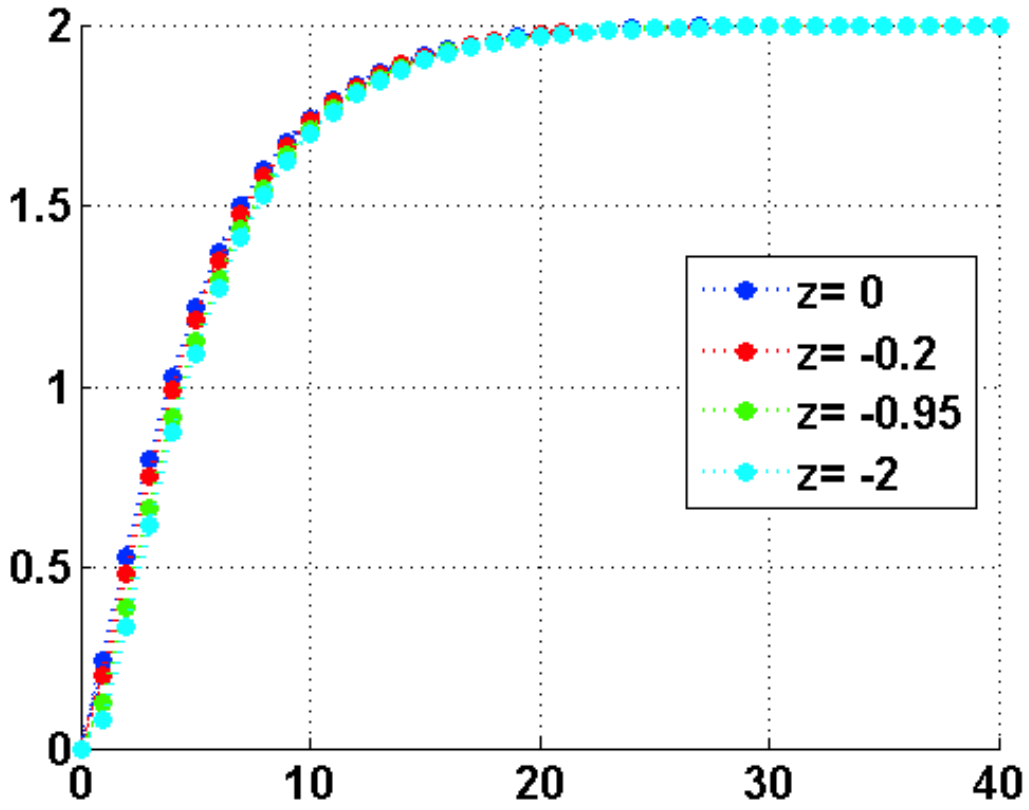
- Se $p_2 > p_1$ e $z_1 < p_2$, la risposta allo scalino è tanto più **veloce**, quanto più aumenta z_1
- Per $z_1 > p_2$ la risposta presenta una **sovraelongazione**, tanto più marcata quanto più $z_1 \to 1$
- Per $z_1 < p_1$, la posizione dello zero diviene tanto **meno influente**, quanto più $z_1 \to 0$



Risposta allo scalino del sistema del 2° ordine, al variare della posizione dello zero.

$$p_1 = 0.4$$
$$p_2 = 0.8$$
$$z_1 > 1$$

- Per $z_1 > 1$ la risposta presenta una **sottoelongazione**, tanto più pronunciata quanto più $z_1 \to 1$



Risposta allo scalino del sistema del 2º ordine, al variare della posizione dello zero.

$$p_1 = 0.4$$
$$p_2 = 0.8$$
$$z_1 < 0$$

- Per $z_1 < 0$ lo zero è **sostanzialmente ininfluente**, sia che abbia modulo inferiore o superiore all'unità. Il motivo è la "lontananza" dai poli "dominanti" del sistema.

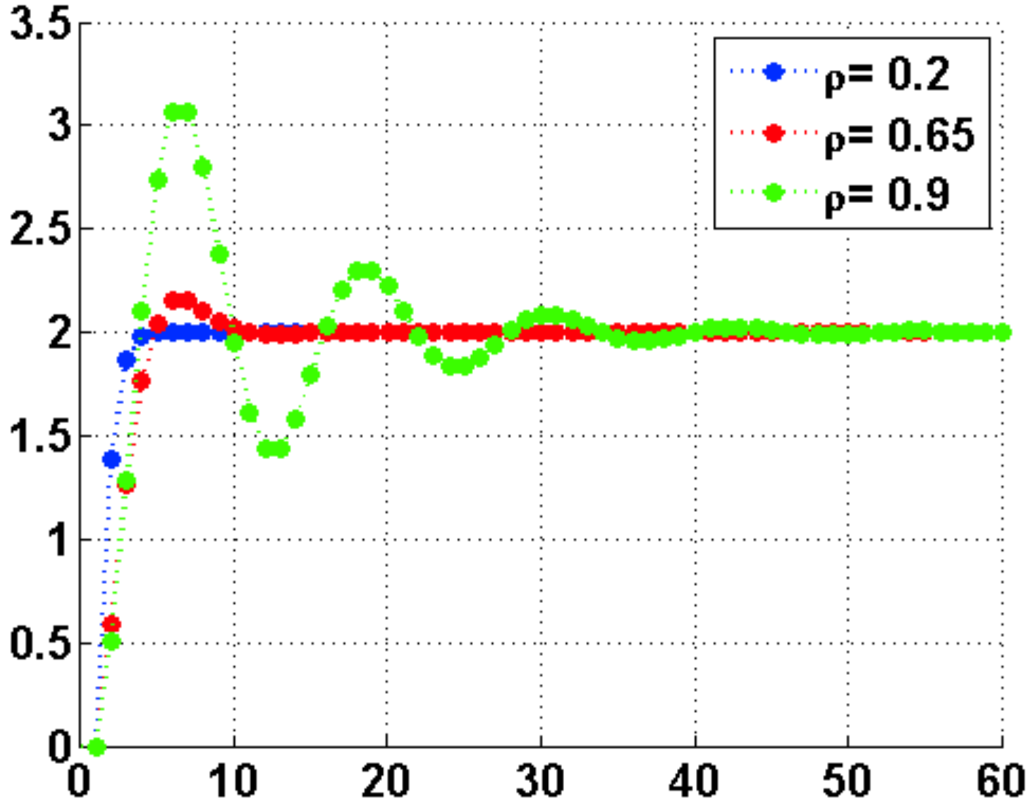
Sistemi del secondo ordine: poli complessi coniugati

$$G(z) = \frac{\mu\left(1 - 2\rho\cos(\vartheta) + \rho^2\right)}{\left(z^2 - 2\rho\cos(\vartheta)\, z + \rho^2\right)}$$

$$p_{1,2} = \rho\, e^{\pm j\vartheta} \qquad |p_{1,2}| = \rho < 1$$

$$y(k) = \mu\, 1(k) + 2\,|Q|\,\rho^k \cos(\vartheta k + \angle Q)\, 1(k)$$

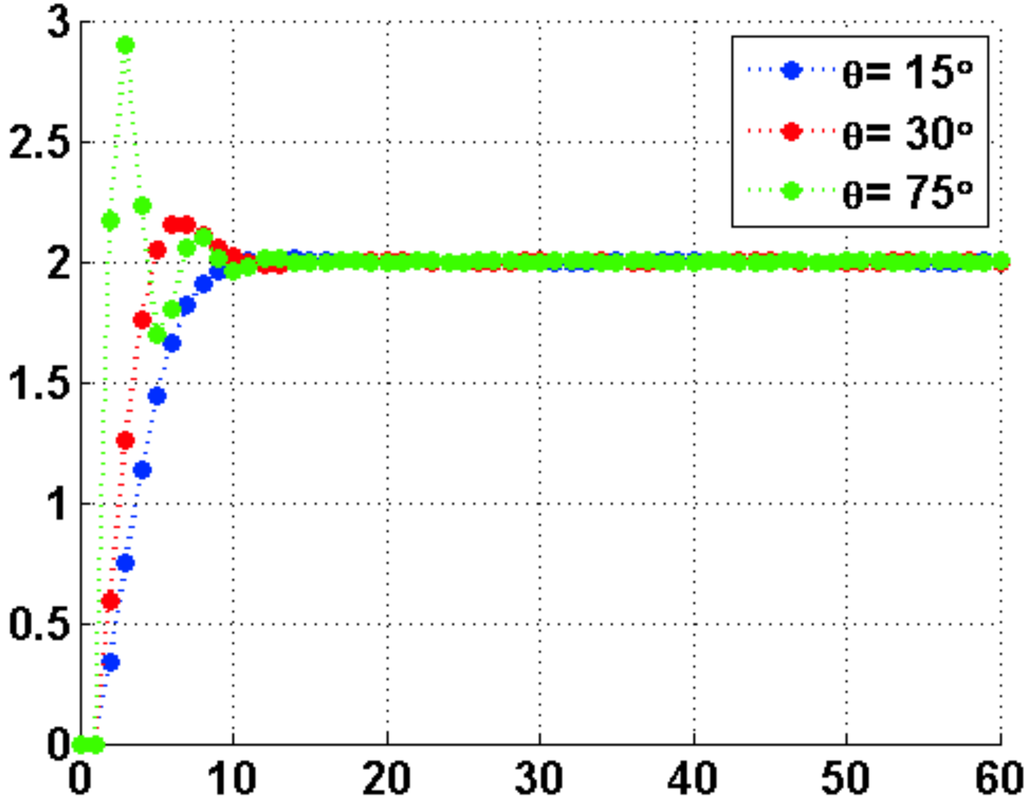
- Le **oscillazioni** sono **smorzate** ($|\rho| < 1$) e modulate dal termine ρ^k .
- Il **tempo di assestamento** è tanto maggiore quanto più il modulo dei poli è prossimo ad 1.



Risposta allo scalino del sistema del 2° ordine, con due poli complessi coniugati, al variare del modulo dei poli ρ.

$$p_{1,2} = \rho\, e^{\pm j 30^\circ}$$

- Al crescere del modulo ρ aumentano la sovraelongazione ed il tempo di assestamento.



Risposta allo scalino del sistema del 2° ordine, con due poli complessi coniugati, al variare della fase dei poli θ.

$$p_{1,2} = 0.65\, e^{\pm j\vartheta}$$

- Al crescere della fase θ aumenta la sovraelongazione.
- Il tempo d' assestamento rimane pressoché invariato.