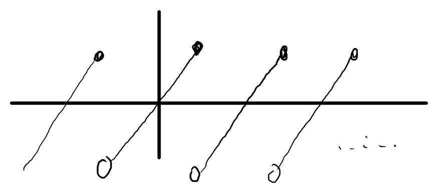
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodica $\therefore$ $f|_{]-\pi,\pi]} \in L^1([-\pi,\pi]) \Rightarrow$ è definita la serie di Fourier di f

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx$$

Se $f \in L^2([-\pi,\pi])$ allora la serie di Fourier di f converge a f in energia (cioè in norma di L^2)

OSS: $f(x) = x$ su $]-\pi,\pi]$



$$\hat{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

$\hat{f}(x) = f(x)$?

$f(\pi) = \pi \qquad \hat{f}(\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(n\pi) = 0$

$\hat{f}$ NON converge puntualmente a f!

La convergenza puntuale

f continua? $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

1873 P. Du Bois Reymond f periodica continua tale che la serie di Fourier in $x=0$ NON converge a $f(0)$.

1966 Y. Katznelson, J.P. Kahane: per ogni insieme $E \subset [-\pi,\pi]$ di misura nulla, esiste una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua e 2π-periodica $\left(f \in L^2([-\pi,\pi])\right)$ tale che $\forall x \in E$

$$\hat{f}(x) \neq f(x) \qquad \left[\ \hat{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \right].$$

1966-1967 Carleson, Hunt: sia $f \in L^p([-\pi,\pi])$ $p>1$ strettamente, allora

$\hat{f}(x) = f(x)$ quasi ovunque.

Se $p=1$ le cose vanno male

1926 Kolmogorov $\exists\, f \in L^1([-\pi,\pi])$ tale che $\hat{f}(x) \neq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

(In effetti $f \in L^1$ non c'è in generale convergenza in L^1)

Criteri per la convergenza puntuale

Teorema di Dirichlet - Weierstrass

Sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$, $x_0 \in \mathbb{R}$, supponiamo esistere finiti $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$, $f'(x_0^+)$.

pseudoderivate destra e sinistra

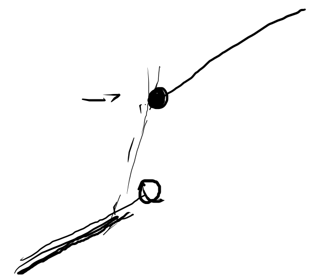
Allora la serie di Fourier di f converge in x_0 al valore $\frac{1}{2}\left(f(x_0^-)+f(x_0^+)\right)$

$\parallel$ $f(x_0)$ se f è continua in x_0

Poniamo $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}$$



x_0

es: $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

$f'(0^-) = 1$

$f'_-(0) = +\infty$

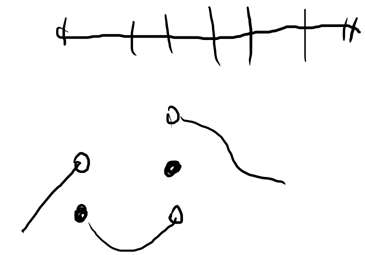
$$f'_-(x_0) = f'_s(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

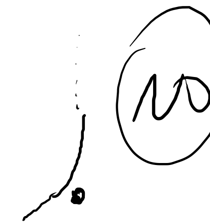
Esempio:

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ si dice continua a tratti se esiste una decomposizione (partizione) di $[a,b]$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

tale che $f|_{]x_j, x_{j+1}[}$ è continua ed esistono finiti i limiti destro e sinistro di f nei nodi

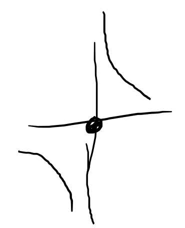


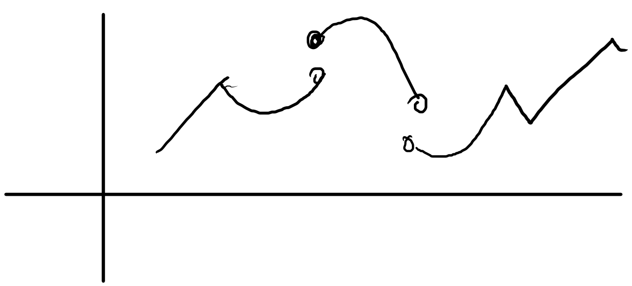


f si dice C^1 a tratti se è continua a tratti e f' è continua a tratti.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

NO





Premesso: il nucleo di Dirichlet.

$e^{-int} \cdot e^{inx} = e^{in(x-t)}$

$f \in L^1([-\pi,\pi])$

Indichiamo con $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \right) e^{inx}$

ridotto N-esimo della serie di Fourier

$\left(\lim_{N \to +\infty} S_N(x) = \hat{f}(x) \right).$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}}_{= D_N(x-t)}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t)\, f(t)\, dt$$

$$\boxed{D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}}$$

$\sum e^{inx} = \sum \left(e^{ix}\right)^n$

$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} = \frac{z^{N+1}-1}{z-1}$

$\forall z \in \mathbb{C}$

$$\underline{D_N(x)} = \frac{1}{2\pi}\left(e^{-iNx} + e^{-i(N-1)x} + \dots + 1 + e^{ix} + \dots + e^{iNx}\right) =$$

$$z = e^{ix}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx}\left(1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + \dots + (e^{ix})^{2N}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx}\,\frac{(e^{ix})^{2N+1} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}ix}}{e^{-\frac{1}{2}ix}} =$$

$$\frac{N+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \to 2k\pi} \boxed{\frac{\operatorname{sen}((N+\frac{1}{2})x)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}x)}} = 2N+1$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2\pi}\boxed{\frac{\operatorname{sen}((N+\frac{1}{2})x)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}x)}}$$

$$x \neq 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \operatorname{sen} z$$

Def: $D_N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}(2N+1) & \text{se } x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\operatorname{sen}(\overbrace{(N+\frac{1}{2})x}^{Nx+\frac{1}{2}x})}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}x)} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \end{cases}$

Nucleo di Dirichlet

OSS: D_N è continua su $\mathbb{R}$;

D_N è periodica di periodo 2π

$$D_N(x+2\pi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}((N+\frac{1}{2})(x+2\pi))}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(x+2\pi))} = \frac{1}{2\pi} \frac{\overbrace{\operatorname{sen}((N+\frac{1}{2})x + \cancel{2\pi N} + \pi)}^{= -\operatorname{sen}((N+\frac{1}{2})x)}}{\underbrace{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}x + \pi)}_{= -\operatorname{sen}(\frac{1}{2}x)}} = D_N(x)$$

D_N è pari $\quad D_N(-x) = D_N(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx}_{=0\ \forall n\neq 0} = 1$$

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_N(x-t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_N(t-x)\,dt = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau)\,D_N(\tau)\,d\tau =$$

$\tau = t-x$

$d\tau = dt$ $\qquad t=-\pi \rightsquigarrow \tau = -\pi-x$

$\qquad t=\pi \rightsquigarrow \tau = \pi-x$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\,D_N(\tau)\,d\tau$$

Teorema di Dirichlet-Weierstrass

Sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$, $x_0 \in \mathbb{R}$; esistono finiti $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$, $f'(x_0^+)$. Allora la serie di Fourier di f $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ converge a $\underbrace{\frac{1}{2}\left(f(x_0^-)+f(x_0^+)\right)}_{=\, f(x_0)}$ per $x=x_0$.

(dimostrazione per il caso f continua in x_0 ; $f(x_0)$)

Dim

Da dimostrare che $\lim_{N\to+\infty}\left(S_N(x_0)-f(x_0)\right)=0$

$$S_N(x_0)-f(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\,D_N(t)\,dt - f(x_0)\cdot\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt}_{=1} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x_0+t)-f(x_0)\right)D_N(t)\,dt =$$

$$S_N(x_0) - f(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x_0+t) - f(x_0)\big) \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(N+1)it} - e^{-Nit}}{e^{it}-1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}\cdot\frac{t}{e^{it}-1}}}_{\|} \cdot \left(e^{(N+1)it} - e^{-Nit}\right) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left(e^{(N+1)it} - e^{-Nit}\right)dt$$

$g(t)$ è una funzione limitata: infatti $\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$ è un rapporto incrementale, e questo ammette limite finito da destra e da sinistra; quindi è limitato

la funzione $\frac{t}{e^{it}-1}$ è limitata per $t \in [-\pi,\pi]$ $\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^{it}-1} = \frac{1}{i}$.

$$S_N(x_0) - f(x_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{(N+1)it}\, dt}_{c_{-(N+1)}(g)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{-Nit}\, dt}_{c_N(g)} =$$

$c_N(g)$ è coef

$c_{-(N+1)}(g)$ ← coefficienti di Fourier di g

$$\lim_{N\to+\infty}\left[S_N(x_0) - f(x_0)\right] = \lim_{N\to+\infty}\left[c_{-(N+1)}(g) - c_N(g)\right] = 0$$

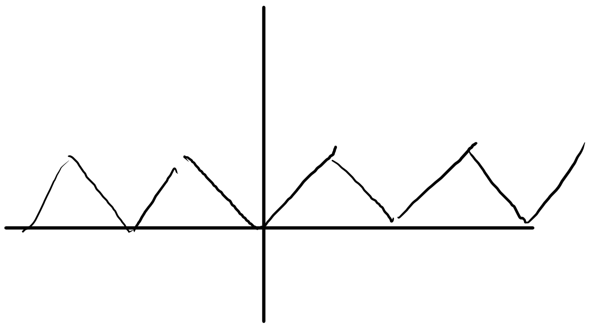
per il Lemma di Riemann-Lebesgue

Ci sono altri criteri di convergenza puntuale

(funzioni Hölderiane $\Rightarrow$ $\sqrt{|x|}$ OK).

Convergenza uniforme

Es: $f(x) = |x|$ su $]-\pi, \pi]$



$$\hat{f}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x)}_{\varphi_n(x)}$$

$|\varphi_n(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)^2}$ la serie $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ è convergente

M-test di Weierstrass $\Rightarrow$ la serie converge uniformemente (e quindi puntualmente)

OSS: se ho $\sum \cdots$ converge uniformemente a una funzione g

$\Rightarrow \quad \| S_N(x) - g(x) \|_\infty \to 0$

$\Rightarrow \quad \| S_N(x) - g(x) \|_2 \to 0 \quad \Rightarrow \quad S_N(x) \to g(x)$ in L^2

ma $S_N(x) \to f(x)$ in L^2

$\Rightarrow \quad f(x) = g(x)$ quasi ovunque

ma f e g sono continue $\Rightarrow \quad f(x) = g(x)$ ovunque.

Teorema

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua e 2π-periodica ($f(-\pi) = f(\pi)$!)

Sia $\quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-inx} dx \quad$ e supponiamo che $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$.

Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente a f.

Dim $\quad |c_n(f) e^{-inx}| \underset{=}{\le} |c_n(f)| \quad \Rightarrow \quad$ M-test di Weierstrass $\Rightarrow$ la serie converge uniformemente.

Quali proprietà di f mi garantiscono la convergenza uniforme?

Teorema

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua e 2π-periodica, sia f C^1 a tratti.
Allora la serie di f converge uniformemente a f.

Dim $f \in L^2([-\pi, \pi])$, quindi la serie $\hat{f}$ converge in energia a f.

Considero f' (continua a tratti, quindi $f' \in L^2([-\pi, \pi])$), esiste la serie di Fourier di f' e si ha convergenza in energia a f'.

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{\cancel{\left[f(x) e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi}}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot (-in e^{-inx}) dx \right) = \frac{1}{2\pi} in \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$= in\, c_n(f)$$

$c_n(f') = in\, c_n(f)$ $\qquad$ $c_n(f) = \dfrac{1}{in} c_n(f')$

$$\forall n \neq 0 \quad \underbrace{|c_n(f)|} = \frac{1}{n} |c_n(f')| \leq \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2\right)}$$

$$\left[\ |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)\ \right]$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum \frac{1}{n^2} + \sum |c_n(f')|^2\right)$$

converge $\qquad$ converge (Parseval)

Per il test di Weierstraß

la serie $\sum c_n(f) e^{inx}$

converge uniformemente.

Si può dimostrare che il Teorema vale nelle ipotesi più deboli

$\boxed{f' \in L^2([-\pi,\pi])}$ (f' nel senso delle funzioni assolutamente continue)