09/03/2022

Recap

- Introduzione al concetto di integrale di Riemann
- Prime proprietà dell'integrale
- Enunciato del teorema fondamentale del calcolo

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f \in C^1([a,b])$, sia $A : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e definita come $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, allora

$$\frac{d}{dx} A(x) = f(x)$$

Dim Considero la funzione $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Calcoliamo dunque $A'(x)$ come limite del rapporto incrementale di A in x (supponiamo che $h>0$)

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right]$$

utilizziamo la proprietà 2 dell'integrale

$\left(\int_\alpha^\beta g(t)\,dt = \int_\alpha^\gamma g(t)\,dt + \int_\gamma^\beta g(t)\,dt \right)$ otteniamo che

$$\int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

e quindi otteniamo che

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Definiamo adesso i valori

$$m(h) = \min_{t\in[x,x+h]} f(t) \quad , \quad M(h) = \max_{t\in[x,x+h]} f(t)$$

Per la proprietà di monotonia dell'integrale (proprietà 4) si ha che

$$\int_x^{x+h} m(h)\,dt \le \int_x^{x+h} f(t)\,dt \le \int_x^{x+h} M(h)\,dt$$

$$\int_x^{x+h} m(h)\,dt = m(h)(x+h-x) = m(h)\cdot h \qquad \int_x^{x+h} M(h)\,dt = M(h)\cdot h$$

Questa catena di disuguaglianze mi assicura che

$$m(h) \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \le M(h) \qquad (*)$$

Siamo dunque in una situazione perfetta per applicare il teorema dei 2 carabinieri

$$m(h) = \min_{t\in[x,x+h]} f(t) \xrightarrow{h\to 0} f(x)$$ in quanto, per ipotesi, f è continua.

Con un analogo ragionamento possiamo dedurre che
$M(h) \xrightarrow{h \to 0} f(x)$

Da (*) otteniamo quindi, applicando il teorema dei 2 carabinieri, che

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x),$$

ossia

$$A'(x) = f(x).$$

<u>NB</u>: Gli stessi calcoli possono essere svolti nel caso in cui $h < 0$.

<u>Morale</u>: Derivando l'integrale definito otteniamo l'integranda.

<u>(Secondo) Teorema fondamentale del calcolo integrale</u>

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile, allora $\forall\, x \in [a,b]$ si ha che

$$\int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a)$$

<u>Dim</u> Definiamo $B(x) = \int_a^x f'(t)\, dt$. Utilizzando il TFCI otteniamo che $B'(x) = f'(x)$.

$\Longrightarrow B(x) = f(x) + cst$. valutiamo questa identità in $x = a$

$B(a) = f(a) + cst$, tuttavia

$$B(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$$

$$\Longrightarrow \quad cst = -f(a)$$

Sostituendo ottengo che

$$B(x) = f(x) - f(a) \qquad \#$$

Notazione $\int_a^b f'(t)\,dt = f(t)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$

Es

- $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} (-\cos x)'\,dx = -\cos(\pi/2) - (-\cos(0))$

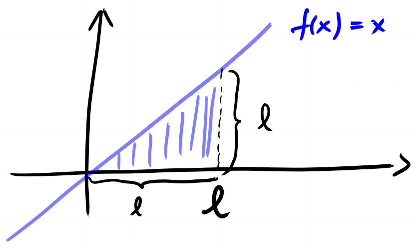
  $= 0 + 1 = 1$ //

- $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \int_0^{\pi} (\sin x)'\,dx = \sin \pi - \sin 0$

  $= 0$

Es Sia $\ell > 0$ quanto vale

$$\int_0^{\ell} x\,dx = \int_0^{\ell} \left(\frac{x^2}{2}\right)'dx = \ell^2/2$$



$$\frac{\ell \cdot \ell}{2} = \frac{\ell^2}{2}$$

Notazione Nel contesto del calcolo integrale se f è la derivata di F si dice che F è la primitiva di f e si scrive

$$\underbrace{\int f(t)\,dt}_{} = F(t) + C \quad , \text{ dove } C \text{ è una costante reale}$$

Integrale indefinito di f è l'insieme di tutte le primitive di f.

Integrali indefiniti di funzioni elementari

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \sin x = -\cos x + C \qquad \int \cos x \, dx = \sin x \, dx + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$$

Integrazione per parti

Ricordiamoci che

$$(fg)' = f'g + fg' .$$

Possiamo dunque integrare l'equazione qui sopra ottenendo che

$$\int (fg)' \, dx = \int f'g + fg' \, dx$$

$$fg + C = \int f'g \, dx + \int fg' \, dx$$

Teorema Siano f e g continue e derivabili in $[a,b]$, allora

$$\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx$$

per ogni $x \in [a,b]$.

Es – $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

Calcoliamo dunque dapprima l'integrale indefinito di $x \sin x$

$$\int \underset{f(x)}{x} \, \underset{g'(x)}{\sin x} \, dx \underset{IPP}{=} -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$f(x) = x \quad g'(x) = \sin x \implies f'(x) = 1 \quad g(x) = -\cos x$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Quindi

$$\int_0^{\pi} x \sin x = (-x \cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = -\pi \underbrace{\cos \pi}_{=-1} + \cancel{\sin \pi}^{=0} - (\cancel{0 \cos(0)}^{0} + \cancel{\sin(0)}^{0})$$

$$= \pi$$

– $\int \underset{f(x)}{x^2} \, \underset{g'(x)}{e^x} \, dx$

$$f(x) = x^2 \quad g'(x) = e^x \implies f'(x) = 2x \quad g(x) = e^x$$

$$\underset{}{\overset{IPP}{=}} x^2 e^x - \int \underset{h(x)}{\underline{2x}} \, \underset{g'(x)}{e^x} \, dx \qquad h(x) = 2x \quad g'(x) = e^x \implies h'(x) = 2 \quad g(x) = e^x$$

$$\overset{IPP}{=} x^2 e^x - \left[2x e^x - \int 2 e^x \, dx \right]$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C' = e^x (x^2 - 2x + 2) + C' \quad \#$$

– $\int \log x \, dx = \int \underset{f(x)}{\underline{\log x}} \cdot \underset{g'(x)}{\underline{1}} \, dx \qquad f(x) = \log x \quad g'(x) = 1 \implies f'(x) = 1/x \quad g(x) = x$

$$\overset{IPP}{=} x \log x - \int \underbrace{\frac{1}{x} \cdot x}_{=1} \, dx = x \log x - x + C = x(\log x - 1) + C$$

Es $\int \underbrace{x}_{g'(x)} \underbrace{\log x}_{f(x)} \, dx$

$$g'(x) = x \quad f(x) = \log x \implies g(x) = x^2/2 \quad f'(x) = 1/x$$

$$\overset{IPP}{=} \log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} \left(\log x - 1/2 \right) + c \quad \#$$