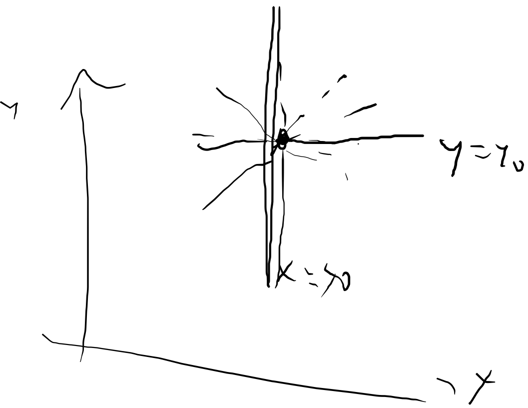
$f(z) = 2x+3iy$

$z = x+iy$

$z_0 = x_0+iy_0$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{2x+3iy-(2x_0+3iy_0)}{x+iy-(x_0+iy_0)} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{2(x-x_0)+3i(y-y_0)}{x-x_0+i(y-y_0)} =$$



$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y = y_0}} \frac{2(x-x_0)}{x-x_0} = 2$$

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ x = x_0}} \frac{3i(y-y_0)}{i(y-y_0)} = 3$$

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad p(z),\ q(z) \text{ polinomi}$$

Una funzione derivabile in $\mathbb{C}$ è "rigida": deve soddisfare le condizioni di monogeneità o di Cauchy Riemann

Teorema

$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad z_0 \in A$, f derivabile in z_0 $\quad$ Sia $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$.

$z_0 = x_0 + i y_0$

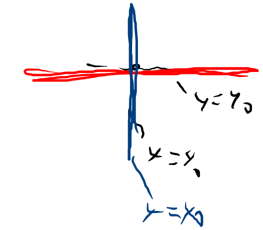
Allora

$$CR \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

$[\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$Jf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

$$f(x+iy) = \tilde f(x,y)$$



$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{\tilde f(x,y) - \tilde f(x_0,y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)} = *$$

$$* = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y = y_0}} \frac{\tilde f(x,y_0) - \tilde f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \boxed{\frac{\partial \tilde f}{\partial x}(x_0,y_0)}$$

$$* = \lim_{\substack{y \to y_0 \\ x = x_0}} \frac{\tilde f(x_0,y) - \tilde f(x_0,y_0)}{i(y-y_0)} = \boxed{\frac{1}{i}\,\frac{\partial \tilde f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

$$\tilde f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$\frac{\partial \tilde f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{1}{i}\,\frac{\partial \tilde f}{\partial y}(x_0,y_0) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -i\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)} \wedge -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = +\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \quad //$$

In forma polare $\qquad x+iy = \rho e^{i\vartheta}$

$$f(\rho e^{i\vartheta}) = \hat{f}(\rho,\vartheta)$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho} = \underbrace{f'(\rho e^{i\vartheta})}_{f'(z)} \cdot e^{i\vartheta}$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \vartheta} = \underbrace{f'(\rho e^{i\vartheta})}_{= f'(z)} \cdot \rho i e^{i\vartheta}$$

$$f'(z) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho}(\rho,\vartheta) \cdot \cancel{e^{-i\vartheta}}$$

$$\|$$

$$f'(z) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \vartheta}(\rho,\vartheta) \cdot \frac{1}{\rho i} \cancel{e^{-i\vartheta}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho}(\rho,\vartheta) = \frac{1}{\rho i} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \vartheta}(\rho,\vartheta)$$

OSS: sia $f: \underline{A \subseteq \mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ ← reali!

f può essere derivabile?

Solo se f è costante!

$$\underbrace{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}}$$

$f(x+iy) = u(x,y)$

$v(x,y) = 0$

$\dfrac{\partial v}{\partial y}(\ ) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}(\ ,\ ) = 0$

$u(x,y) = \varphi(y) = C$

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

Arg z non è mai derivabile!

Es: $f(z) = |z|^2$ è derivabile in $z=0$

$= x^2+y^2$ $\quad u(x,y) = x^2+y^2$ $\quad v(x,y)=0$

$2x = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

$0 = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -2y_0 \Rightarrow y_0 = 0$

$\Rightarrow$ C.R. è soddisfatta solo in $z_0 = 0$

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\cancel{2}}}{\cancel{\rho}\, e^{i\vartheta}} = 0$$

Definizione funzione olomorfa

Sia $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $z_0 \in A$ f si dice olomorfa in z_0 se esiste un intorno di z_0 dove f è derivabile.

Es: $f(z) = |z|^2$ f è derivabile in 0 ma non è olomorfa in 0.

Vale il viceversa del teorema?

(cioè se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann è vero che f è derivabile nel punto?)

Teorema (di caratterizzazione delle funzioni derivabili in un punto)

$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad z_0 \in A$. $\quad f$ è derivabile in z_0 se e solo se

$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

1) u e v sono funzioni differenziabili in (x_0, y_0)

2) valgono le condizioni di Cauchy-Riemann.

$$\frac{\left(\rho e^{i\vartheta}\right)^5}{\rho^4} = \frac{\rho^{\cancel{5}} e^{5i\vartheta}}{\cancel{\rho^4}}$$

Es: $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$ $\qquad \tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+iy)^5}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 \end{cases}$

C.R.

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\tilde{f}(x,0) - \tilde{f}(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^5}{x^4}}{x} = 1$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{i^5 y^5}{y^4}}{y} = i^5 = i$$

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{i} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0,0)}$$

f non è derivabile in 0

$$\hat{f}(\rho,\vartheta) = \rho\, e^{5i\vartheta}$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho} = e^{5i\vartheta} \qquad \frac{\partial \hat{f}}{\partial \vartheta} = \underline{5i\rho\, e^{5i\vartheta}}$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho} = i\rho \frac{\partial \hat{f}}{\partial \vartheta}$$ non è soddisfatta!

Esempi di funzioni olomorfe: polinomi, funzioni razionali, e poi?

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = f(z)$$

insieme, raggio, disco (intervallo) di convergenza

La serie di potenze di raggio di convergenza r è uniformemente convergente nei compatti $\overline{B(z_0, \rho)}$ con $\rho < r$.

Si dimostra che lo stesso accade per la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$, e quindi f è derivabile e $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \Rightarrow f \in C^\infty(B(z_0, r))$$

se $r = +\infty$ $\quad f \in C^\infty(\mathbb{C})$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Esempi: $\underbrace{e^z, \quad \operatorname{sen} z, \quad \cos z}$ sono funzioni intere

(Una funzione si dice intera se è olomorfa su $\mathbb{C}$)

$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cosh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{senh} z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) \qquad \cosh z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right)$$

Proprietà

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

$e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy}$

$= e^{x}\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right)$

$D\, e^{z} = e^{z}$

$D \operatorname{sen} z = \cos z \qquad D \cos z = -\operatorname{sen} z \qquad D \operatorname{senh} z = \cosh z \qquad D \cosh z = \operatorname{senh} z$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n} = e^{z}$$

$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z \qquad z \in \mathbb{C}$

$\oplus \ominus$

$e^{-iz} = \cos(-z) + i \operatorname{sen}(-z) = \cos(z) - i \operatorname{sen}(z)$

$e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z$

$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \operatorname{sen} z$

$$\boxed{\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)} = \cosh(iz)$$

$$\boxed{\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)} = \frac{1}{i} \operatorname{senh}(iz)$$

$$\operatorname{sen}(z_1+z_2) = \operatorname{sen}(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$$

$$\cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \operatorname{sen}(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$\operatorname{sen}(z) = i \operatorname{senh}(iz)$$

F

Vero $\operatorname{sen}(z) = \frac{1}{i} \operatorname{senh}(iz)$

$$\operatorname{senh}(z) = -i \operatorname{sen}(iz)$$

V

$$\operatorname{senh}(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$$

$$\operatorname{sen}(iz) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-z} - e^{z}\right)$$

$$= \frac{1}{i}\left(-\operatorname{senh}(z)\right) = \operatorname{senh}(z)$$

$$\cos z = i \cosh z$$

NO

$$\cos 0 = 1 \neq i \cosh 0$$

$$\operatorname{sen}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x - iy) &= \operatorname{sen} x \cos(iy) - \cos x \operatorname{sen}(iy) \\
&= \operatorname{sen} x \cosh y - i \cos x \operatorname{senh}(y) = \left[\overline{\underbrace{\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y}_{\operatorname{sen}(x+iy)}}\right] \\
&= \left[\overline{\operatorname{sen}(x+iy)}\right]
\end{aligned}$$

V

$\cos(\bar{z})$

$$\frac{1}{2i}\left(e^{-y}-e^{y}\right) = i\,\mathrm{senh}(y)$$

$$\mathrm{sen}(iy) = i\,\mathrm{senh}\,y$$

$$\cos(x-iy) = \cos x\cos(iy) + \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}(iy)$$

$$= \overline{\cos x\cosh y + i\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{senh}(y)}$$

$$= \left[\cos x\cosh y - i\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{senh}\,y\right] = \left[\overline{\cos(x+iy)}\right] = \overline{\cos z}$$

$\mathrm{sen}(iy) =$

$$\mathrm{sen}^2 z + \cos^2 z = \left[\frac{1}{2i}\left(e^{z}-e^{-z}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)\right]^2 = -\frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2z}}-2+\cancel{e^{-2z}}\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2z}}+2+\cancel{e^{-2z}}\right) = 1$$

Vero

$|\operatorname{sen} z| \leq 1$ NO

$$|\operatorname{sen}(2i)| = \left|\frac{1}{i}\operatorname{senh}(2)\right| > 1$$

⚠ $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ non sono funzioni limitate in $\mathbb{C}$!

$\operatorname{senh}(iz + 2\pi) = \operatorname{senh}(iz)$ Falso

$\operatorname{senh}(iz + 2\pi i) = \operatorname{senh}(iz)$ Vero

$\operatorname{sen} z = 2$