Introduzione all'integrale di Lebesgue

Misura di Peano-Jordan

- non è numerabilmente additiva $\left[\quad m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \quad \right]$

$E_i \cap E_j = \emptyset$

Es: $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{ q_n : n \in \mathbb{N} \}$

$E_n = \{q_n\}$ $\qquad m_{PJ}(E_n) = 0$ $\qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ è un insieme non misurabile!

- esistono aperti, chiusi, compatti non misurabili

(fat Cantor set)

- Esistono successioni $(f_n)_n$ di funzioni integrabili con limite $\lim_{n\to+\infty} f_n$ non integrabile

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k} \qquad E_k = \{q_k\}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$$

- Formule di riduzione negli integrali doppi (Fubini) ~~no~~ Fubini Tonelli

- Teoremi di passaggio al limite sotto il segno integrale

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2} \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \underline{\text{uniformemente}} \text{ su } \mathbb{R} \qquad \left[\left|\frac{n}{n^2+x^2}\right| \le \frac{1}{n} \to 0\right]$$

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \boxed{\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx}}_{=\,\pi} \;\cancel{\overset{?}{=}}\; \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx}_{=\,0}$$

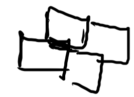
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{n^2+x^2}\,dx = 2\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{n\left(1+\left(\frac{x}{n}\right)^2\right)}\,dx = 2\lim_{b\to+\infty} \int_0^{b/n} \underbrace{\frac{1}{1+y^2}\,dy}_{\left[\operatorname{arctg} y\right]_0^{b/n}} = \pi \quad \forall n$$

$$y = \frac{x}{n} \qquad dy = \frac{1}{n}\,dx$$

$$x = b \rightsquigarrow y = \frac{b}{n}$$

Insiemi di misura nulla

Def: E di misura nulla se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ un plurirettangolo $P = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, $\mathrm{int}(R_i \cap R_j) = \emptyset$



tale che $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrico}}}{m}(P) < \varepsilon$ e $E \subset P$.

—— a

Lebesgue: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ un "ω-plurirettangolo" $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ $\quad \mathrm{int}(R_i \cap R_j) = \emptyset$

tale che $m(P) < \varepsilon$ e $E \subset P$.

es: $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ Fissato $\varepsilon > 0$ considero $P = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[q_n, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right]$

$\mathbb{Q} \subset P \qquad m(P) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1}$

$\frac{1-}{1-\frac{1}{n}} = ?$

OSS: E di P.J-misura nulla $\Rightarrow$ di $\mathcal{L}$-misura nulla

Def: proprietà verificata quasi ovunque (q.o.) [almost everywhere]

Sia $P(x)$ una proprietà $(x \in \mathbb{R}^n)$; diremo che $P(x)$ è verificata q.o. se l'insieme $\{x : P(x)$ è falsa$\}$ ha misura nulla.

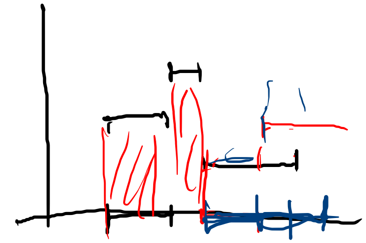
Es: "x è irrazionale" è q.o. vera su $\mathbb{R}$

"$\sin x \cdot \cos y = 0$" è q.o. falsa in $\mathbb{R}^2$

"$\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) = 0$" è vero q.o.

"$\lim_{n \to +\infty} e^{-nx^2} = 0$ q.o. su $\mathbb{R}$"

Funzioni a scale



$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice a scala se è combinazione lineare di funzioni caratteristiche su rettangoli

$$\varphi(x) = c_1 \chi_{R_1}(x) + c_2 \chi_{R_2}(x) + \dots + c_k \chi_{R_k}(x) \qquad \chi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in R \\ 0 & \text{se } x \notin R \end{cases}$$

[oss: possiamo supporre $\underbrace{\mathrm{int}(R_i \cap R_j)} = \emptyset$ se $i \neq j$]

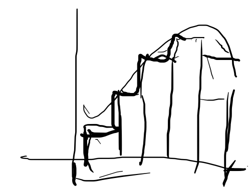
$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} c_i \, m(R_i)$$

si suppone i rettangoli quasi disgiunti

misura geometrica "base × altezza"

Definizione

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$; f si dice integrabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ se esiste una successione di funzioni a scala $(\varphi_n)_n$ tale che



1) $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$

2) $$\lim_{n,m \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \, dx = 0$$

è una condizione di Cauchy relativa alla norma integrale nello spazio delle funzioni a scala $\|\varphi\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \, dx$

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L^1}$$

OSS: $$\underbrace{\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n(x) \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(x) \, dx \right|}_{\to 0} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \, dx \to 0$$

Quindi la successione numerica $\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n(x)\,dx \right)_n$ è di Cauchy

quindi è una successione convergente;

allora esiste $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n(x)\,dx$;

diremo integrale di Lebesgue di f questo limite

$$\mathcal{L}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n(x)\,dx}$$

$\left[\begin{array}{l} \varphi_n \text{ funzioni a scala} \\ \varphi_n(x) \to f(x) \text{ q. o.} \\ \lim_{n,m \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|\,dx = 0 \end{array} \right]$

[Si può dimostrare che questo limite non dipende dalla successione $(\varphi_n)_n$]

Se vale $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ ma non necessariamente le

$$\lim_{n,m \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|\, dx = 0$$

diremo che f è misurabile secondo Lebesgue.

Es: $f(x) = x$ è $\underbrace{\text{misurabile ma non integrabile}}$ su $\mathbb{R}$

$f(x) = c \quad c \in \mathbb{C} \quad c \neq 0$ "

f continua $\Rightarrow$ f misurabile

Insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

$E \subseteq \mathbb{R}^n$; E si dice misurabile secondo Lebesgue se la funzione χ_E è misurabile in $\mathbb{R}^n$ e diremo

$$m_L(E) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x)\,dx & \text{se } \chi_E \text{ è integrabile} \\ +\infty & \text{se } \chi_E \text{ è misurabile ma non integrabile} \end{cases}$$

OSS: E misurabile secondo P.J. $\Rightarrow$ E misurabile secondo Lebesgue e $m_{PJ}(E) = m_L(E)$.

Funzioni integrabili su un insieme misurabile

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, $f: E \to \mathbb{C}$ si dice misurabile/integrabile su E se

è misurabile/integrabile su $\mathbb{R}^n$ la funzione $f^*: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ $f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus E \end{cases}$

Poniamo $\int_E f\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^*\,dx$

OSS: $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ limitata, E limitato;

f integrabile secondo Riemann $\Rightarrow$ f è integrabile secondo Lebesgue

$$R\int_E f\,dx = L\int_E f\,dx$$

Es: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ è integrabile su $[1, +\infty[$, non è integrabile su $]0, 1]$

— o —

Teoremi di passaggio del limite sotto il segno integrale

$$\left[\quad \pi = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{n^2 + x^2} \, dx \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2 + x^2} \, dx = 0 \right]$$

Es: $\quad f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = e^{-nx^2}$

$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \quad$ q.o. x

Posso dire che $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} e^{-nx^2} dx = 0$?

$|f_n(x)| \leq g(x)$

$|e^{-nx^2}| \underset{?}{\leq} e^{-x^2}$

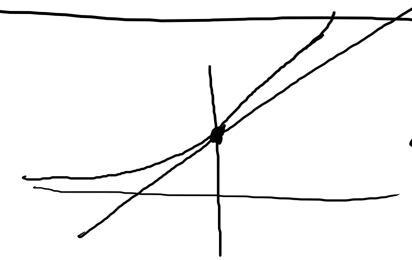
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}}_{= f_n(x)} dx = \cancel{?}$$

$$1 \quad \text{ok}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$$

$$\boxed{1+y \overset{?}{\le} e^y \qquad y \geq 0}$$



vero

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = 1.$$

$$|f_n(x)| \le g(x)$$

$$g(x) = e^{-x}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \overset{?}{\le} e^{-x}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \overset{?}{\le} e^{x}$$

$$1+\frac{x}{n} \overset{?}{\le} e^{\frac{x}{n}}$$

$$\int_{-b}^{b} \sqrt{n}\, e^{-nx^2}\, dx = 2\int_{0}^{b} \sqrt{n}\, e^{-(\sqrt{n}x)^2}\, dx =$$

funz. pari

$\sqrt{n}x = y \qquad dy = \sqrt{n}\, dx$

$$= 2\int_{0}^{\sqrt{n}b} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, e^{-nx^2} = 0 \quad \text{q.o. } x$$