14/03/2022

Recap

Teorema (Integrazione per parti) Se f e g sono fz derivabili in $[a,b]$ allora

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$$

Integrazione per sostituzione

Ricordiamoci la formula di derivazione di una composizione di funzioni

$$(F \circ g)'(x) = (F(g(x)))' = F'(g(x))\, g'(x)$$

Esempio $h(x) = e^{x^2}$, calcolare $f'(x)$

$$h'(x) = 2x\, e^{x^2}$$

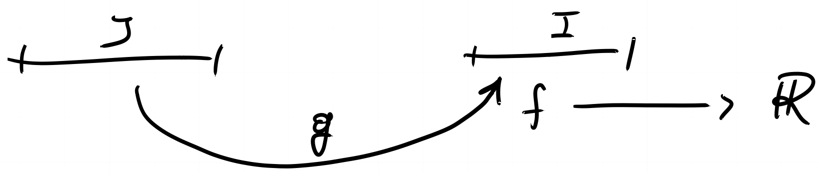
In questo caso $F(y) = e^{y}$ e $g(x) = x^2$ e dunque

$$h(x) = F(g(x)) = e^{x^2}$$

Teorema Sia F una primitiva di f in un intervallo I, sia $g : J \to I$ una funzione derivabile in J allora

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

Osservazioni -



- Proviamo a vedere se la formula data dal teorema è corretta.

Calcoliamo dunque la derivata di $F \circ g$

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))+C\right] = F'(g(x))\, g'(x)$$

tuttavia, per ipotesi $F' = f$ (ossia F è primitiva di f), ne otteniamo dunque che

$$= f(g(x))\, g'(x)$$

Esempio $\triangleright$ $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1-\sin x}\,dx$

Notiamo che $(1-\sin x)' = -\cos x$. Possiamo dunque definire la funzione

$$g(x) = 1-\sin x$$

con tale sostituzione otteniamo che $\cos x = -g'(x)$, ossia

$$\int \frac{\cos x}{1-\sin x}\,dx = -\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = -\int \frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)\,dx = (*)$$

Qual'è la funzione cui primitiva sia $1/y$?

La risposta è la funzione $y \longmapsto \log|y|$

Applicando la formula di integrazione per sostituzione ottengo che

$$(*) = -\log|g(x)| + C = -\log|1-\sin x| + C$$
$$= \log\left(\frac{1}{|1-\sin x|}\right) + C.$$

Esempio $\displaystyle\int x e^{x^2}\,dx =$

Utilizzando la notazione del teorema cerchiamo una funzione $g(x)$ t.c. $g'(x) = 2x \longrightarrow g(x) = x^2$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{g'(x)}\, \underbrace{e^{x^2}}_{e^{g(x)}}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{g(x)}\, g'(x)\,dx = \frac{1}{2}e^{g(x)} + C$$
$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

⚠ Cosa succede se abbiamo un integrale definito?

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Esempio $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos(x^2)\, dx =$

Se poniamo $g(x) = x^2$ otteniamo che $g'(x) = 2x$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos(g(x))\, g'(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin(g(x)) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{1}{2} \Big(\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=1} - \cancel{\sin(0)}^{0} \Big) = 1/2 \quad \#$$

Esempio $\displaystyle\int \frac{dx}{x \log(x)} = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log(x)}\, dx$

Siccome $1/x = (\log(x))'$ definisco, coerentemente, $g(x) = \log(x)$

$$= \int \frac{1}{g(x)}\, g'(x)\, dx = \log|g(x)| + C$$
$$= \log|\log|x|| + C$$

X casa Calcolare $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

Suggerimento: utilizzare la sostituzione $t = \sqrt{x}$ e integrare il risultante integrale per parti.

Osservazione Si chiama integrale per sostituzione poiché si può pensare a $g(x)$ come una nuova variabile, $y = g(x)$ e la formula diventa

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{y}))\, \underbrace{g'(x)}_{dy/dx}\, dx = \int f(y)\, dy = (1)$$

se $g = g(x)$ $\quad g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$

$$(1) = \int f(y) \frac{dy}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = \int f(y)\, dy$$

Svolgimento suggerimento $\int e^{\sqrt{x}} dx$, dove $t = \sqrt{x}$

$\Rightarrow x = t^2 \quad x(t) = t^2 \quad \frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow dx = \underline{2t \cdot dt}$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^t \, 2t \cdot dt$$

Esempio Calcolare $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = I$ $\quad$ $g'(x)$ $\quad$ $= f(g(x))$

Sappiamo che vogliamo esprimere I come

$I = \int f(g(x))\, g'(x)\, dx$

Consideriamo, per esempio $g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$$I = \int \frac{1}{1+g(x)^2} \cdot g'(x)\, dx = \arctg(g(x)) + C$$

$$= \arctg(e^x) + C$$

$\triangleright$ $\int tg(x)\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ $\quad \sin x \, dx = -dy$, $\quad \cos x = y$

Sostituiamo la variabile $y = \cos x$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\sin x$

$dy = -\sin x \, dx$

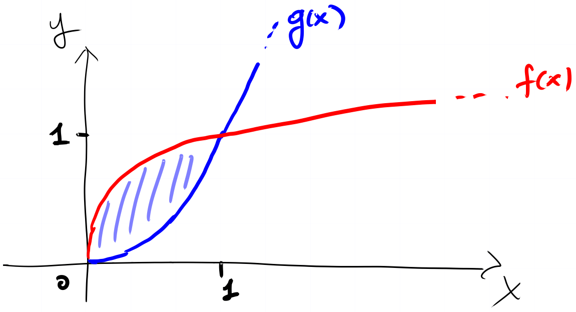
$$= -\int \frac{dy}{y} = -\log|y| + C$$

$$= -\log|\cos x| + C$$

Regioni del piano delimitate da grafici di funzioni

Esempio Calcolare l'area del primo quadrante delimitata dai grafici delle funzioni

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad e \qquad g(x) = x^2$$



L'area sarà dunque data da $\int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx$

$$= \int_0^1 x^{1/2} - x^2 dx = \int_0^1 x^{1/2} dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{1}{3} x^3\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1/3 \quad \#$$