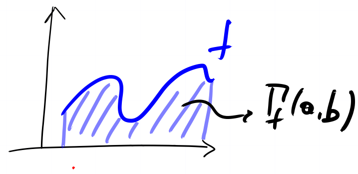
16/03/2022

Regioni del piano delimitate da grafici di funzioni

Supponiamo che $f \in C^0([a,b])$

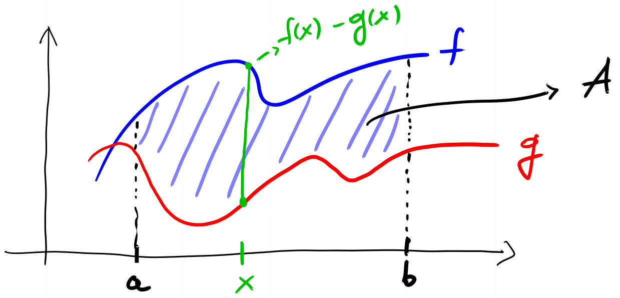
$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area di } T_f(a,b)$$



Supponiamo ora d'avere 2 funzioni $f, g \in C^0([a,b])$ e t.c.

$$g(x) \leq f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Vogliamo calcolare l'area delimitata dai grafici di f, g e dalle rette verticali $\{x = a\}$ e $\{x = b\}$



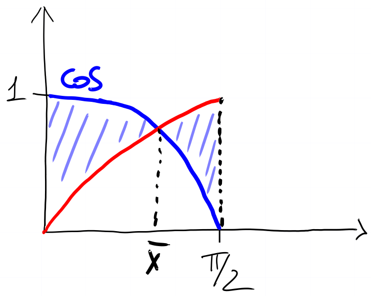
Notiamo che, verticalmente, $\forall x \in [a,b]$ "l'altezza" dell'area A è data dal valore $f(x) - g(x)$

Possiamo dunque immaginare che il calcolo di A è equivalente al calcolo dell'integrale di $f - g$, ossia

$$(*) \qquad A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

OSS La formula $(*)$ si può utilizzare <u>solamente</u> se $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Es Come possiamo calcolare l'area della regione delimitata dalle funzioni $\cos x$ e $\sin x$ nell'intervallo $[0, \pi/2]$?



Problema Non è vero che vi è un rapporto di monotonia costante tra le fz $\cos x$ e $\sin x$ nell'intervallo $[0, \pi/2]$

Tuttavia è sì vero che $\exists\ \bar{x} \in [0, \pi/2]$ tc

$\cos x \geq \sin x \quad \forall x \in [0, \bar{x}]$

$\sin x \geq \cos x \quad \forall x \in [\bar{x}, \pi/2]$

Quindi avremo che l'area A è data da

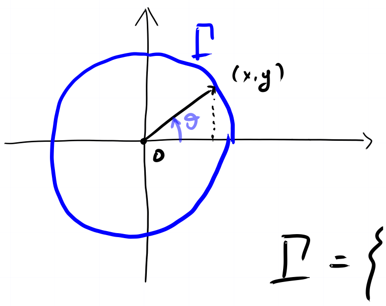
$$A = \int_0^{\bar{x}} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\bar{x}}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\, dx$$

L'unica cosa che dobbiamo ancora comprendere è il valore esplicito di $\bar{x}$

Per trovare il valore esplicito di $\bar{x}$ dobbiamo risolvere l'eq $\cos x = \sin x$ in $[0, \pi/2]$. L'unica sol è data da $\bar{x} = \pi/4$

X CASA Concludere il calcolo dell'integrale

Esempio Calcolo dell'area di un cerchio di raggio r attraverso un integrale



Il cerchio di raggio r e centro O è definito come l'insieme dei punti che distano r da O

$$\Gamma = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(0,0)) = r \}$$

$$\Longleftrightarrow \quad d((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2+y^2} = r \quad \rightsquigarrow \quad x^2+y^2=r^2$$

Vogliamo esprimere questa relazione nella forma $y=f(x)$

$$y = \pm\sqrt{r^2-x^2}$$

Con il + davanti mi descrive il semicerchio sup, mentre con il − quello inferiore

$$\text{Area del cerchio} = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\, dx$$

Utilizziamo il cambio di variabile $x = r\cos\vartheta$

$$x = x(\vartheta) = r\cos\vartheta \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dx}{d\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta}(r\cos\vartheta) = -r\sin\vartheta$$

$$\rightsquigarrow \quad dx = -r\sin\vartheta\, d\vartheta$$

Cambiamo adesso gli estremi d'integrazione dell'integrale definito

$$r\cos\vartheta = x = r \quad \rightsquigarrow \quad \cos\vartheta = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \vartheta = 0$$

$$r\cos\vartheta = x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \cos\vartheta = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vartheta = \pi/2$$

Posso finalmente risovere l'integrale definito nella nuova variabile

$$\text{Area del cerchio} = 4\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{r^2-(r\cos\vartheta)^2}\,(-r\sin\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= -4r\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{r^2(1-\cos^2\vartheta)}\, \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$= 4r\int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2\underbrace{(1-\cos^2\vartheta)}_{\sin^2\vartheta}}\, \sin\vartheta\, d\vartheta$$

⚠ Attenzione, qua utilizziamo la seguente proprietà dell'integrale

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= 4r^2\int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \qquad (*)$$

In modo da calcolare l'area dobbiamo dunque solo calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cdot \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$= -\int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \, (\cos\vartheta)' \, d\vartheta \overset{IPP}{=} -\sin\vartheta\cos\vartheta \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta \, d\vartheta$$

$$= -\sin\vartheta\cos\vartheta \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\vartheta) \, d\vartheta$$

$$= -\sin\vartheta\cos\vartheta \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 1 \, d\vartheta - \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \, d\vartheta$$

Portando il termine in blu al lato sx otteniamo l'equazione

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \, d\vartheta = -\sin\vartheta\cos\vartheta \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 1 \, d\vartheta$$

$$= -0 + 0 + \pi/2 = \pi/2$$

$$\longrightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \, d\vartheta = \pi/4$$

Inserisco il risultato in ✱ ed ottengo

Area del cerchio $= \pi r^2$

Integrazione di funzioni razionali

$r(x) = \dfrac{P(x)}{q(x)}$, dove p e q sono dei polinomi

Es $\quad r(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2}$, $\quad r(x) = \dfrac{4}{6-x}$, $\quad r(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$

Esempio $\quad \displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+3x+2} \, dx = \int \frac{x-3}{(x+1)(x+2)} \, dx$

Cerchiamo due costanti A e B tali che

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}$$

$$\| $$

$$\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x(A+B)+2A+B}{(x+1)(x+2)}$$

Vogliamo dunque determinare adesso il valore esplicito dei coefficienti A e B in maniera che l'uguaglianza qui sopra sia verificata

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1-B \\ 2(1-B)+B=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-4 \\ B=5 \end{cases}$$

Otteniamo dunque che

$$-\frac{4}{x+1}+\frac{5}{x+2}=\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}$$

Ossia

$$\int \frac{x-3}{(x+1)(x+2)}\,dx=-4\int\frac{dx}{x+1}+5\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=-4\log|x+1|+5\log|x+2|+C$$

Esempio Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+1)}\,dx$

Questo termine non è ulteriormente riducibile

Cerchiamo dei valori A, B e C t.c.

deg = 2, deg = 3

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+1)}=\boxed{\frac{A}{x+1}+\frac{2Bx+C}{x^2+1}}$$

$$=\frac{A(x^2+1)+(2Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{(A+2B)x^2+(2B+C)x+(A+C)}{(x+1)(x^2+1)}$$

Cerco dunque A, B e C in maniera da risolvere il sistema

$$\begin{cases} A+2B=1 \\ 2B+C'=1 \\ A+C=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=\frac{1-A}{2} \\ \cancel{2}\left(\frac{1-A}{\cancel{2}}\right)+1-A=1 \\ C=1-A \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=1/4 \\ 2(1-A)=1 \Longleftrightarrow A=1/2 \\ C=1/2 \end{cases}$$

Abbiamo dunque finalmente ottenuto che

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+1)} = \boxed{\frac{1/2}{x+1}+\frac{x/2+1/2}{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right]$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\left[\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{dx}{x^2+1}\right]$$

$$\int\frac{dx}{x+1} = \log|x+1|+C$$

$$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1)+C$$

$$\int\frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\left[\log|x+1|+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\operatorname{arctg} x\right]+C$$