21/03/2022

Esercizi, Foglio 1

Es 1, f

$$\int (\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx = \int \left(x^{3/2} - x + \sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1\right) dx$$

$$= \int \left(x^{3/2} - 2x + 2\sqrt{x} - 1\right) dx = \int x^{3/2}\,dx - 2\int x\,dx + 2\int \sqrt{x}\,dx - \int dx$$

Se $\alpha \neq -1$ $\quad \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$$= \frac{2}{5}x^{5/2} - x^2 + \frac{4}{3}x^{3/2} - x + C$$

Es 5, f

$$\int \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2}\,dx$$

$x^2+x-2 = (x-x_1)(x-x_2)$ dove x_1 e x_2 sono radici del polinomio di II grado

$\Delta = 1 - 4\cdot(-2) = 9 > 0 \rightsquigarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$= -2$ oppure 1

$$= (x+2)(x-1)$$

Semplifichiamo adesso la funzione razionale integranda

$$\frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2} = \frac{x^4+x^3+x^2+1}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{p_1(x)}{(x+2)} + \frac{p_2(x)}{(x-1)}$$

Come determiniamo la forma esplicita di p_1 e p_2?

Questi 2 sono cmq 2 polinomi

$$= \frac{\boxed{p_1(x)(x-1)} + \boxed{p_2(x)(x+2)}}{(x+2)(x-1)}$$

Notiamo che, seguendo l'algoritmo illustrato la scorsa volta so che

$$\underbrace{p_1(x)}\,\underbrace{(x-1)}_{\text{ha grado 1}} + \underbrace{p_2(x)}\,\underbrace{(x+2)}_{\text{ha grado 1}} = \underbrace{x^4+x^3+x^2+1}_{\text{ha grado 4}}$$

Che grado deve avere p_2?

R: deve essere di grado 3

Come si scrive un polinomio generico di grado 3?

Nella forma Ax^3+Bx^2+Cx+D dove A, B, C e D sono costanti reali.

Supponiamo quindi che

$$p_1(x) = A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1$$

$$p_2(x) = A_2x^3+B_2x^2+C_2x+D_2$$

e quindi dobbiamo risolvere in $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$ e D_2 l'eq

$$\overbrace{A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1}\,(x-1) + \underbrace{}_{A_2x^3+B_2x^2+C_2x+D_2}(x+2) = x^4+x^3+x^2+1$$

Espandendo

$$A_1 x^4 + B_1 x^3 + C_1 x^2 + D_1 x - (A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x + D_1)$$
$$+ A_2 x^4 + B_2 x^3 + C_2 x^2 + D_2 x + 2(A_2 x^3 + B_2 x^2 + C_2 x + D_2)$$
$$= x^4 + x^3 + x^2 + 1$$

$$(A_1 + A_2) x^4 + (B_1 - A_1 + B_2 + 2A_2) x^3$$
$$+ (C_1 - B_1 + C_2 + 2B_2) x^2 + (D_1 - C_1 + D_2 + 2C_2) x$$
$$- D_1 + 2D_2 = x^4 + x^3 + x^2 + 1$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ B_1 - A_1 + B_2 + 2A_2 = 1 \\ C_1 - B_1 + C_2 + 2B_2 = 1 \\ D_1 - C_1 + D_2 + 2C_2 = 0 \\ -D_1 + 2D_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

A questo punto risolvo il sistema lineare, determino i coefficienti e sostituisco ottenendo una serie di integrali "semplici"

Altra maniera

$$\frac{x^4 + x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x - 2}$$ $\longrightarrow$ Questa è una divisione di polinomi

$$(x^4 + x^3 + x^2 + 1) = p(x)(x^2 + x - 2) + r(x)$$ dove $\deg r < 2$ e $\deg p = 2$

$$p(x) = Ax^2 + Bx + C \quad , \quad r(x) = \gamma x + \delta$$

$$= (Ax^2 + Bx + C)(x^2 + x - 2) + (\gamma x + \delta)$$
$$= Ax^4 + Ax^3 - 2Ax^2 + Bx^3 + Bx^2 - 2Bx + Cx^2 + Cx - 2C$$

$+(\gamma x+\delta)$

$$= Ax^4 + (A+B)x^3 + (-2A+B+C)x^2 + (-2B+C+\gamma)x + (-2C+\delta)$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ A+B = 1 \implies B = 0 \\ -\overset{-2}{2A}+\cancel{\overset{0}{B}}+C = 1 \implies C = 3 \\ -\cancel{\overset{0}{2B}}+\overset{3}{C}+\gamma = 0 \implies \gamma = -3 \\ \overset{-6}{-2C}+\delta = 1 \implies \delta = 7 \end{cases}$$

* Sto equiparando i 2 lati dell'uguaglianza sopra scritta ed identificando i coefficienti dei monomi costituenti il polinomio al numeratore

Otteniamo quindi che

$$x^4+x^3+x^2+1 = (x^2+3)(x^2+x-2) + (-3x+7)$$

Consideriamo adesso la funzione integranda nella sua totalità

$$\frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2} = \frac{(x^2+3)(x^2+x-2) + (-3x+7)}{x^2+x-2}$$

$$= (x^2+3) + \frac{-3x+7}{x^2+x-2}$$

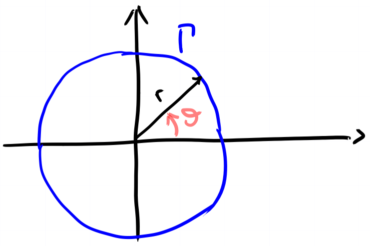
Abbiamo quindi trasformato l'integrale di partenza in

$$\int \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2}\,dx = \int \left[(x^2+3) + \frac{-3x+7}{x^2+x-2}\right] dx$$

$$= \underbrace{\int x^2+3\,dx}_{\text{Polinomio, sappiamo integrarlo}} + \underbrace{\int \frac{7-3x}{x^2+x-2}\,dx}_{\text{Funzione razionale da integrare come in classe la scorsa volta}}$$

Es 8, n $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$

Ricordiamoci : Calcolo dell'area del cerchio :



$$\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = r^2\}$$

Vogliamo esprimere la circonferenza Γ come una funzione

$y = f(x)$

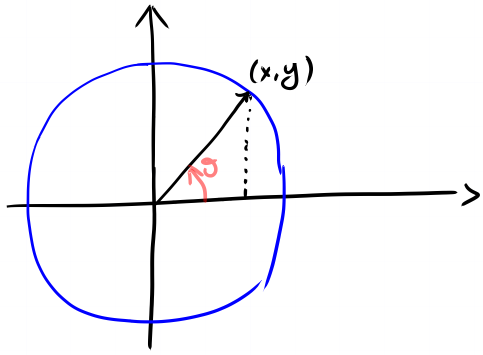
$\rightsquigarrow \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

Dunque ciò che stiamo cercando di calcolare è l'integrale indefinito della funzione che descrive l'emiciclo superiore nel caso in cui $r = 2$

Ricordiamo il cambio di variabile utilizzato la scorsa volta

Dato ϑ come in figura considerazioni trigonometriche elementari ci assicurano che se $(x,y) \in \Gamma$ allora

$$(x,y) = r(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$$



Vogliamo quindi calcolare l'integrale di partenza applicando un cambio di variabile opportuno, ossia

$$\int \sqrt{\underbrace{4}_{r^2} - x^2}\, dx = \int \sqrt{4 - 4\cos^2\vartheta}\, (-2)\sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$x = 2\cos\vartheta \implies \frac{dx}{d\vartheta} = -2\sin\vartheta$$

$$= -2 \int \sqrt{4(1-\cos^2\vartheta)}\, \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$= -4 \int \sqrt{1-\cos^2\vartheta}\, \sin\vartheta \, d\vartheta \quad = -4\int |\sin\vartheta| \sin\vartheta \, d\vartheta \quad = (I)$$

Ed adesso dobbiamo dividere in casi secondo quando la quantità $\sin\vartheta$ è positiva o negativa

In particolare studiamo $|\sin\vartheta|$

$$|\sin\vartheta| = \begin{cases} \sin\vartheta & \text{se } \sin\vartheta > 0,\ \vartheta \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ -\sin\vartheta & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi

$$(I) = \begin{cases} -4 \int \sin^2\vartheta \, d\vartheta & \text{se } \vartheta \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ 4 \int \sin^2\vartheta \, d\vartheta & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La scorsa volta abbiamo calcolato (per parti) esplicitamente

$$\int \sin^2\vartheta \, d\vartheta = \frac{-\sin\vartheta\cos\vartheta + \vartheta}{2} + C$$

Quindi sostituiamo tale valore in (I) ottenendo l'espressione ricercata

$$(I) = \begin{cases} -2(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta) + C' & \text{se } \vartheta \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ 2(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta) + C' & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Come ultimo passaggio risostituiamo ϑ in funzione di x

Ricordo che $x = 2\cos\vartheta \implies \vartheta = \arccos(x/2)$ e

quindi otteniamo (finalmente!) che

$$\int \sqrt{4-x^2}\, dx = \begin{cases} -2\left[\arccos(x/2) - \frac{1}{2}\sin(\arccos x)\right] + C' & \text{se } \vartheta \in [\cdots] \\ 2\left[\arccos(x/2) - 1/2 \sin(\arccos x)\right] + C' & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove abbiamo utilizzato l'identità $\sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

e quindi se $\alpha = \beta$

$$\Rightarrow \sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$