30/03/2022

Recap

Def [Combinazione lineare – c.l.] Siano dati $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ e siano $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$. Si dice che v è c.l. di $v_1, \ldots, v_p$ se

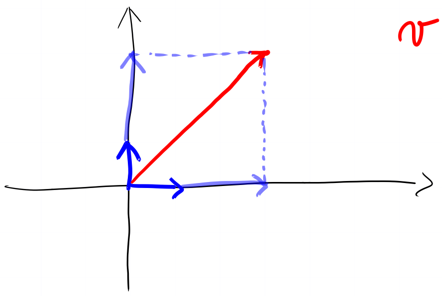
$$v = c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p$$

Def Siano $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ definiamo come spazio generato da $v_1, \ldots, v_p$ che denotiamo con $\langle v_1, \ldots, v_p \rangle$ l'insieme

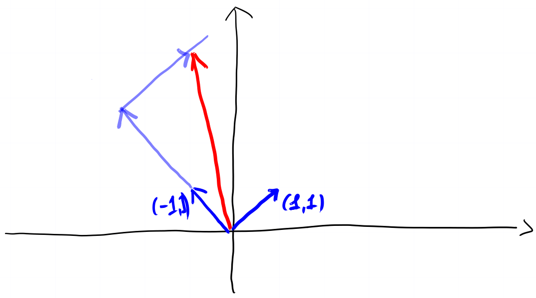
$$\langle v_1, \ldots, v_p \rangle = \{ v : v \text{ è c.l. di } v_1, \ldots, v_p \}$$

Es $\langle (1,0), (0,1) \rangle = \mathbb{R}^2$

$$v = 3(1,0) + 3(0,1)$$



Consideriamo adesso $\langle (1,1), (-1,1) \rangle = \mathbb{R}^2$



Equazioni matriciali

Le E.m sono equazioni della forma

$$\underbrace{A}_{\text{matrice}} \underbrace{x = b}_{\text{vettori}}$$

Introduciamo il concetto di matrice e di equazioni matriciali in quanto vogliamo poter scrivere sistemi lineari in una maniera compatta.

Def Definiamo lo spazio

$$M_{m \times n} = \{ \text{matrici } m \text{ righe e } n \text{ colonne} \}$$

$A \in M_{m \times n}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall\, 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$$

Def Data $A \in M_{m \times n}$, $B \in M_{n \times r}$ definiamo la matrice

$$C \in M_{m \times r}, \quad C = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le r}}, \quad \text{dove}$$

$$A \cdot B = C \quad \text{e} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Oss tale operazione è talvolta conosciuta come moltiplicazione righe per colonne.

Es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}}_{\in M_{2 \times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\in M_{3 \times 1}} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 7 \\ 0 \cdot 4 - 5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$\to 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 2$

$\to 0\cdot 1 + (-5)\cdot 1 + 3\cdot 1 = -2$

OSS Il prodotto di matrici **non è** un'operazione commutativa, ossia è possibile che $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Esempio Sistemi lineari in forma matriciale

Consideriamo il sistema lineare

$$(S) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Vogliamo scrivere in forma compatta questo s.l. utilizzando matrici

Sia $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Calcoliamo il prodotto righe per colonne

$$A\cdot x = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Notiamo che il vettore $A\cdot x$ è esattamente il lato sx delle equazioni nel s.l. (S), dunque (S) è equivalente all'equazione matriciale

$$Ax = b$$

Proprietà Sia $A \in M_{m \times n}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$

a) $A(u+v) = Au + Av$

b) $A(cu) = c\,Au$

Def Sia $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e sia $A = M_{m \times n}$, qualunque sistema lineare della forma $Ax = 0$ si dice sistema lineare omogeneo

Es $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

Def Sia $p \in \mathbb{N}$ e siano $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$, essi si dicono linearmente indipendenti (l.i) se la equazione

$x_1 v_1 + \ldots + x_p v_p = 0$

ammette solamente 1! soluzione data dalla n-upla
$(x_1, \ldots, x_p) = (0, \ldots, 0)$

Se p-vettori $v_1, \ldots, v_p$ non sono l.i. allora si dicono linearmente dipendenti.

Es $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq (0, \ldots, 0)$ allora v è l.i.

$x\,v = 0 \iff x = 0$

Es Consideriamo i vettori $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sono l.i?
Vogliamo trovare tutte le coppie (x_1, x_2) per le quali si verifica l'equazione

$0 = x_1 e_1 + x_2 e_2 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Quand'è dunque che si verifica l'eq $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Quando $x_1 = x_2 = 0$.

Es $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

I vettori v_1, v_2 e v_3 sono l.i ?

Vogliamo trovare tutte le soluzioni dell'eq

$$0 = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + \quad + 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \\ \quad + 4x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ -4x_3 - 3x_3 + 7x_3 = 0 \quad \text{vero!} \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \forall x_3 \in \mathbb{R} \quad (x_1, x_2, x_3) = (-2x_3, -x_3, x_3)$ è soluzione dell'equazione $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$.

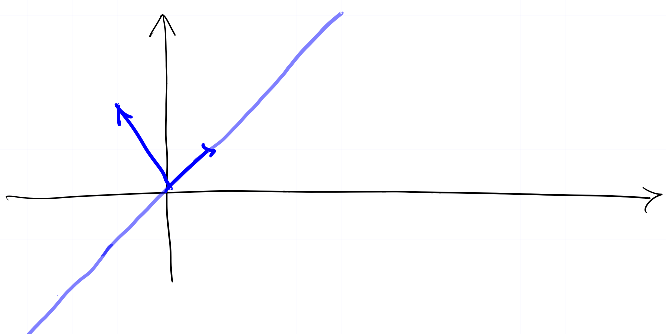
Dunque, per esempio, se fissiamo $x_3 = 1$ otteniamo che

$-2v_1 - v_2 + v_3 = 0 \Longrightarrow v_1, v_2$ e v_3 sono l.d.

Oss Supponiamo che $v_1, \ldots, v_p$ siano lin indep ossia

$$x_1 v_1 + \ldots + x_p v_p = 0 \quad \text{sse} \quad x_1 = \ldots = x_p = 0.$$

Questo si può tradurre con il fatto che $v_p \notin \langle v_1, \ldots, v_{p-1} \rangle$



Trasformazioni lineari

Def Sia $A \in M_{m\times n}$, $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definita nella seguente maniera

$$T(x) = A \cdot x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

tale applicazione si dice **trasformazione lineare**

Es $T(x) = T(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$

Q1: T è lineare?

Dobbiamo trovare una matrice A per la quale

$T(x) = Ax$

Sappiamo che $T: \mathbb{R}^{\overset{n}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\overset{m}{3}}$

Cerchiamo dunque una matrice $A \in M_{3\times 2}$ t.c.

$T(x) = Ax$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix}}_{Ax}$$

Sappiamo tuttavia che $T(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$

Siccome voglio risolvere l'equazione $T(x) = Ax$

$$\begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix}$$

Da questa equazione posso identificare tutti gli a_{ij}. In particolare ottengo che

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Abbiamo trovato la matrice A. $\Rightarrow$ T è lineare