Classificazione delle singolarità isolate di una funzione analitica

$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitica, $z_0 \in \mathbb{C}$ punto singolare isolato per f

1) singolarità eliminabile se f è localmente limitata in z_0 [se e solo se $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}$]

2) polo di ordine $k \in \mathbb{N}^+$ se $(z-z_0)^k f(z)$ è loc. limitata in z_0
ma $(z-z_0)^{k-1} f(z)$ NON è loc. limitata [se e solo se $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$]

3) singolarità essenziale se $\forall k \in \mathbb{N}$ $(z-z_0)^k f(z)$ NON è localmente limitata in z_0

<u>Teorema</u> z_0 è essenziale se e solo non esiste $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$

<u>Dim</u>: Sia z_0 essenziale $\Rightarrow$ non può esistere il limite (se esistesse sarebbe polo o eliminabile)

Supponiamo non esista il limite $\Rightarrow$ $(z-z_0)^k f(z)$ non può essere limitata per qualunque k, perché altrimenti esisterebbe il limite.

Es: $f(z) = e^{1/z}$ $\quad z_0 = 0$ è singolarità isolata.

se $x \in \mathbb{R}$ non esiste $\lim_{x \to 0} \left| e^{\frac{1}{x}} \right| = \begin{cases} x \to 0^+ & +\infty \\ x \to 0^- & 0 \end{cases}$ quindi non esiste $\lim_{z \to 0} \left| e^{\frac{1}{z}} \right|$

<u>OSS</u>: consideriamo l'equazione

$e^{1/z} = w$ con $w \in \mathbb{C}$ $\quad$ se $w = 0$ l'equazione non ha soluzioni

sia $w \neq 0$ $\quad w = \rho e^{i\vartheta}$ $\quad \rho > 0$ $\quad e^{\frac{1}{z}} = \rho e^{i\vartheta}$ $\quad \frac{1}{z} = \log \rho + i(\vartheta + 2k\pi)$

$z_k = \dfrac{1}{\log \rho + i(\vartheta + 2k\pi)}$ sono infinite soluzioni $\quad \lim_{k \to +\infty} z_k = 0$

$\frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

<u>Teorema di Picard</u>

Sia z_0 una singolarità essenziale per f. Allora $\forall\, w \in \mathbb{C}$ con un'unica eccezione, per ogni intorno U di z_0 l'equazione $f(z) = w$ ha infinite soluzioni in U.

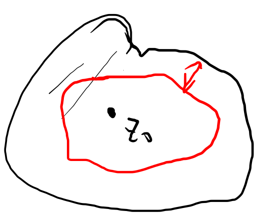
Residuo di una funzione in una singolarità isolata

$A \subseteq \mathbb{C}$ aperto $\quad f : A \to \mathbb{C}$ analitica $\quad z_0$ punto singolare isolato per f.

Diremo residuo di f in z_0 il numero

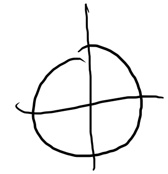
$$Res(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,dz$$

dove γ è un circuito orientato positivamente tale che $\Gamma \subset A$ e z_0 è l'unica singolarità in Γ_{int}.



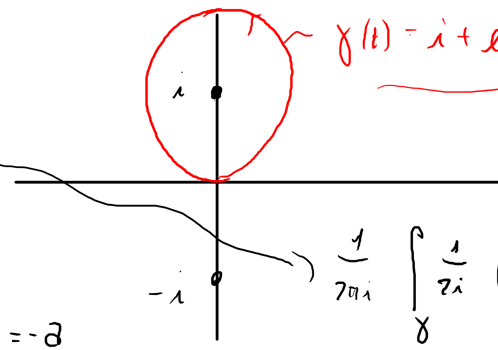
Si osservi che $Res(f, z_0)$ non dipende da γ.

Es: $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad \text{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1$



$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ singolarità i e $-i$

$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\,dz$



$\gamma(t) = i + e^{it}$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{a}{z+i} + \frac{b}{z-i} = \frac{1}{2i}\left(\frac{-1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right)$$

$$\frac{a(z-i) + b(z+i)}{z^2+1}$$

$a + b = 0 \qquad b = -a$

$(-a+b)i = 1 \qquad 2bi = 1 \qquad b = \frac{1}{2i} \qquad a = -\frac{1}{2i}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{2i}\left(\frac{-1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right)dz =$$

$$\frac{-1}{4\pi}\left[\underbrace{\int_\gamma \frac{-1}{z+i}\,dz}_{=0} + \int_\gamma \frac{1}{z-i}\,dz\right] =$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{e^{it}}} \cdot i\,\cancel{e^{it}}\,dt = -\frac{i}{4\pi} \cdot 2\pi$$

$$= -\frac{i}{2}$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}, i\right) = -\frac{i}{2}$$

$$\boxed{\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}, -i\right) = \frac{i}{2} = \overline{\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}, i\right)}}$$

— o —

Formula per il calcolo dei residui in un polo (di ordine $n \geq 1$)

$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitica, z_0 polo di ordine n per f; allora

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} D^{n-1}\left((z-z_0)^n f(z)\right) = g^{(n-1)}(z)$$

in z_0

Dim poniamo $g(z)$ = prolung. analitico di $\boxed{(z-z_0)^n f(z)}$

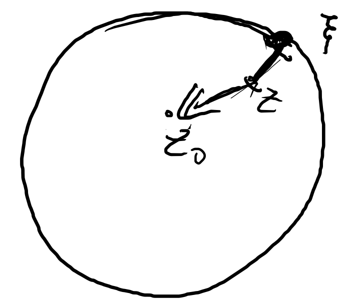
$$g^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^n}\, d\xi = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi) \frac{(\xi - z_0)^n}{(\xi - z)^n}\, d\xi$$

formula integrale di Cauchy per D^{n-1}

$$\lim_{z \to z_0} g^{(n-1)}(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi) \frac{(\xi - z_0)^n}{(\xi - z)^n} \, d\xi = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi)\, d\xi$$

$$= (n-1)! \, \mathrm{Res}(f, z_0)$$

posso portare il $\lim\limits_{z \to z_0}$ dentro l'integrale



$z \to z_0$ posso supporre che $\left| \dfrac{\xi - z_0}{\xi - z} \right| < 2$

$$\left| f(\xi) \frac{(\xi - z_0)^n}{(\xi - z)^n} \right| \le |f(\xi)| \, 2^n$$ integrabile $\Rightarrow$ vale Lebesgue

Quindi $$\boxed{\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(n-1)}(z)}$$

$$f(z) = \frac{z}{\cos z - 1} \qquad \cos z = 1 \qquad z = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{se } k=0 \quad z_0 = 0$$

$$z_k = 2k\pi \quad k \neq 0$$

z_k: $\quad h(z) = \cos z - 1 \qquad \mathrm{ord}_0\, h(z) \qquad h(0) = 0$

$$h'(z) = -\operatorname{sen} z \qquad h'(0) = 0 \qquad \Rightarrow \mathrm{ord}_0\, h(z) = 2$$

$$h''(z) = -\cos z \qquad h''(0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ z_k $k \neq 0$ sono poli di ordine 2

$k = 2$

$$\lim_{z \to 2k\pi} f(z) \cdot (z - 2k\pi)^k = \lim_{\substack{z \to 2k\pi \\ k \neq 0}} z \cdot \frac{(z - 2k\pi)^k}{\cos z - 1} \overset{H}{=} \lim_{z \to 2k\pi} \frac{k\,(z - 2k)^{k-1}}{-\operatorname{sen} z} \overset{H}{=} \lim_{z \to 2k\pi} \frac{k(k-1)\,(z-2k)^{k-2}}{-\cos z}$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$$

$k = 0 \quad z_0 = 0$

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{1 - \cos z} \cdot z^k \qquad \boxed{k = 1}$$

$$\frac{z^2}{1 - \cos z} \to 2$$

z_0 polo di ordine n

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} D^{n-1}\left(f(z)(z-z_0)^n\right)$$

OSS: se sbagliamo l'ordine del polo?

sia k l'ordine del polo $k > n$ il limite sarà ∞!

se $k < n$

$$\frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} D^{n-1}\left(f(z)(z-z_0)^n\right) \qquad \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi)\, d\xi$$

$$g(z) = f(z)\cdot(z-z_0)^n \qquad \text{si ottiene lo stesso risultato}$$

$$\lim_{z \to z_0} g^{(n-1)}(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)\cancel{(\xi - z_0)^n}}{\cancel{(\xi - z)^n}}\, d\xi = (n-1)!\, \text{Res}(f, z_0)$$

OSS: sia f tale che $\boxed{f(\bar{z}) = \overline{f(z)}}$

es. $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ funzione razionale con coefficienti reali

Si ha che se z_0 è punto singolare isolato, anche $\bar{z}_0$ lo è; inoltre se z_0 è un polo, si ha $\text{Res}(f, \bar{z}_0) = \overline{\text{Res}(f, z_0)}$

[nella dimostrazione si usa il fatto che $f^{(n)}(\bar{z}_0) = \overline{f^{(n)}(z_0)}$ e la proprietà di linearità della coniugazione

$$f'(\bar{z}_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(\bar{z}_0)}{z - \bar{z}_0} = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ (\bar{z} \to z_0)}} \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(z_0)}{\bar{z} - z_0} \right)} = \overline{f'(z_0)}$$

<u>OSS</u> (Es. 2 foglio "Singolarità e residui")

Sia z_0 un polo semplice per $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ (z_0 è uno zero semplice di h)

g, h analitiche.

Allora $\operatorname{Res}(f, z_0) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

Es: $\operatorname{Res}\left(\dfrac{2z-1}{z^3+z}, i \right) = \dfrac{2i-1}{3(-1)+1} = \dfrac{2i-1}{-2} = \dfrac{1}{2} - i$

$3z^2+1$

$$\lim_{z \to i} \frac{2z-1}{z^3+z} (z-i) =$$

$$f(z) = \frac{1}{z \operatorname{sen} z}$$

0 polo di ordine 2 $\quad n=2$

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 0} D\left(\frac{z}{\operatorname{sen} z}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} z - z\cos z}{\operatorname{sen}^2 z} \overset{l'H}{=} \frac{\cancel{\cos z} - \cancel{\cos z} + z\,\cancel{\operatorname{sen}} z}{2\,\cancel{\operatorname{sen}}\, z \cos z} \to 0$$

Serie di Laurent

serie di potenze bilatera $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} (z-z_0)^{-k}}_{} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\text{usuale}}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} w^k$$

usuale, sia ρ il raggio di convergenza, la serie converge se

sia R_2 il raggio di convergenza

$|z-z_0| < R_2$

$|w| < \rho \qquad w = \frac{1}{z-z_0} \quad \rightsquigarrow \quad |z-z_0| > \frac{1}{\rho}$

poniamo $R_1 = 1/\rho$ $\left[\text{notazione } \frac{1}{0} = +\infty \quad \frac{1}{+\infty} = 0 \right]$

la serie bilatera converge se $R_1 < |z-z_0| < R_2$ (supponendo $R_1 < R_2$)

Poniamo $C(z_0, R_1, R_2) = \{ z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2 \}$

la serie bilatera converge se $z \in C(z_0, R_1, R_2)$

non converge se $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{C(z_0, R_1, R_2)}$.

— o —

Se $R_1 = 0$ $C(z_0, 0, R_2)$ è un intorno forato di z_0

Sia z_0 un polo di ordine k per f; $g(z) = (z-z_0)^k f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \left(c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots + c_k(z-z_0)^k + c_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \dots \right) .$$

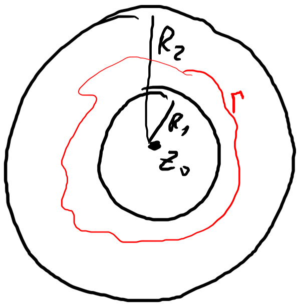
$z \neq z_0$

$$= \left[c_0(z-z_0)^{-k} + c_1(z-z_0)^{-k+1} + \dots + c_{k-1}(z-z_0)^{-1} + c_k + \dots \right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_n = 0 \text{ se } n < -k$$

Teorema di Laurent

Sia $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$ $\quad C = C(z_0, R_1, R_2)$



$f : C \to \mathbb{C}$ analitica;

Allora f è rappresentabile come serie bilatera (serie di Laurent)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

dove $\quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \quad$ γ è un circuito orientato positivamente con $\Gamma \subset C$.

OSS: $\boxed{c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi) \, d\xi = \mathrm{Res}(f, z_0)}$