$$L^p(E) = \Big[\underbrace{\{ f : E \to \mathbb{C} : \int_E |f|^p\,dx < +\infty \}}_{\sim}\Big] \qquad \|f\|_p = \Big[\int_E |f(x)|^p\,dx \Big]^{1/p}$$

$f \sim g$ se $f(x) = g(x)$ q.o.

$L^p(E)$ spazio di Banach (sp. normato con metrica completo) $\forall p \in \mathbb{R}$ $p \geq 1$

$L^2(E)$ spazio di Hilbert $\langle f, g \rangle = \int_E f(x) \cdot \bar{g}(x)\,dx$ $\quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

$p = \infty$

misurabile

$$L^\infty(E) = \frac{1}{\sim} \Big[\{ f : E \to \mathbb{C} \;\; f \text{ essenzialmente limitata} \} \Big]$$

$f : E \to \mathbb{C}$ limitata se $\exists\, M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \;\; \forall x \in E$

f è essenzialmente limitata se $\exists\, M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M$ per q.o. $x \in E$

es: $f(x) = \begin{cases} n & \text{se } x = 1/n \quad n \in \mathbb{N}^+ \\ x & \text{se } x \in [0,1] \quad x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

f non è limitata

però f è essenzialmente limitata

$|f(x)| \leq 1$ per q.o. $x \in [0,1]$

Diremo $\sup\text{ess} f = \min\{M \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| \leq M \text{ per q.o. } x \in E\}$

$\|f\|_\infty$

$L^\infty(E)$ è uno sp. di Banach

<u>Teorema</u> Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile di misura finita; allora

$p < q \Rightarrow L^q(E) \underset{\neq}{\subset} L^p(E)$ $\qquad \left[\underbrace{L^\infty(E) \subset L^2(E)} \subset \underbrace{L^1(E)} \right]$

Dim (casi $\infty, 2, 1$)

$L^\infty(E) \underset{\neq}{\subset} L^2(E)$ Sia f con $\underline{|f(x)| \le M}$ q.o. $x \in E$

$$\int_E |f(x)|^2 dx \le \int_E M^2 = M^2 \cdot m(E) < +\infty$$

es: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ $\quad f:]0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$

però $f \notin L^\infty(]0,1])$

$L^2(E) \subsetneq L^1(E)$

Sia $\underline{f \in L^2(E)}$ $\qquad \int_E |f| \cdot 1 \, dx = \underline{\langle |f|, 1 \rangle} \leq \|f\|_2 \cdot \|1\|_2 < +\infty$

$$\|1\|_2 = \sqrt{\int_E 1^2 \, dx} = \sqrt{m(E)}$$

es: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$f \in L^1(]0,1]) \setminus L^2(]0,1])$

Serie di Fourier

scrivere una funzione periodica come serie del tipo

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega x) \qquad a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

$$a_n = C_n + C_{-n} \qquad b_n = i\left(C_n - C_{-n}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x} \qquad C_n \in \mathbb{C}$$

"serie bilatera"

intendiamo come somma della serie il limite

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{in\omega x}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodica

$f \in L^p([-\pi,\pi])$ $p = 1, 2, \infty$

intendo $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^p([-\pi,\pi])$

$f|_{]-\pi,\pi]} :]-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$

$f \in L^2([-\pi,\pi]) = L^2(-\pi,\pi)$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \bar{g}(x)\, dx$$

f si dice ortogonale a g se $\langle f, g \rangle = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \bar{g}(x)\, dx = 0$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2}$$

$$\text{Es}: \quad e^{inx} \perp e^{imx} \qquad m \neq n \quad \rightsquigarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \frac{1}{i(n-m)}\left[e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}\right] = 0$$

$$e^{ik\pi} = e^{-ik\pi}$$

$$\cos(nx) \perp \cos(mx) \qquad m \neq n$$

$$\operatorname{sen}(nx) \perp \operatorname{sen}(mx) \qquad m \neq n$$

$$\cos(nx) \perp \operatorname{sen}(mx) \qquad \forall m, n$$

$$\cos(nx) \perp 1 \;; \quad \operatorname{sen}(nx) \perp 1 \qquad \forall n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)\right]dx$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+m}\operatorname{sen}((n+m)x) + \frac{1}{n-m}\operatorname{sen}((n-m)x)\right]_{-\pi}^{\pi} \qquad n \neq m$$

$$\operatorname{sen}((n+m)\pi) = 0$$

$$\operatorname{sen}(-(n+m)\pi) = 0$$

$$\|e^{inx}\| \qquad \|\cos(nx)\| \qquad \|\operatorname{sen}(nx)\| \qquad \|1\| \qquad \cos($$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\,dx = \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}\left(\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)\right) = 0$$

$$\cos(n\pi)$$

$$\|1\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx} = \sqrt{2\pi}$$

$$\|e^{inx}\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |e^{inx}|^2\,dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx} = \sqrt{2\pi}$$

$$\|\cos(nx)\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx} = \sqrt{\frac{1}{n}\int_{-n\pi}^{n\pi} \cos^2(y)\,dy} = \sqrt{\frac{1}{n}\,n\pi} = \sqrt{\pi}$$

$$\|\sin(nx)\|_2 = \sqrt{\pi}$$

$nx = y \qquad dx = \frac{1}{n}\,dy$

$x = -\pi \leadsto y = -n\pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(y)\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 y\,dy$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 y + \sin^2 y)\,dy = \pi$$

Famiglia ortogonale $\quad \mathcal{F} = \{ f_n : n \in \mathbb{N} \}$ si dice ortogonale se

$f_n \perp f_m \quad \forall n \neq m$

Famiglia ortonormale : se $\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 1 & \text{se } n = m \end{cases}$

$\uparrow$ delta di Kronecker

$L^2([-\pi, \pi])$:

$\mathcal{F} = \left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ / $\mathcal{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \ n \in \mathbb{N}^+ \right\}$

Teorema di Pitagora

Siano $f, g \in H$, $f \perp g$ $\Rightarrow$ $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$

$$\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g \rangle = \underset{\|f\|^2}{\underset{\shortparallel}{\langle f, f \rangle}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\langle f, g \rangle}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\langle g, f \rangle}} + \underset{\|g\|^2}{\underset{\shortparallel}{\langle g, g \rangle}}$$

Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

H sp. di Hilbert; sia W un sottospazio di H di dimensione finita N

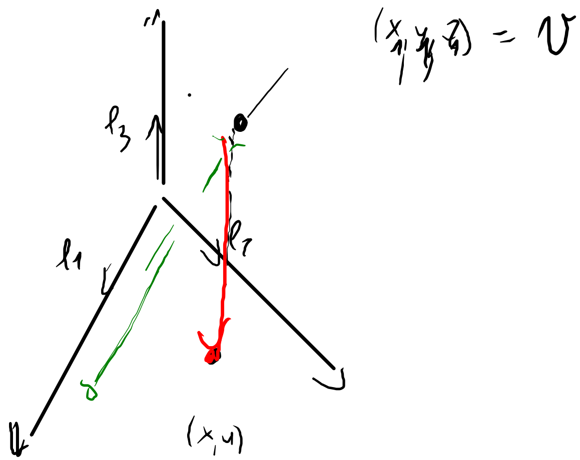
$W = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$.

Allora esiste una base ortonormale di W $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ tale che

$\forall k \quad e_k \in \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$

Costruzione $\quad e_1 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|} \qquad z_k = w_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle w_k, e_j \rangle e_j \qquad e_k = \dfrac{z_k}{\|z_k\|}$

Proiezioni ortogonali



$$\underline{Pv} = \overset{\overset{x_1}{\parallel}}{\langle v, e_1\rangle e_1} + \overset{\overset{y_1}{\parallel}}{\langle v, e_2\rangle e_2} = (x_1, y_1)$$

$v - Pv \perp$ piano xy

Pv è il punto che realizza la minima distanza tra v e il piano

H $\qquad W$ sottospazio vettoriale di dim. N, con base ortonormale $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$

Definiamo la funzione $P: H \to W$ $\qquad P(v) = \sum_{k=1}^{N} \langle v, e_k \rangle e_k$

P è la proiezione ortogonale su W

<u>OSS</u>: 0) $P(v) \in W$

1) $\forall k = 1, \dots, N \qquad v - P(v) \perp e_k \qquad [\, v - P(v)$ è ortogonale a $W\,]$

$$\langle v - P(v), e_k \rangle = \langle v - \left(\langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle v, e_k \rangle e_k + \dots + \langle v, e_N \rangle e_N \right), e_k \rangle$$

$$= \langle v, e_k \rangle - \Big(\langle v, e_1 \rangle \underbrace{\langle e_1, e_k \rangle}_{= 0} + \underbrace{\dots}_{= 0} + \langle v, e_k \rangle \underbrace{\langle e_k, e_k \rangle}_{= 1} + \underbrace{\dots}_{0} \Big) = 0$$

2) $P(v)$ realizza la minima distanza tra v e W

$\|P(v)-v\| = \min \{ \|z-v\| : z \in W \}$ e $P(v)$ è unico a realizzare questo minimo

$$\|z-v\|^2 = \|\underbrace{(z-Pv)}_{\in W} + (Pv-v)\|^2 \overset{\text{Pitagora}}{=} \|z-P(v)\|^2 + \|P(v)-v\|^2 \geq \|P(v)-v\|^2$$

è ortogonale a W

e vale $=$ solo se $z=P(v)$

$z-Pv \perp Pv-v$

Vediamo tutto questo in $L^2([-\pi,\pi])$

$$\boxed{W_N = \left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : |n| \le N \right\}_{n \in \mathbb{Z}}}$$

$f \in L^2([-\pi,\pi])$

$$P_N[f] = \sum_{n=-N}^{N} \left\langle f, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

$$P(v) = \sum \langle v, e_k \rangle e_k$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right)}_{= c_n} e^{inx}$$

n-esimo coefficiente di Fourier di f

$$\mathcal{W}_N = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}} \quad n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

$\operatorname{span}\{\mathcal{W}_N\}$

$$P_N[f] = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{N} \left\langle f, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{N} \left\langle f, \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \cdot \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx \cdot \frac{1}{\pi} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen}(nx)\,dx \cdot \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(nx)$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \right]}_{a_0} \cdot \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx \right]}_{a_n} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\,dx \right]}_{b_n} \operatorname{sen}(nx)$$

coefficienti di Fourier

$$a_n = C_n + C_{-n} \qquad b_n = i\left(C_n - C_{-n}\right)$$

$$C_n = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) \qquad C_{-n} = \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) \qquad n \geq 1$$

$P_N[f]$ è l'N-esimo polinomio di Fourier di f

<u>OSS</u>: se $\underline{f \in L^1([-\pi,\pi])}$ i coefficienti di Fourier sono comunque definiti

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \qquad f \in L^1 \Rightarrow \text{ la funzione } f(x)\cdot e^{-inx} \text{ è integrabile}$$

$$\left|f(x)\cdot e^{-inx}\right| = |f(x)|$$

OSS: se f è una funzione pari $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$

$f(-x) = f(x)$

allora $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \operatorname{sen}(nx)}_{\text{dispari}} \, dx = 0 \quad \forall n$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cos(nx)}_{\text{pari}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx$

se f è una funzione dispari $f(-x) = -f(x)$ $\quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{f(x) \cos(nx)}^{\text{dispari}} \, dx = 0 \quad \forall n$

$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx$

Linearità

b_n

$a_n(f)$ $\qquad a_n(g)$

c_n

$a_n(\lambda f + \mu g) = \lambda\, a_n(f) + \mu\, a_n(g)$ per la linearità dell'integrale

$b_n(\qquad) =$

$c_n(\qquad) =$

In genere, una serie bilatera è un oggetto del tipo

$$(*) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n$$

si dice che la serie bilatera $(*)$ è convergente se sono convergenti entrambe le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n \quad e \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_{-k}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{a \to +\infty} \int_{x_0}^{a} f(x)\,dx$$

es: $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ non esiste!

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,dx$$

$$\left[\; PV \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0 \; \right]$$