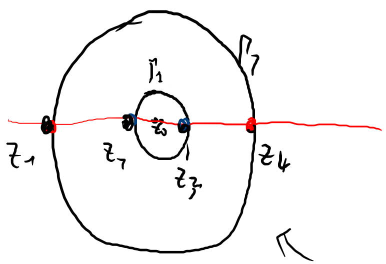
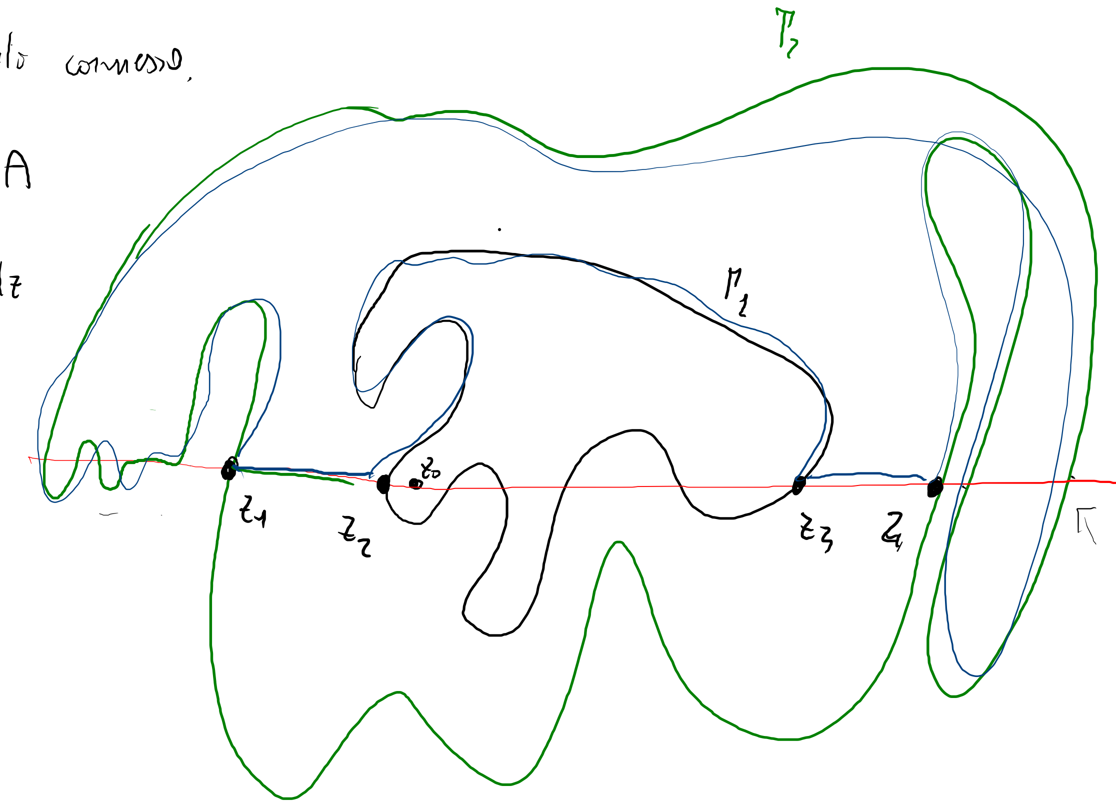
Teorema dei due circuiti

$A \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso.

$\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{C}$ $\quad \Gamma_1 \subset \Gamma_{2\,int}$ $\quad \Gamma_{2\,int} \setminus \Gamma_{1\,int} \subset A$

$f: A \to \mathbb{C}$ olomorfa $\Rightarrow \int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz$





Sia $z_0 \in \Gamma_{1\,int}$ e r una retta che passa per z_0.

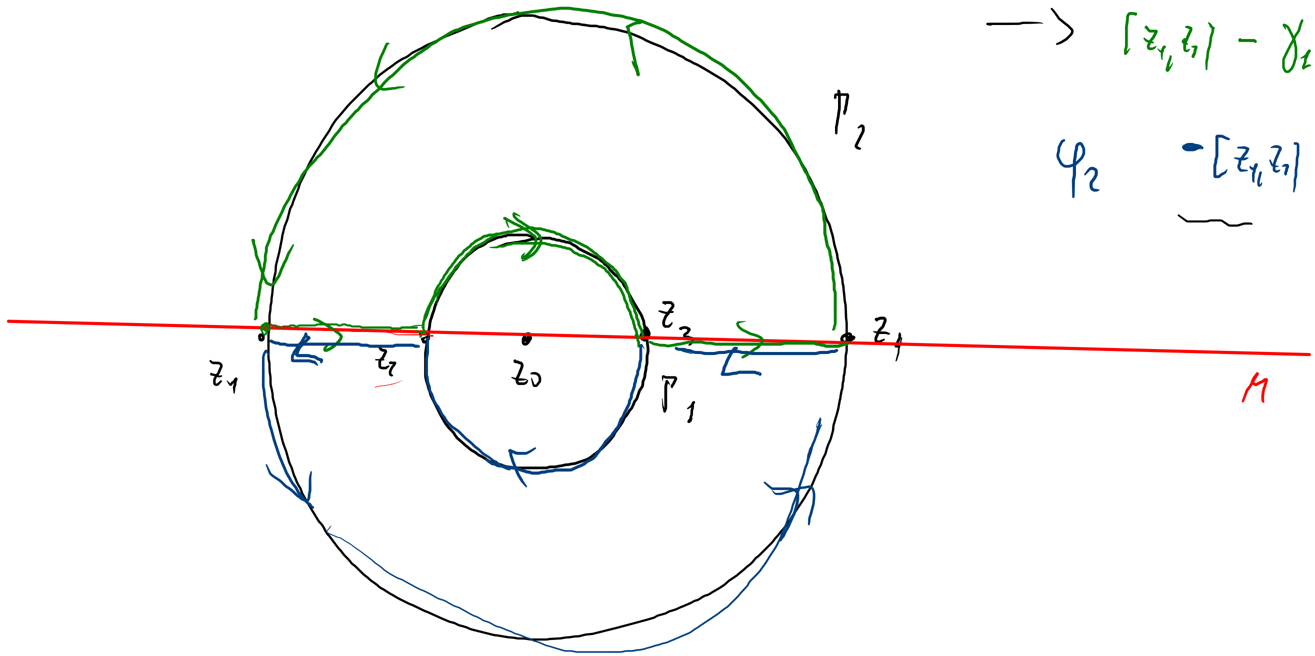
r interseca Γ_1 e Γ_2 in due compatti; sia $z_2 = \min \Gamma_1 \cap r$ $\quad z_3 = \max \Gamma_1 \cap r$

$z_1 = \max\{z \in \Gamma_2 : z < z_2\}$ $\quad z_4 = \min\{z \in \Gamma_2 : z > z_3\}$

Introduco il circuito φ_1 φ_1

$\longrightarrow [z_1, z_2] - \gamma_{1\,sup} + [z_3, z_4] + \gamma_{2\,sup}$

φ_2 $\quad -[z_1, z_2] + \gamma_{2\,inf} - [z_3, z_4] - \gamma_{1\,inf}$



f è olomorfa in $\Phi_{1\,int}$ e $\Phi_{2\,int}$, quindi per Cauchy $\int_{\varphi_1} f\,dz = 0 = \int_{\varphi_2} f\,dz$

$$0 = \int_{\varphi_1} f\,dz + \int_{\varphi_2} f\,dz = \cancel{\int_{[z_1,z_2]} f\,dz} - \int_{\gamma_{1\,sup}} f\,dz + \cancel{\int_{[z_3,z_4]} f\,dz} + \int_{\gamma_{2\,sup}} f\,dz - \cancel{\int_{[z_1,z_2]} f\,dz} + \int_{\gamma_{2\,inf}} f\,dz - \cancel{\int_{[z_3,z_4]} f\,dz} - \int_{\gamma_{1\,inf}} f\,dz$$

$$= -\int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz$$

Formula integrale di Cauchy

$A \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso $f : A \to \mathbb{C}$ olomorfa γ circuito orientato positivamente con sostegno Γ tale che $\Gamma_{int} \cup \Gamma \subset A$.

Allora $\forall z \in \Gamma_{int}$
$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi}$$

Dim

Sia $z \in \Gamma_{int}$; per ogni r considero $C_r(t) = z + r e^{it}$

Per il teorema dei due circuiti si ha (per r sufficientemente piccolo)

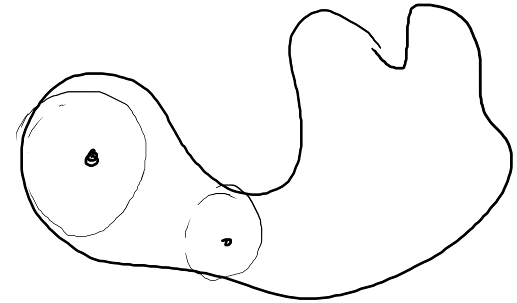
$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r e^{it})}{\cancel{r e^{it}}} \cdot i \cancel{r e^{it}}\, dt = i \int_0^{2\pi} f(z + r e^{it})\, dt$$

non dipende da r!

$$\lim_{r \to 0} \rightsquigarrow \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = i \int_0^{2\pi} \lim_{r \to 0} f(z + r e^{it})\, dt = i 2\pi f(z)$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\,dt = f(z)}$$

"Teorema della media"



Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice analitica se $\forall\, z_0 \in A$ e $\forall\, B(z_0, r) \subseteq A$ esiste $(c_n)_n$ tale che $\forall\, z \in B(z_0, r)$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$

si ha $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ (Taylor)

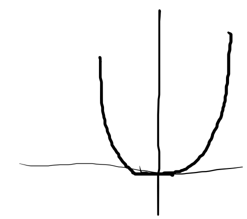
Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe

A aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora f è analitica.

(Il caso non è vero per funzioni reali

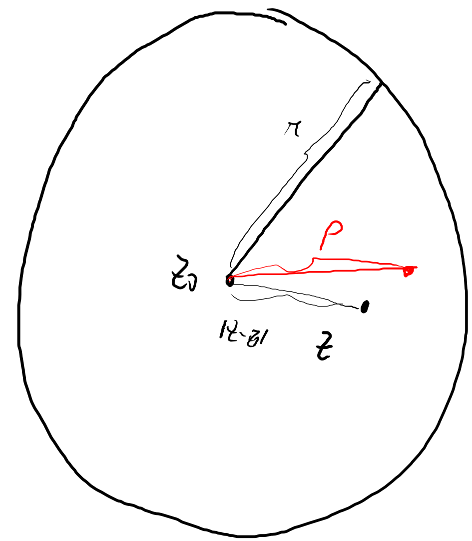
es: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ è $C^\infty(\mathbb{R})$ ma non è analitica

$f^{(n)}(0) = 0$



Dim

Sia $z_0 \in A$ e $B(z_0, r) \subseteq A$



sia $z \in B(z_0, r)$

sia $|z - z_0| < \rho < r$

$\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$

Per la formula integrale di Cauchy si ha $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = (*)$

$\xi - z = \xi - z_0 + z_0 - z = (\xi - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)$ $\quad \left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} < 1$

$$\frac{1}{1 - \sigma} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma^n$$

$$(*) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} f(\xi)\cdot\frac{1}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n d\xi =$$

ho la convergenza uniforme della serie

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi\right)}_{= C_n}(z-z_0)^n$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n}$$

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

formula integrale di Cauchy per le derivate

$$\Rightarrow \boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi}$$

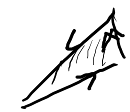
f olomorfa $\Rightarrow$ $\int_\gamma f\,dz = 0$ $\qquad \Gamma_{int} \cup \Gamma \subset A$

Teorema di Morera

$A \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, $f: A \to \mathbb{C}$ continua tale che, per ogni triangolo $T \subset A$ (pieno) si ha

$$\int_{\partial T} f\,dz = 0 \,.$$

Allora f è olomorfa.



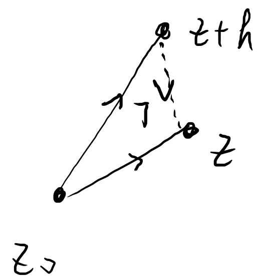
Dim Dimostriamo che f è localmente primitivabile.

Sia $z_0 \in A$ $\quad B(z_0, \rho) \subseteq A$. Poniamo $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\xi)\,d\xi$

$[z_0, z]$ indica il segmento $\gamma: [0,1] \to A$ $\quad \gamma(t) = z_0 + t(z - z_0)$

Dimostriamo che $F'(z) = f(z)$ $\quad \forall z \in B(z_0, \rho)$.

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(F(z+h)-F(z)\Big) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{[z_0,z+h]} f(\xi)\,d\xi - \int_{[z_0,z]} f(\xi)\,d\xi\right) = *$$



$T \subset A$

$$\int_{\partial T} f\,d\xi = 0$$ quindi $$\int_{[z_0,z+h]} f\,d\xi + \int_{[z+h,z]} f\,d\xi + \underbrace{\int_{[z,z_0]} f\,d\xi}_{= -\int_{[z_0,z]}} = 0$$

$$* = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\xi)\,d\xi = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\cancel{h}}\int_0^1 f(z+th)\cdot\cancel{h}\,dt =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(z+\vartheta h) = f(z)$$

$0 \le \vartheta \le 1$

$\gamma(t) = z + th \quad t\in[0,1]$

$\gamma'(t) = h$

f è localmente primitivabile; quindi $\forall z_0 \quad \exists\, B(z_0, \rho)$ dove

$f = F'$ $\quad F$ è olomorfa, quindi è analitica e quindi anche f è olomorfa

quindi f è olomorfa.

Teorema di caratterizzazione delle funzioni primitivabili

$f : A \to \mathbb{C}$ continua $\quad A$ aperto connesso

f è primitivabile se e solo se per ogni circuito γ con $\Gamma \subset A$ (non chiedo $\Gamma_{[a]} \subset A$!)

si ha $\int_\gamma f \, dz = 0$

[se e solo se per ogni curva regolare a tratti con $\Gamma \subset A$ l'integrale

$\int_\Gamma f \, dz$ dipende solo dagli estremi della curva]

$\oplus$ Dim se f è primitivabile $\quad f(z) = F'(z) \qquad \int_\gamma F'(z) \, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

Sia f a circuitazione nulla (cioè $\int_\gamma f\,dz = 0$ $\forall$ circuito γ con $\Gamma \subset A$) Fisso $z_0 \in A$.

costruisco $F(z) = \int_{\gamma_r} f(\xi)\, d\xi$ si dimostra che $F'(z) = f(z)$.

γ_r curva congiungente z_0 a z

— o —

Insieme semplicemente connesso

A è sempl. connesso se per ogni circuito γ con $\Gamma \subset A$ si ha $\Gamma_{int} \subset A$.

<u>OSS</u>: se A è semplicemente connesso, $f: A \to \mathbb{C}$ continua

f olomorfa $\Leftrightarrow$ f analitica $\Leftrightarrow$ f localmente primitivabile $\Leftrightarrow$ f primitivabile $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ f verifica la propr. dei triangoli $\Leftrightarrow$ f a circuitazione nulla

Teorema di Liouville

Sia $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ intera (cioè olomorfa). Sia f limitata.

Allora f è costante.

Es. 4: Disuguaglianze di Cauchy $\quad f$ analitica $\underbrace{\left(f: B(z_0, r) \to \mathbb{C} \right.}$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$

allora $|c_n| \leq \max_{z \in \partial B(z_0, r)} |f(z)| \cdot \frac{1}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dim $\quad f$ limitata $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \underbrace{|f(z)| \leq M} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \qquad |c_n| \leq M \cdot \frac{1}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall r > 0$

non dipende da r

$\forall n \geq 1 \quad \lim_{r \to +\infty} |c_n| = 0 \quad \Rightarrow c_n = 0 \quad \forall n \geq 1 \qquad f(z) = c_0$ è costante

Corollario — Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $p(z)$ un polinomio di grado $n \geq 1$ allora esiste uno zero di $p(z)$

Per assurdo supponiamo che $p(z) \neq 0 \ \forall z$.

Allora posso definire $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ $\quad$ f è olomorfa.

Inoltre $\displaystyle\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0$

$$\frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \frac{1}{z^n \left(a_n + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{z}}_{\to 0} + \dots + \underbrace{\frac{a_0}{z^n}}_{\to 0} \right)} \to 0$$

quindi f è limitata

$\varepsilon = 1 \quad \exists R : \quad |f(z)| < 1 \quad$ se $|z| > R$

su $\overline{B(0,R)}$ f è limitata (continua su un compatto)

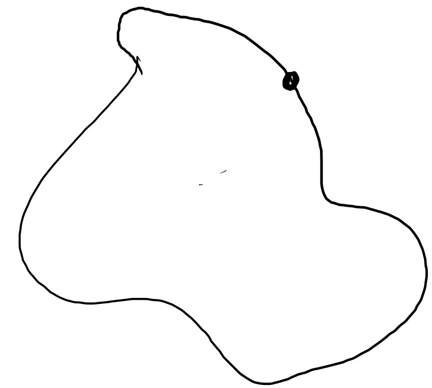
$\Rightarrow$ per Liouville f è costante. Assurdo.

Principio di massimo

A aperto connesso; $f: A \to \mathbb{C}$ olomorfa. Sia γ circuito con $\Gamma \cup \Gamma_{int} \subset A$.

Sia $M = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$

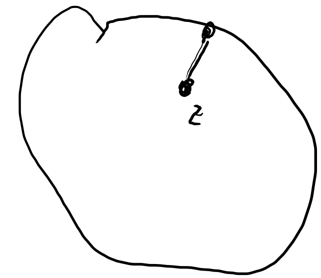
Allora $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Gamma \cup \Gamma_{int}$.



Quindi il massimo di $|f|$ è assunto sul bordo.

Inoltre, se esiste $z_1 \in \Gamma_{int}$ dove $|f(z)| = M$, si ha $f = $ costante.

Dim (prima parte) $\qquad M = \max_{\xi \in \Gamma} |f(\xi)|$



Sia $z \in \Gamma_{int}$ sia $d = d(z, \Gamma)$

$$= \underbrace{\min \{ |z - \xi| : \xi \in \Gamma \}} > 0$$

sia $k \in \mathbb{N}$

$$[f(z)]^k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)^k}{\xi - z} \, d\xi$$

$$|f(z)|^k \le \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\overbrace{|f(\xi)|^k}^{\le M^k}}{\underbrace{|\xi - z|}_{\ge d}} \, ds \le \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{M^k}{d} \, ds = \left(\frac{\ell(\gamma)}{2\pi d} \right) \cdot M^k$$

$$|f(z)| \le \underbrace{\left(\frac{\ell(\gamma)}{2\pi d} \right)^{1/k}}_{\to 1} \cdot M$$

$$\lim_{k \to +\infty} \Rightarrow |f(z)| \le M$$