23/03/2022

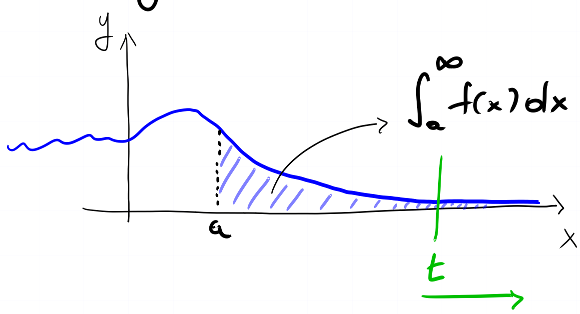
Integrali impropri

Fino ad oggi abbiamo considerato integrali della forma
$$\int_a^b f(x)\,dx,$$
e, in particolare, abbiamo sempre considerato intervalli di integrazione chiusi e limitati.

Possiamo dare un senso, per esempio, ad oggetti matematici della forma
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

I) Intervallo di integrazione non limitato

IDEA: Vogliamo calcolare un integrale del tipo $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$



L'idea è dunque la seguente: siccome sappiamo calcolare integrali quando l'intervallo di integrazione è chiuso e limitato calcoleremo
$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

Def Sia $f: [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, l'integrale improprio di f in $[a,+\infty)$, denotato con $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ si calcola come
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

Se tale limite esiste ed è finito. In tal caso diremo che f è integrabile in senso improprio in $[a,+\infty)$

- Se il limite dell'integrale vale $\pm\infty$ allora diremo che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ <u>diverge</u>.

Es $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^{\infty} x^{-1/2}\,dx \overset{def}{=} \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-1/2}\,dx$$

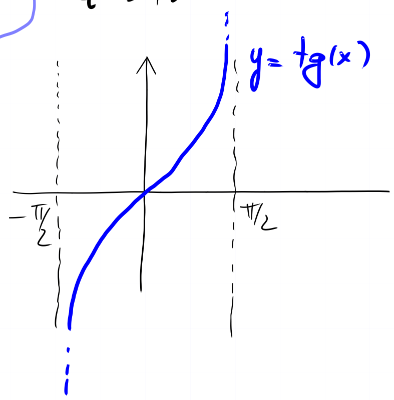
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\, t^{1-1/2} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\, 1^{1-1/2}$$

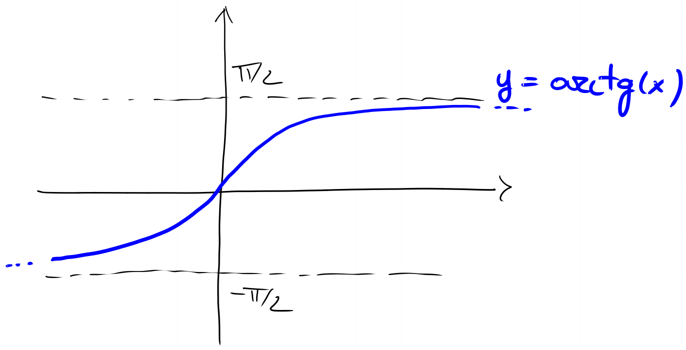
$$= \lim_{t\to\infty} 2\, t^{1/2} - 2 = 2 \overbrace{\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}}^{=+\infty} - 2 = +\infty$$

L'integrale considerato è dunque <u>divergente</u>

Es $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{-t}^{t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg}(-t)\right)$$





$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\pi/2\right) = \pi$$

Questo integrale è dunque <u>convergente</u>

Oss Consideriamo l'integrale improprio

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \qquad \text{dove} \quad \alpha \in (0, \infty)$$

Q Per che valori di α l'integrale è convergente e per quali è divergente?

Consideriamo dapprincipio il caso in cui $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{\infty} x^{-\alpha}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} x^{-\alpha}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha}\Big|_1^t$$

$$= \frac{1}{\underset{0\neq}{1-\alpha}}\Big(\underbrace{\lim_{t\to\infty} t^{1-\alpha}}_{\text{Quanto vale questo limite ?}} - 1\Big)$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 1-\alpha>0 \iff \alpha<1 \\ 0 & \text{se } 1-\alpha<0 \iff 1<\alpha \end{cases}$$

- Se $\alpha\in(0,1)$ allora $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\infty$ diverge
- Se $\alpha>1$ —— " —— $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}<\infty$ converge

Notiamo tuttavia che manca ancora il caso in cui $\alpha=1$, ossia

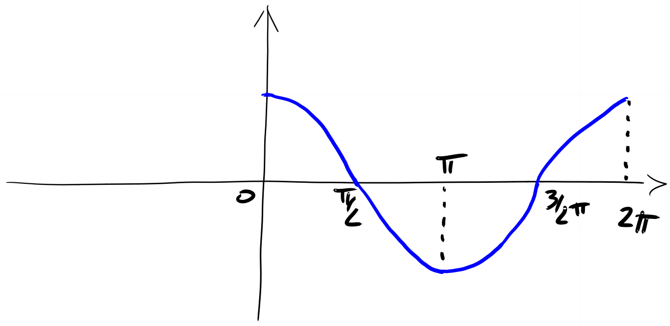
$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty}\log|x|\Big|_1^t = \underbrace{\lim_{t\to\infty}\lg t}_{=\infty} - 0 = +\infty$$

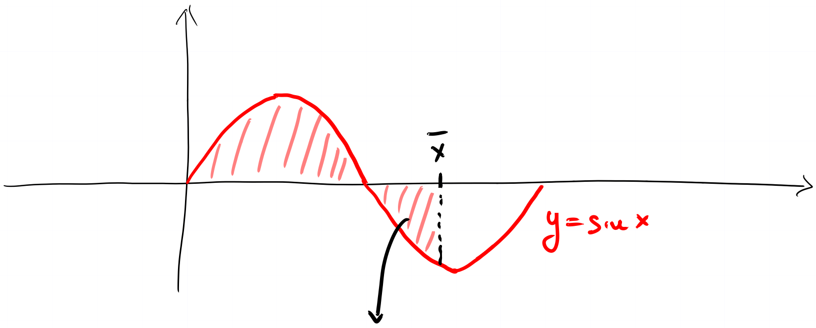
Se $\alpha=1$ l'integrale <u>diverge</u>

OSS Notiamo che posso esserci degli integrali impropri per i quali il limite non esiste e non divergono

<u>Es</u> $$\int_0^{+\infty}\sin x\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t}\sin x\,dx = \lim_{t\to\infty}(-\cos x)\Big|_0^t$$

$$= 1 - \underbrace{\lim_{t\to\infty}\cos t}$$ <u>Non esiste!</u>

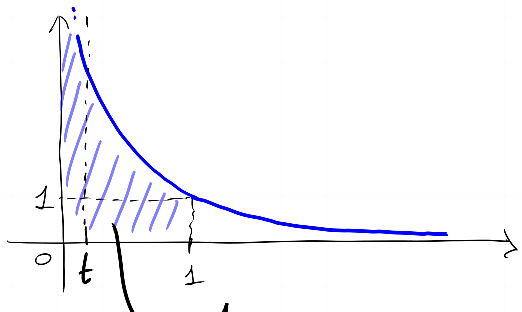




$$\int_0^{\bar{x}} \sin x \, dx$$

II) Intervallo di integrazione semiaperto/aperto

<u>Esempio</u> $\int_0^1 \frac{dx}{x}$



$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

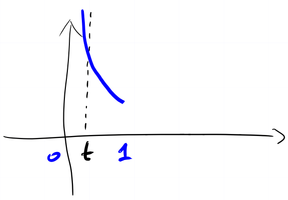
Tale esempio è rilevante in quanto abbiamo sviluppato tutta la teoria dell'integrale fino a adesso considerando sempre funzioni continue nell'intervallo $[a,b]$. La funzione $1/x$, tuttavia, <u>non</u> è continua in $[0,1]$

In tal caso

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \to 0^+} \log x \Big|_t^1$$

$$= \lg - \overbrace{\lim_{t \to 0^+} \log t}^{-\infty} = +\infty$$

<u>Esempio</u> Quando $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in (0, \infty)$ è convergente e quando è divergente



Esplosione in zero

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 x^{-\alpha}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x^{-\alpha}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_t^1$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \lim_{t\to 0^+} t^{1-\alpha}\right)$$

$$\lim_{t\to 0^+} t^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } 1-\alpha>0,\ \alpha<1 \\ +\infty & \text{se } 1-\alpha<0,\ 1<\alpha \end{cases}$$

<u>Ricapitolando</u> $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ <u>diverge</u> se $\alpha>1$, <u>converge</u> se $\alpha\in(0,1)$ e se $\alpha=1$ <u>diverge</u>

<u>Es</u> Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

Notiamo che la funzione $1/x^2$ è una funzione pari, ossia $1/x^2 = 1/(-x)^2$

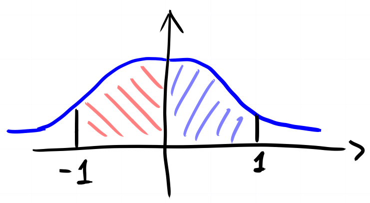
Dunque $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x^2}}$$

Considero $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}$ e considero il cambio di variabile $y=-x$, $dy=-dx$

$$= -\int_1^0 \frac{dy}{y^2} = \boxed{\int_0^1 \frac{dy}{y^2}}$$

$=$

E quindi $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = +\infty$$ visto il risultato generale presentato sopra.



Es Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{x}{(x^2+5)^{3/2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \underbrace{(x^2+5)}_{g(x)}{}^{-3/2}\, \underbrace{2x}_{g'(x)}\, dx$$

Calcoliamo $\frac{d}{dx}(x^2+5)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\boxed{(x^2+5)^{-3/2}\cdot 2x}$

Quindi $(x^2+5)^{-3/2}\,2x = -2\,\frac{d}{dx}(x^2+5)^{-1/2}$

$$= \frac{1}{2}(-2)\int_1^{\infty} \frac{d}{dx}(x^2+5)^{-1/2}\,dx$$

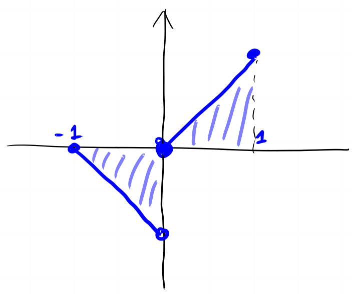
$$= -\lim_{t\to\infty}\int_1^{t} \frac{d}{dx}(x^2+5)^{-1/2}\,dx$$

$$= -\lim_{t\to\infty}\left((t^2+5)^{-1/2} - (1+5)^{-1/2}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Es Consideriamo la funzione definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x<0 \\ x & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$

Calcolare $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$



$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(-1-x)\,dx + \int_0^1 x\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t}(-1-x)\,dx + \int_0^1 x\,dx$$

$$= -\lim_{t\to 0^-} \left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{t} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= -\left[\underbrace{\lim_{t\to 0^-}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)}_{=0} - \left((-1)+\frac{(-1)^2}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}$$

$$= -\left[1-\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2} = -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$$

Es Calcolare $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{cotg} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\overbrace{(\sin x)'}^{g'(x)}}{\underbrace{\sin x}_{g(x)}}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{d}{dx}\log(\sin x)\, dx$$

$$= \log(\sin x)\Big|_0^{\pi/2} = \lim_{t\to 0^+} \log(\sin x)\Big|_t^{\pi/2}$$

$$= \underbrace{\log(\sin \overbrace{\pi/2}^{1})}_{=0} - \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\log(\underbrace{\sin t}_{\to 0^+})}_{\to -\infty} = +\infty$$