$$B(\infty, r) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > r \}$$

$\lim_{n \to +\infty} z_n = \infty$ significa

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq \bar{n} \quad |z_n| > M$

cioè $\lim_{n \to +\infty} |z_n| = +\infty$

Serie in $\mathbb{C}$ + lim

$(z_n)_n$ successione in $\mathbb{C}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ somma parziale ridotta n-esima

diremo che la serie $z_0 + z_1 + z_2 + \dots$ converge a S e scriveremo

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = S} \quad \text{se} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

z_n termine generale della serie

NB: se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ converge, allora

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{k=0}^{n}(x_k + i y_k) = \sum_{k=0}^{n} x_k + i \sum_{k=0}^{n} y_k$$

serie geometrica di ragione w

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{converge?}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w^n = \frac{1}{1-w} \qquad w \in \mathbb{C}$$

$$\left|\frac{1}{2}+i\frac{1}{3}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}} < 1$$

converge se e solo se $|w|<1$

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|$ converge allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ è convergente

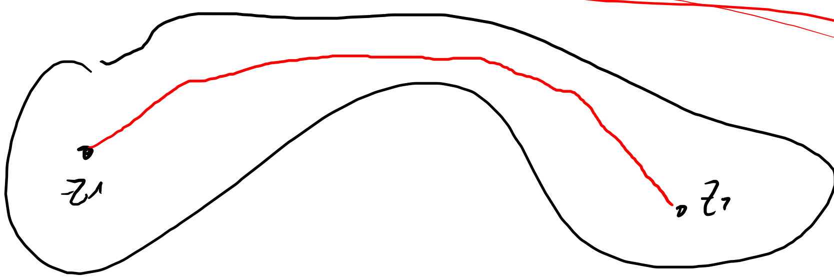
$$\sum (-1)^n \frac{1}{n}$$

$E \subset \mathbb{C}$ $\hat{=} \mathbb{R}^2$ si dice compatto se ogni successione $(z_n)_n$ $z_n \in E$ ha una sottosuccessione $(z_{n_k})_k$ $\lim\limits_{k \to +\infty} z_{n_k} = \ell \in E$.

E è compatto se e solo se E è chiuso e limitato.

—— ∘ ——

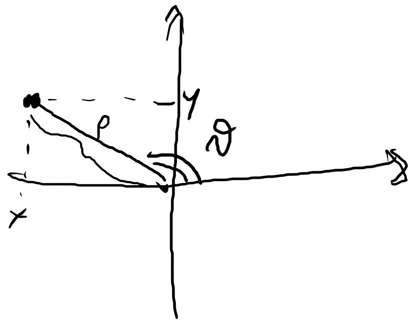
$E \subseteq \mathbb{C}$ si dice connesso (per archi) se per ogni $z_1, z_2 \in E$ esiste una curva continua $\gamma : [0,1] \to E$ tale che $\gamma(0) = z_1$ $\gamma(1) = z_2$



$f: E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice continua in $z_0 \in E$ se

esiste il limite $\cancel{\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{t.c.} \ \forall z \in E \quad |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$



$z = x+iy$

(x,y)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$$

$[\rho, \vartheta] \simeq x+iy$

Forma polare di un numero complesso

$\rho = |z|$ $\quad \vartheta$ = argomento di z (o anomalia)

$\vartheta + 2k\pi$ è argomento di z $\quad k \in \mathbb{Z}$

Notazione

$z = \rho e^{i\vartheta}$

forma esponenziale

se $\rho = 0$ $\quad z = 0$ $\quad \vartheta$ non è definito

Per convenzione ci concentriamo su $\vartheta \in]-\pi, \pi]$; $\vartheta \in]-\pi, \pi]$ si dice

Argomento principale di z

$z = x + iy$

$x = \rho \cos\vartheta$

$y = \rho \operatorname{sen}\vartheta$

$$z = \rho e^{i\vartheta}$$

Formula di Eulero: $\vartheta \in \mathbb{R}$ $\boxed{e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta}$

~~Consideriamo~~ al variare di $z \in \mathbb{C}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

questa serie converge $\forall z \in \mathbb{C}$; infatti la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} |z|^n$ converge

es: criterio del rapporto

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}|z|^{n+1}}{\frac{1}{n!}|z|^n} = \frac{1}{n+1}|z| \to 0$$

Definiamo la funzione esponenziale $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Esercizio: dimostrare che si possono definire le funzioni

$\operatorname{sen} z$, $\cos z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$$

<u>Teorema</u> $\forall z \in \mathbb{C}$ $\boxed{e^{iz} = \cos(z) + i \operatorname{sen}(z)}$

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, i^n \frac{z^n}{n!} = \dots$$

$$i^n = \begin{cases} \text{se } n = 4k & = 1 \\ \text{se } n = 4k+1 & = i \\ \text{se } n = 4k+2 & = -1 \\ \text{se } n = 4k+3 & = -i \end{cases} \qquad i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i$$

$$\dots = \sum_{k} \underbrace{\left(\frac{1}{(4k)!} \frac{z^{4k}}{(4k)!} - \frac{1}{(4k+2)!} z^{4k+2} \right)}_{\cos(z)} + i \underbrace{\sum_{k} \left(\frac{1}{(4k+1)!} z^{4k+1} - \frac{1}{(4k+3)!} z^{4k+3} \right)}_{\operatorname{sen}(z)}$$

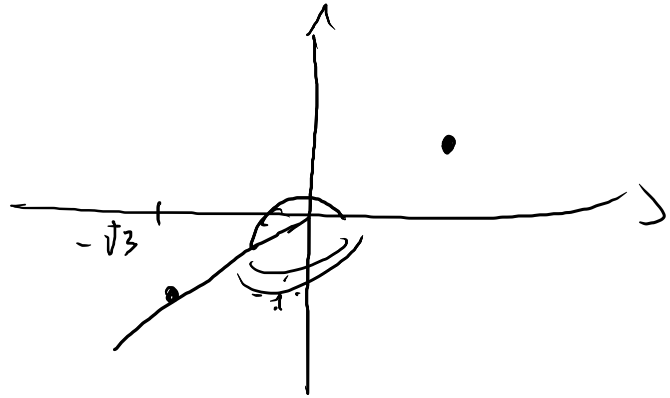
n pari

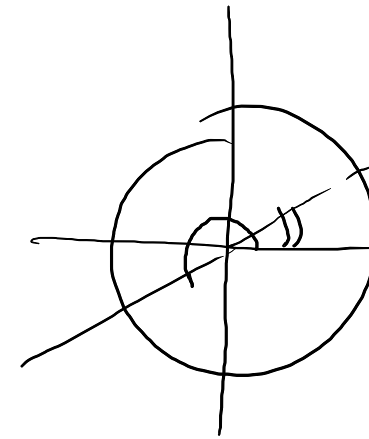
$$(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos(z) + i \operatorname{sen}(z)$$

$z = -i - \sqrt{3}$

$\rho e^{i\vartheta}$





$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \cos\vartheta \\ y &= \rho \sin\vartheta \end{aligned}}$$

$$\cancel{\boxed{\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}}$$

$\rho = |z| = \sqrt{1+3} = 2$

$y = -1 \quad x = -\sqrt{3}$

$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$\vartheta = \frac{7}{6}\pi$

$\vartheta = -\frac{5}{6}\pi$

Formule di De Moivre

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \, e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$$

$$\cancel{\rho_1 e^{i\vartheta_1} \cdot \rho_2 e^{i\vartheta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}}$$

$$z_1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1}$$

$$z_2 = \rho_2 e^{i\vartheta_2}$$

$$\rho_1 e^{i\vartheta_1} \cdot \rho_2 e^{i\vartheta_2} = \left(\rho_1 \cos\vartheta_1 + i \rho_1 \operatorname{sen}\vartheta_1\right) \cdot \left(\rho_2 \cos\vartheta_2 + i \rho_2 \operatorname{sen}\vartheta_2\right) =$$

$$= \rho_1 \rho_2 \left(\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 - \operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{sen}\vartheta_2\right) + i \rho_1 \rho_2 \left(\cos\vartheta_1 \operatorname{sen}\vartheta_2 + \operatorname{sen}\vartheta_1 \cos\vartheta_2\right)$$

$$= \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i \operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2)\right] = \rho_1 \rho_2 \, e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$$

$$z^n = (\rho e^{i\vartheta})^n = \rho^n e^{in\vartheta}$$ per induzione su n