28/03/2022

II Algebra lineare

- Equazioni lineari
- Matrici
- Determinanti

1 Equazioni lineari

Q Che cosa è un' equazione lineare ?

1) $2x+4=0$ SI

2) $ax+b=0$ nell' incognita x ? SI

3) $a_0x_0+\_\_\_+a_nx_n+b=0$ nelle incognite $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ è lineare ? SI

4) $x^2+y^2=1$ è lineare in (x,y) ? NO

5) $x+xy=4$ NO

Es x_1, x_2 $(x_1-4)^2+x_1x_2=0$ NO

x, y $\log x = y$ NO

x, y $\cos x = \sin y$ $e^x=\sqrt{y}$

NO NO

$$\sum_{n=0}^{N} A_n \cdot x_n + b = 0$$

Ogni equazione lineare si scrive sempre e solamente in questa forma

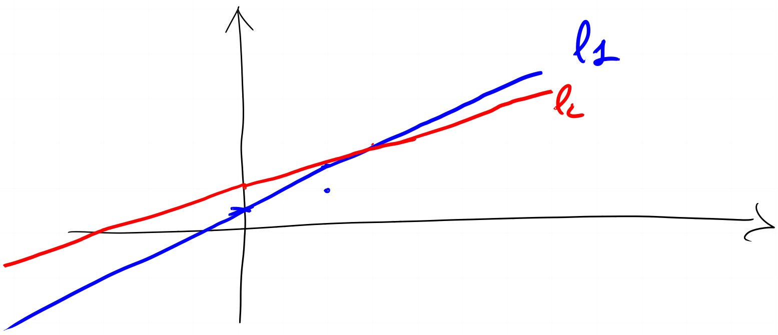
dove $A_0, A_1, \dots, A_N, b \in \mathbb{R}$

Sistemi di equazioni lineari

Es

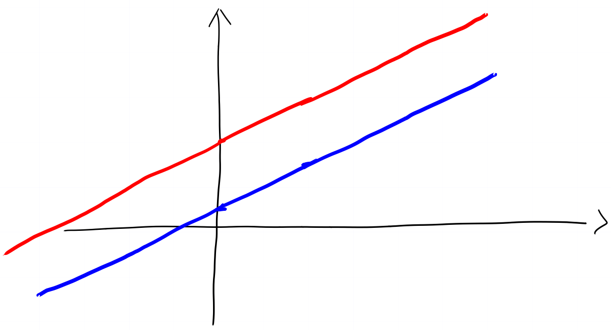
$$\begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \end{array} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

Queste rappresentano 2 rette nel piano reale



$$\begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \end{array} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

⚠ In questo caso $\nexists$ pto di intersezione e pertanto il sistema non ha soluzioni



Un sistema lineare può:

1) Non avere soluzioni ⇝ Sistema INCONSISTENTE
2) Avere una soluzione
3) Avere infinite soluzioni

(2 e 3) ⇝ Sistema CONSISTENTE

Algoritmo di Gauss

L'algoritmo di Gauss è un metodo efficiente per determinare se un s.l. è consistente o inconsistente e nel caso in cui sia consistente di determinare le sol del sistema.

Sono ammissibili 3 tipi di operazioni

1) **Rimpiazzo**: rimpiazzare una determinata eq di un sl con la somma di una con un multiplo di un'altra
2) **Interscambio**: Interscambiare equazioni
3) **Moltiplicazione**: Moltiplicare un'eq per un numero reale (o complesso).

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases} \xrightarrow[\mathrm{III} \to \mathrm{III} + 4\mathrm{I}]{1)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II} \to \frac{1}{2}\mathrm{II}]{3)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases} \xrightarrow[\mathrm{III} \to \mathrm{III} + 3\mathrm{II}]{1)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2 \cdot 16 + 3 \longrightarrow \\ x_2 - 4 \cdot 3 = 4 \longrightarrow \\ x_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -29 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Q: Come possiamo verificare che la tripla $(x_1, x_2, x_3) = (-29, 16, 3)$ è sol del s.l.

Es S.l. senza soluzioni.

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases} \xrightarrow[\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}]{2)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = 8 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III} \to \mathrm{III} - \frac{5}{2}\mathrm{I}]{1)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = 8 \\ -x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

Sommiamo $\to$ $0 = 5$ Falso!

$\Longrightarrow \nexists$ sol al s.l. considerato.

$$\frac{5}{2}\mathrm{I} \iff \frac{5}{2}(2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1)$$

$$\iff 5x_1 - \frac{15}{2}x_2 + 5x_3 = \frac{5}{2}$$

Dunque

$$\mathrm{III} - \frac{5}{2}\mathrm{I} \iff 0x_1 \underbrace{\left(-8 + \frac{15}{2}\right)}_{-\frac{1}{2}}x_2 + \underbrace{(7-5)x_3}_{2x_3} = \underbrace{1 - \frac{5}{2}}_{-3/2}$$

$$-x_2 + 4x_3 = -3$$

Vettori in $\mathbb{R}^2$

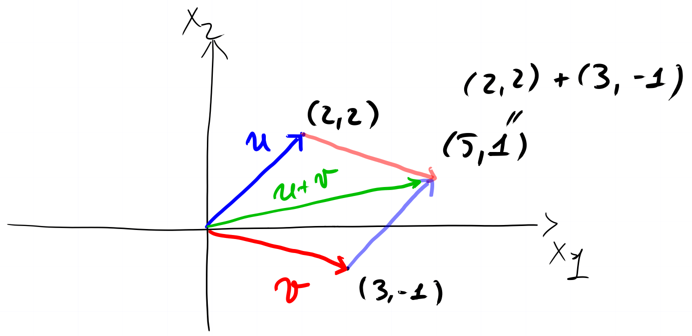
$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

u, v, w

$u = (3, -1)$, $v = (\pi, 0)$, $w = (-1, 5)$

$u + v = (3+\pi, -1)$, $u + w = (2, 4)$, $5u = (15, -5)$

Descrizione geometrica di $\mathbb{R}^2$



Regola del parallelogramma: il vettore somma $u+v$ è il vertice del parallelogramma con lati u e v.

Vettori in $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$$

Vettori in $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

Prop (Proprietà algebriche di $\mathbb{R}^n$)

Siano $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $c, d \in \mathbb{R}$,

i) $u+v = v+u$

ii) $(u+v)+w = u+(v+w)$

iii) $u+0 = 0+u$

iv) $u+(-u) = (-u)+u = 0$

v) $c(u+v) = cu+cv$

vi) $(c+d)u = cu+du$

vii) $c(du) = (cd)u$

viii) $1 \cdot u = u$

Def (Combinazione lineare – c.l.)

Sia $p \in \mathbb{N}$, $\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $\{c_1, \ldots, c_p\} \subseteq \mathbb{R}$

vettori — scalari

Diremo che ogni vettore

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p$$

è **combinazione lineare** dei vettori $v_1, \ldots, v_p$.

Es Il vettore $b = (7, 4, -3)$ è c.l. di

$a_1 = (1, -2, 5)$, $a_2 = (2, 5, 6)$, in particolare

$$3 a_1 + 2 a_2 = b$$

Def Sia $p \in \mathbb{N}$, e siano $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$. Denotiamo con

$$\langle v_1, \ldots, v_p \rangle = \{\text{tutte le c.l. dei vettori } v_1, v_2, \ldots, v_p\}$$

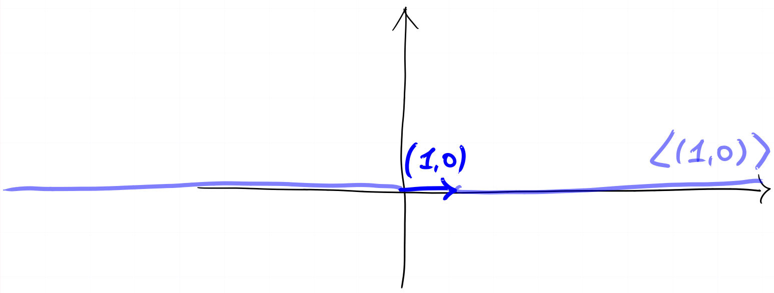
$$= \{ v \in \mathbb{R}^n : \ v = c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p, \ c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{R} \}$$

Lo spazio $\langle v_1, \ldots, v_p \rangle$ si dice **spazio generato** dai vettori $v_1, \ldots, v_p$

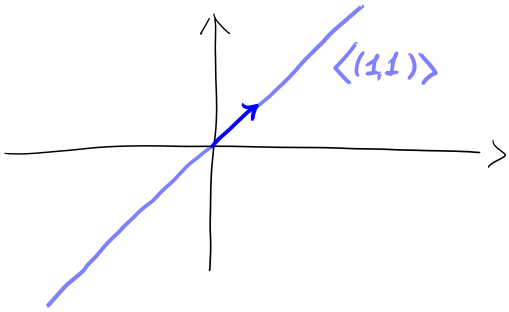
Es – Nell'esempio sopra si ha che $b \in \langle a_1, a_2 \rangle$

– $v_1 \in \langle v_1, \ldots, v_p \rangle$, infatti $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_p$

– In $\mathbb{R}^2$ $\quad \langle (1,0) \rangle = \{ v \in \mathbb{R}^2 : \ v = \lambda (1,0) = (\lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R} \}$



– In $\mathbb{R}^2$ $\quad \langle (1,1) \rangle = \{ v \in \mathbb{R}^2 : \ v = \lambda(1,1) = (\lambda,\lambda) \}$



<u>OSS</u> $\quad \langle (1,1) \rangle = \langle (2,2) \rangle$

– In $\mathbb{R}^2$ $\quad \langle (1,0), (0,1) \rangle = \{ v \in \mathbb{R}^2 : \ v = \lambda(1,0) + \mu(0,1) = (\lambda,\mu) \ , \ \lambda,\mu \in \mathbb{R} \}$