$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua $\Rightarrow$ f integrabile ?

NO $f(x) = c \neq 0$

vero se $f : I \to \mathbb{C}$ I limitato

$f : [0,1] \to \mathbb{C}$ misurabile e limitata $\Rightarrow$ f integrabile

---

$|f_n(x)| \leq g(x)$ $\Rightarrow$ f è integrabile e $\lim \int = \int \lim$

$f_n(x) \to f$

sia f tale che $\left(\boxed{|f(x)| \leq g(x)} \right.$ e $g(x)$ è integrabile

$\Rightarrow$ $f_n = f$ $\forall n$ $\Rightarrow$ f è integrabile

OSS: Sia $f : E \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ misurabile.

Esiste $g : E \to \mathbb{R}$ integrabile tale che $|f(x)| \leq g(x)$ q.o. $x \in E$

$\Rightarrow$ f è integrabile

$g(x) = |f(x)|$

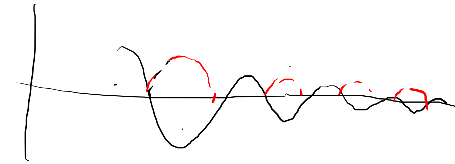
$f : E \to \mathbb{C}$ limitata e E misurabile limitato

$\exists c : \quad |f(x)| \leq c \quad \forall x \in E$

è integrabile su un insieme limitato

$$\int_E c \, dx = c\, m(E)$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabile $\Rightarrow$ $|f|$ è integrabile



vero: $\varphi_n \to f$ $\qquad |\varphi_n| \to |f|$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n - \varphi_m| \, dx}\to 0 \qquad \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\big|\,|\varphi_n| - |\varphi_m|\,\big|}_{\le |\varphi_n - \varphi_m|} \, dx \le \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n - \varphi_m| \, dx \to 0$$

NB: questo fatto NON è vero per l'integrale di Riemann $\qquad \left| \quad \right| \le \frac{1}{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{x} \sin x \qquad [1, +\infty[$

$$\int_1^b \frac{1}{x} \sin x \, dx = \left[-\frac{1}{x} \cos x \right]_1^b - \int_1^b \left| \frac{1}{x^2} \cos x \right| dx$$

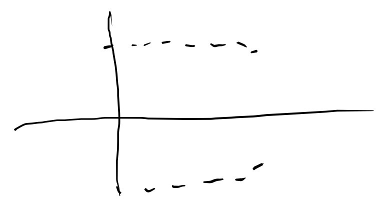
$|f(x)| = \left| \frac{1}{x} \sin x \right|$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad |f|$ L-integrabile $\Rightarrow$ f L-integrabile ?

vero per Lebesgue $\qquad |f| \le \underbrace{|f|}_{g}$

NON è vero per Riemann

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



$|f(x)| = 1$

$f(x) \overset{q.o.}{=} 1$ su $[0,1]$

<u>OSS</u> : siano $f, g : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ E misurabile

Sia $f(x) = g(x)$ q.o. Allora f è integrabile se e solo se g è integrabile e si ha

$$\int_E f\,dx = \int_E g\,dx .$$

[se g è integrabile , $|g|$ è integr. e $|f(x)| \leq |g(x)|$ q.o.
$\Rightarrow f$ int.]

Teorema di Fubini

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ integrabile

Allora

1) per q.o. $x \in \mathbb{R}$ la restrizione $f(x,\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile

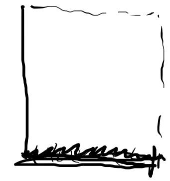
2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$ è integrabile

3) $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx$

(vale anche la versione simmetrica scambiando x con y)

Questo teorema NON vale per Riemann! Nel teorema per Riemann 1) e 2) sono parte delle ipotesi!

$E = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \{0\}$



$\chi_E = f(x,y)$ è integrabile

però $\chi_E(x,0)$ non è integrabile

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

sia $y \neq 0$ $\quad f(\cdot, y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^2}$ è integrabile su $\mathbb{R}$ (a $\pm\infty$ è infinitesimo di ordine 3)

Però la funzione NON è integrabile su $\mathbb{R}^2$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\, dx\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B((0,0),\varepsilon)} \left| \frac{\rho \cos\vartheta}{\rho^4} \right| \rho \, d\rho \, d\vartheta = +\infty$$

⚠ Se q.o. restrizione di f è integrabile, non sempre f è integrabile.

Teorema di Tonelli

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ misurabile, $\boxed{f(x,y) \geq 0 \text{ q.o. } (x,y) \in \mathbb{R}^2}$; per q.o. $x \in \mathbb{R}$ la restrizione $f(x,\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia integrabile e la funzione $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$ sia integrabile.

Allora f è integrabile. [e $\iint = \int\left(\int \dots\right)$]

Integrali dipendenti da un parametro

$H(\tau) = \int_E h(x,\tau)\,dx$ $\qquad \hat{f}(t) = \int \underbrace{f(x)\, e^{-ixt}}_{h(x,t)}\, dx$ $\qquad \cancel{\hat{f}(s) = \int \underbrace{f(t)\, e^{-st}}_{h(t,s)}\, dt \quad s \in \mathbb{C}}$

Teorema $\quad E \subseteq \mathbb{R}^n \quad I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$h : E \times I \to \mathbb{C} \qquad h(x,\tau)$

Supponiamo

1. $h(\cdot,\tau) : E \to \mathbb{C}$ integrabile per ogni $\tau \in I$
2. $h(x,\cdot) : I \to \mathbb{C}$ continua per quasi ogni $x \in E$
3. esiste $g : E \to \mathbb{R}$ integrabile e tale che $|h(x,\tau)| \le g(x)$ per ogni $\tau \in I$ e per q.o. $x \in E$

Allora la funzione $H(\tau) = \int_E h(x,\tau)\,dx$ $\big(H : I \to \mathbb{C}\big)$ è continua.

Teorema $\quad E \subseteq \mathbb{R}^n \quad I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo $\quad h : E \times I \to \mathbb{C}$

Supponiamo ① $h(\cdot, \tau) : E \to \mathbb{C}$ integrabile per ogni $\tau \in I$

$\boxed{2}$ $h(x, \cdot) : I \to \mathbb{C}$ sia derivabile su I per quasi ogni $x \in E$ $\quad \frac{\partial h}{\partial \tau}(x, \tau)$

$\boxed{3}$ esiste $g : E \to \mathbb{R}$ integrabile e tale che $\left| \frac{\partial h}{\partial \tau}(x, \tau) \right| \leq g(x)$ $\forall \tau \in I$ e q.o. $x \in E$.

Allora la funzione $H(\tau) = \int_E h(x, \tau)\, dx$ $\quad H : I \to \mathbb{C}$ è derivabile e si ha

$$H'(\tau) = \int_E \frac{\partial h}{\partial \tau}(x, \tau)\, dx .$$

$|f(x)\, e^{-ixt}| = |f(x)|$

Es: sia f integrabile su $\mathbb{R}$ $\quad \mathcal{F}\{f\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{f(x)\, e^{-ixt}}^{h(x,t)}\, dx$

supponiamo che $x f(x)$ sia integrabile su $\mathbb{R}$, allora

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}\{f\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ix f(x)\, e^{-ixt}\, dx = -i\, \mathcal{F}\{x f(x)\}(t)$$

Spazi L^p

$L^1 \quad L^2 \quad L^\infty$

$f, g : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ consideriamo la relazione $f \sim g$ se $f(x) = g(x)$ q.o.

$$L^1(E) = \frac{\{ f : E \to \mathbb{C} \text{ integrabili} \}}{\sim}$$

$\| f \|_{L^1} = \int_E |f| \, dx$ è una norma

$\| f \| \geq 0 \quad \forall f$

$\| f \| = 0$ se e solo se $f = 0$

$\| \lambda f \| = |\lambda| \, \| f \|$

$\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$

$d(f,g) = \|f-g\|$ è una metrica (distanza)

$L^1(E)$ è uno spazio normato, è uno spazio metrico; è uno spazio di Banach (cioè è metrico completo)

cioè ogni successione di Cauchy è convergente

cioè: se $(f_n)_n$ è una successione in $L^1(E)$ e si ha che

$$\lim_{n,m \to +\infty} \int_E |f_n(x) - f_m(x)|\, dx = 0$$ allora esiste $f \in L^1(E)$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = f$$

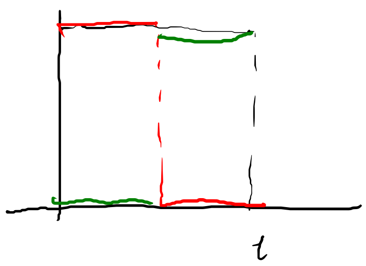
nella metrica di L^1

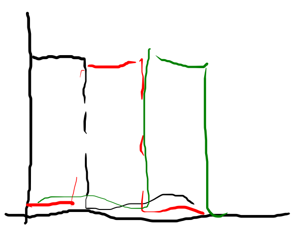
cioè $$\lim_{n \to +\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$$

⚠ Dire che $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ in metrica L^1 non significa che

per q.o. $x \in E$ $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$!!

Es:





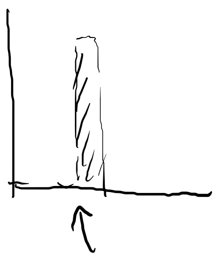
$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f_1(x) = 1$

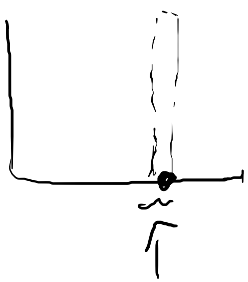
$f_2(x) = \chi_{]0,\frac{1}{2}]}$ $\quad f_3(x) = \chi_{]\frac{1}{2},1]}$

$f_4(x) = \chi_{]0,\frac{1}{3}]}$ $\quad f_5(x) = \chi_{]\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}$ $\quad f_6(x) = \chi_{]\frac{2}{3},1]}$

$\lim_{n \to +\infty} f_n = 0$ in norma L^1 $\quad \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 |f_n(x) - 0| \, dx}$ $= 0$



però $\forall x \in [0,1]$ non è vero che $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$!



$\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\qquad |f_n(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_\varepsilon$

$\forall x$
esistono infiniti indici per cui $f_n(x) = 1$

Teorema

Sia $(f_n)_n$ una successione in $L^1(E)$. Sia $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ in norma L^1.

Allora esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ tale che

per q.o. $x \in E$ $\lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$.

$$L^2(E) = \{f : E \to \mathbb{C} : |f|^2 \text{ sia integrabile}\} / \sim$$

$f \sim g$ se $f(x) = g(x)$ q.o.

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_E |f(x)|^2 dx}$$

$\mathbb{R}^n$ $\|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2}$

$$d(f,g) = \|f - g\|_{L^2}$$

$L^2(E)$ è uno spazio di Banach (metrico completo)

In più possiamo definire su $L^2(E)$ un prodotto hermitiano

Prodotto Hermitiano

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$$

1) $\langle f, f \rangle \in \mathbb{R}$

$\langle f, f \rangle \geq 0$

$\langle f, f \rangle = 0$ se e solo se $f = 0$

2) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

3) $\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle \qquad \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$\langle h, \lambda f + \mu g \rangle = \bar{\lambda} \langle h, f \rangle + \bar{\mu} \langle h, g \rangle \qquad f, g, h \in H$

$H = L^2(E)$

$$\langle f, g \rangle = \int_E f(x) \cdot \bar{g}(x)\, dx$$

$f(x) \cdot \bar{f}(x) = |f(x)|^2$

OSS: $\sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|$ $\sqrt{\int_E f \cdot \bar{f} \, dx} = \sqrt{\int |f|^2 \, dx} = \|f\|_{L^2}$

Se H è completo come spazio metrico (quindi è uno spazio di Banach) si dice che H è uno spazio di Hilbert.

$\boxed{L^2([-\pi, \pi])}$

$$L^p(E) = \frac{\{ f : E \to \mathbb{C} : |f|^p \text{ è integrabile} \}}{\sim}$$

$p \in \mathbb{R} \quad p \geq 1$

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_E |f|^p \, dx \right]^{1/p}$$

$L^p(E)$ è uno spazio di Banach $\forall p \geq 1$.

Però è uno spazio di Hilbert solamente se $p = 2$.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Se H è uno spazio con prodotto hermitiano $\langle \cdot , \cdot \rangle$ si ha

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$