Teorema di Laurent

Sia $f: C \to \mathbb{C}$ con $C = C(z_0, R_1, R_2) = \{ z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2 \}$, f olomorfa.

Allora f è rappresentabile in "serie di Laurent" come segue:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi)(\xi - z_0)^{-(n+1)} \, d\xi \qquad \gamma \text{ circuito orientato positiv. } \Gamma \subset C.$$

Dim

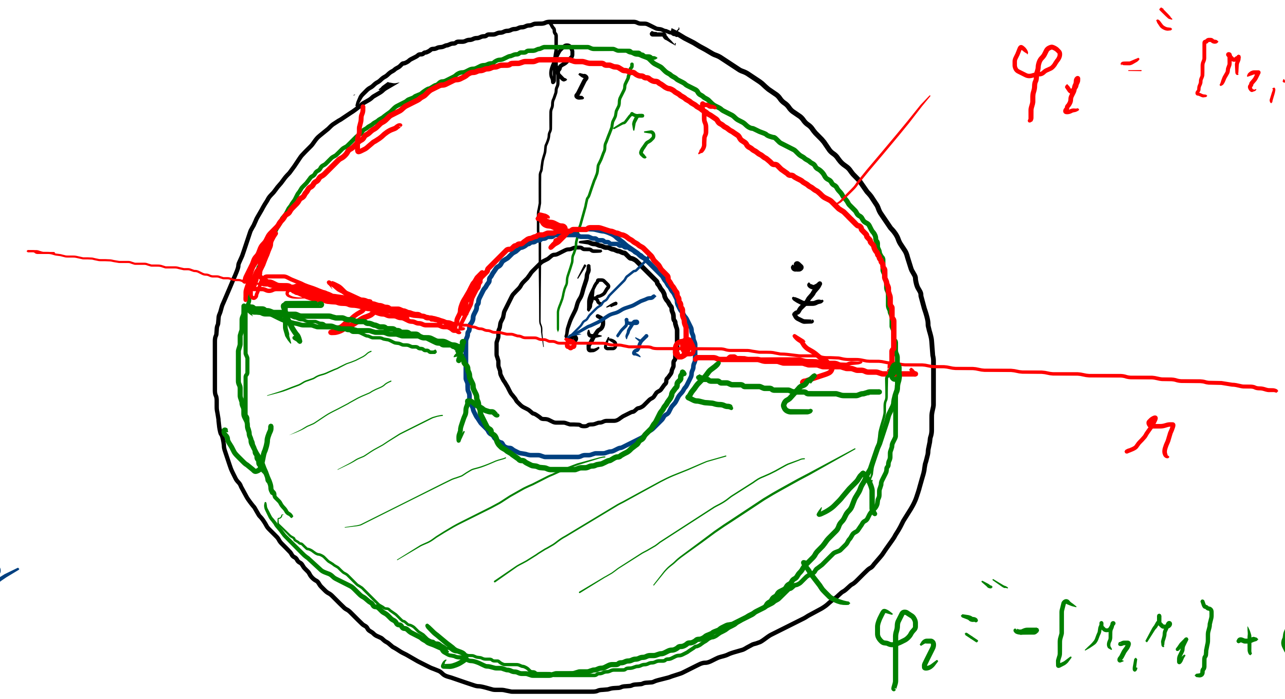
Fisso $z \in C$.

Prendiamo r_1, r_2 tali che

$$R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$$

Sia r una retta passante per z_0 ma non per z

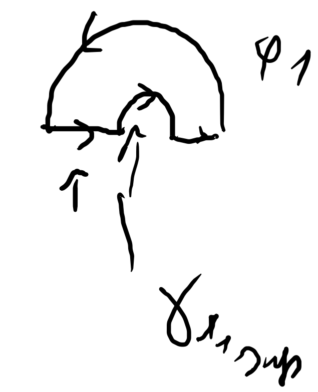
Costruiamo due circuiti φ_1 e φ_2



$\varphi_1 := [r_2, r_1] - C_{r_1} + [r_1, r_2] + C_{R_1}$

$\varphi_2 := -[r_2, r_1] + C_{R_2} - [r_1, r_2] - C_{r_1}$, Per Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = 0 \qquad (z \notin \text{int } \varphi_2)$

Per la formula integrale di Cauchy $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$



Quindi

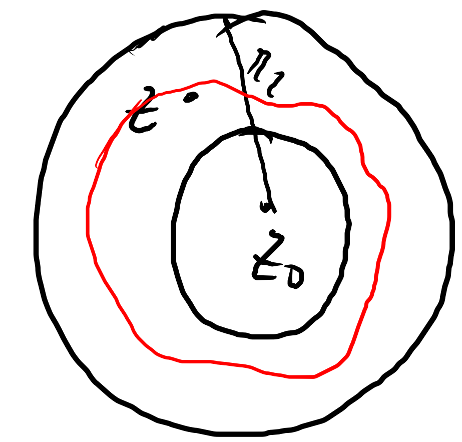
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\underbrace{\int_{\varphi_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi} + \int_{\varphi_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\cancel{\int_{[r_2,r_1]}} - \underbrace{\int_{\gamma_{r_1 sup}}} + \cancel{\int_{[r_1,r_1]}} + \int_{\gamma_{r_2 sup}} - \cancel{\int_{[r_2,r_1]}} + \int_{\gamma_{r_2 inf}} - \cancel{\int_{[r_1,r_1]}} - \underbrace{\int_{\gamma_{r_1 inf}}}\right) = \frac{1}{2\pi i}\left(-\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\right)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = *$$

$$|\xi - z_0| = r_2$$

$$\left|\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r_2} < 1$$



$$\xi - z = \xi - z_0 + z_0 - z = (\xi - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^n}$$

$$* \ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}} f(\xi) \cdot (z-z_0)^n \, d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi\right](z-z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi\right](z-z_0)^n$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = *$$

① $|z - z_0| > r_2 = |\xi - z_0|$

$$\xi - z = \xi - z_0 + z_0 - z = -(z - z_0)\left(1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)$$

$$\left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r_1}{|z - z_0|} < 1$$

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{z - z_0}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\xi - z_0)^k}{(z - z_0)^k}$$

$k = -n-1$

$k+1 = -n \qquad n = -k-1$

$$* = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \sum_{k=0}^{+\infty} (\xi - z_0)^k \cdot \frac{f(\xi)}{(z - z_0)^{k+1}}\, d\xi = \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} f(\xi)(\xi - z_0)^k\, d\xi\right] \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi\right](z - z_0)^n$$

Lemma 2 circuiti

$$= \sum_{-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi\right](z - z_0)^n$$

$$f(z) = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n} + \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n}$$ — parte regolare della serie di Laurent

parte principale (singolare)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

<u>OSS</u>: $$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi)\, d\xi = \operatorname{Res}(f, z_0)$$ (se C è un intorno forato di z_0)

<u>OSS</u>: se z_0 è un polo di ordine k allora

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

z_0 è un polo di ordine k se e solo se $c_n = 0 \ \forall n < -k$ $\quad c_{-k} \neq 0$

z_0 è singolarità eliminabile se e solo $c_n = 0 \quad \forall n < 0$

(in questo caso la serie di Laurent coincide con la serie di Taylor)

z_0 è essenziale se e solo se $\forall k \ \exists \ n < k \quad c_n \neq 0.$

— o —

$f(z) = \text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$ $\quad z = 0$ è una singolarità essenziale

$$\text{Res}(f, 0) = c_{-1}$$

$$= 1$$

$$\text{sen}(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

$w = \frac{1}{z}$

$$\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1/6}{z^3} + \frac{1/5!}{z^5} \dots$$

$$c_{-(2n+1)} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$$

Come calcolare la serie di Laurent?

se z_0 è un polo di ordine k si può calcolare la parte principale

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$\cdot (z-z_0)$

$g(z) = \frac{c_{-2}}{z-z_0} + c_{-1} + \dots$

$$c_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} D^{(k-1)}\left(f(z)(z-z_0)^k \right)$$

$g(z) = f(z) \cdot (z-z_0)$ $\quad$ z_0 è un polo di ordine $k-1$ per g

$\operatorname{Res}(g, z_0) = c_{-2}$ $\quad$ $c_{-2} = \operatorname{Res}(f(z)(z-z_0), z_0) = \frac{1}{(k-2)!} \lim_{z \to z_0} D^{(k-2)}\left(f(z)(z-z_0)^k \right)$

$\vdots$

$$c_{-j} = \frac{1}{(k-j)!} \lim_{z \to z_0} D^{(k-j)}\left(f(z)(z-z_0)^k \right)$$

$$c_{-k} = \lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0)^k$$

Es: $f(z) = \dfrac{1}{z - \operatorname{sen} z}$ $\qquad z_0 = 0$ polo di ordine 3

$h(z) = z - \sin z \qquad h(0) = 0$

$h'(z) = 1 - \cos z \qquad h'(0) = 0$

$h''(z) = \sin z \qquad h''(0) = 0$

$h'''(z) = \cos z \qquad h'''(0) \neq 0$

$$\frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + \text{Reg.}$$

$$c_{-3} = \lim_{z \to 0} \frac{z^3}{z - \sin z} = 6$$

$$c_{-2} = \qquad D \frac{z^3}{z - \sin z} = \frac{3z^2(z - \sin z) - z^3(1 - \cos z)}{(z - \sin z)^2} \qquad D^2 \; ?$$

Metodo alternativo (coefficienti indeterminati)

$$f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$$

$$\sin z = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{7!} z^7 \dots$$

$$z - \sin z = \frac{1}{6} z^3 - \frac{1}{5!} z^5 + \frac{1}{7!} z^7 \dots$$

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \text{Reg} \dots$$

$$\frac{1}{6} c_{-1} - \frac{1}{5!} c_{-3} = 0$$

$$c_{-1} = 6 \cdot \frac{6}{5!} = \frac{3}{10}$$

$$g(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$$

$$h(z) = \sum b_n (z-z_0)^n$$

$$\sum a_n (z-z_0)^n = \left[\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + \dots \right] \left[b_0 + b_1 (z-z_0) + \dots \right]$$

$$1 = \left(\frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + \dots \right) \left(\frac{1}{6} z^3 - \frac{1}{5!} z^5 + \dots \right)$$

$$\boxed{c_{-3} = 6} \qquad \boxed{c_{-2} = 0}$$

$$\frac{c_{-3}}{z^3} \cdot \frac{1}{6} z^3 = \frac{1}{6} c_{-3}$$

$$\frac{c_{-2}}{z^2} \cdot \frac{1}{6} z^3 = \frac{1}{6} c_{-2} z$$

$$\cancel{\frac{c_{-1}}{z} \cdot \frac{1}{6} z^3} = \boxed{\frac{1}{6} c_{-1} z^2 - \frac{1}{5!} c_{-3} z^2}$$

Funzioni razionali: metodo dei residui per la decomposizione in fratti semplici

$$f(z) = \frac{a(z)}{b(z)} \quad \text{se} \quad \deg a \geq \deg b \quad \rightsquigarrow \quad a(z) = q(z) + \frac{r(z)}{b(z)} \quad \deg r < \deg b$$

Supponiamo $\deg a < \deg b$

Metodo di Hermite : $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ zeri di $b(z)$ di molteplicità $k_1, k_2, .., k_n$ risp.

1° modo $\quad f(z) = \frac{a_1}{z-\alpha_1} + \frac{a_2}{z-\alpha_2} + \dots + \frac{a_n}{z-\alpha_n} + \frac{d}{dz} \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad Q(z) = \prod_{j}^{n} (z-\alpha_j)^{k_j - 1}$

2° modo

$$f(z) = \underbrace{\left[\frac{a_{11}}{z-\alpha_1} + \frac{a_{12}}{(z-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{a_{1k_1}}{(z-\alpha_1)^{k_1}} \right]}_{\sigma_1(z)} + \underbrace{\left[\frac{a_{21}}{z-\alpha_2} + \dots \frac{a_{2k_2}}{(z-\alpha_2)^{k_2}} \right]}_{\sigma_2(z)} + \dots + \underbrace{\left[\frac{a_{n1}}{z-\alpha_n} + \dots + \frac{a_{nk_n}}{(z-\alpha_n)^{k_n}} \right]}_{\sigma_n(z)}$$

Teorema

Sia $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$ a, b polinomi $\deg a < \deg b$; siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gli zeri di $b(z)$, di molteplicità $k_1, k_2, \dots, k_n$ (quindi α_j è polo di ordine k_j per f)

Sia $\sigma_j(z)$ la parte principale della serie di Laurent di f in un intorno forato di α_j che non contiene altre singolarità; allora

$$\boxed{f(z) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(z)}$$

Dim Sia $g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(z)$. g è olomorfa in $\mathbb{C}$: infatti questo è evidente se $z \neq \alpha_j$; considero α_j e prendo un intorno U_j di α_j che non contiene altre singolarità;

Per Laurent si ha $g(z) = \underline{\sigma_j(z)} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-\alpha_j)^k - \underbrace{\sum_{l=1}^{m} \sigma_l(z)}$ $\forall z \in U_j \setminus \{\alpha_j\}$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-\alpha_j)^k - \left(\sigma_1(z) + \sigma_2(z) + \dots + \sigma_m(z)\right)$$

non compare $\sigma_j(z)$!

questa funzione è estendibile anche in α_j! Quindi è analitica.

Quindi g è intera.

Inoltre g è limitata. Infatti $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$ perché $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$

$\deg b > \deg a$

e inoltre $\lim_{|z|\to+\infty} \sigma_j(z) = 0$ $\left(\frac{a_{j,l}}{(z-z_0)^l} \to 0 \right)$

$\lim_{|z| \to +\infty} g(z) = 0$ allora preso $\varepsilon = 1$ esiste $B(0, R_\varepsilon)$ tale

che se $|z| > B(0, R_\varepsilon)$ $|g(z)| \leq 1$

Su $\overline{B(0,R_\varepsilon)}$ g è limitata quindi g è limitata su $\mathbb{C}$

Per il teorema di Liouville si conclude che $g(z) = c$ costante

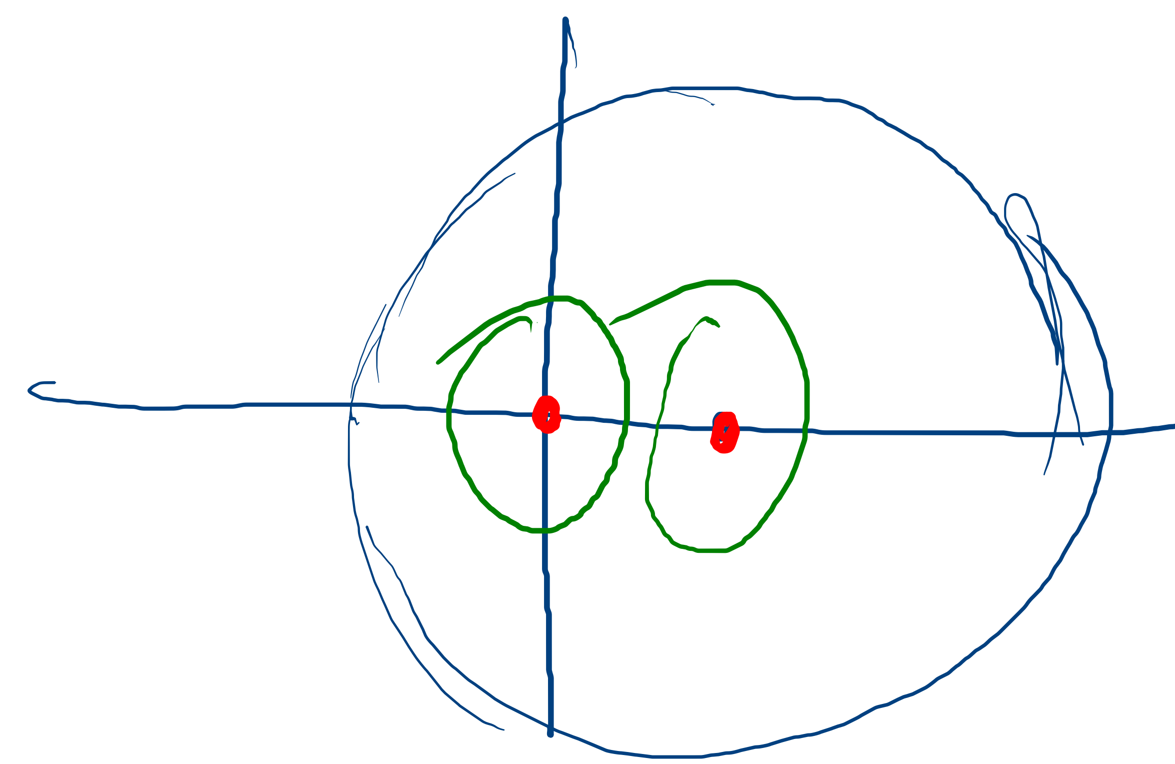
e necessariamente $c = 0$ (perché $\lim_{|z| \to +\infty} g(z) = 0$).

Calcolo di integrali con i residui

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2(z-1)}\, dz = \int_0^{2\pi} e^{1+2e^{it}} \cdot \frac{1}{(1+2e^{it})^2 \cdot \cancel{2e^{it}}} \cdot \cancel{2ie^{it}}\, dt$$

cerchio di centro 1 e raggio 2

$\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$



$$\boxed{Res(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz}$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)}$$

$z = 1$ polo semplice

$z = 0$ polo doppio

Teorema dei residui

$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ A aperto connesso, sia γ una curva con $\Gamma \subset A$, siano $z_1, z_2, \dots, z_n$ punti singolari isolati di f e sia $z_j \in \Gamma_{int}$ $\forall j = 1, \dots, n$; non esistono altre singolarità di f all'interno di Γ.

Allora
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_j) \right).$$